

Нелинейные радиальные колебания изолированного вихря в океане с учетом внешнего воздействия

В рамках эквивалентно-баротропной модели океана найден класс точных аналитических решений, описывающих нелинейные осесимметричные колебания приповерхностного вихря, подверженного действию стационарных радиальных массовых сил. Радиальная проекция скорости таких колебаний является линейной функцией, азимутальная скорость, толщина вихря и массовые силы – многочленами радиальной координаты с зависящими от времени коэффициентами. Метод нахождения аналитического решения использует точную замену исходной математической модели системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Новый класс движений вихря является результатом нелинейного взаимодействия низшей моды колебаний и геострофической циркуляции внутри вихря.

Введение

Вихри в океане подвержены значительной временной изменчивости, совершая горизонтальные перемещения и колебания относительно центра масс [1]. Теоретические исследования динамики вихревых образований проводились многими исследователями с использованием различных численных и аналитических методов. Только для небольшого числа модельных ситуаций удается найти точные аналитические решения задач (в явной или неявной форме) о нелинейных колебаниях вихрей. Такие исследования проводились, главным образом, в рамках эквивалентно-баротропной модели двухслойного океана, математическая запись которой формально совпадает с системой уравнений длинных баротропных волн. Это обстоятельство и дало возможность получить аналитические решения задач о колебаниях океанических вихрей.

Аналитическое решение задачи об осесимметричных колебаниях вращающейся жидкости в бассейнах параболической формы, записанное через элементарные функции, получено в работах [2, 3]. Для таких движений жидкости (сейш) проекции горизонтальной скорости зависят линейно, а смещения свободной поверхности — квадратично от расстояния до оси симметрии модели. В работе [4] показано, что такие колебания являются достаточной общей формой колебаний динамических образований в океане и атмосфере, описываемых системами уравнений типа уравнений мелкой воды.

Точные аналитические решения задачи, описывающие горизонтальные колебания вихря без изменения его геометрической формы и радиальные инерционные колебания полей относительно центра масс вихря, впервые найдены в работах [1, 5]. Метод нахождения аналитического решения использует, как и в задачах о колебаниях жидкости в параболическом бассейне, точную замену исходной математической модели системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и нахождение ее аналитических решений. В работах [5 – 7] изложены процедуры нахождения аналити-

ческих решений аналогичной структуры, описывающих нелинейные колебания эллиптических вихрей.

В работе [8] найден класс аналитических решений эквивалентно-баротропной модели, описывающих нелинейные инерционные колебания круговых вихрей. Как и ранее, радиальная скорость движения жидкости в вихре линейно зависит от радиуса, однако азимутальная скорость и толщина вихря являются многочленами различных степеней от радиальной координаты с зависящими от времени коэффициентами. Благодаря более общей зависимости азимутальной скорости и толщины вихря от радиальной координаты это решение является более общим и более реалистичным по сравнению с найденными в работах [1, 3 – 5]. Новая форма решения в последующем была успешно использована в работе [9] для нахождения класса свободных нелинейных колебаний жидкости в бассейне параболической формы.

В настоящей работе найден новый класс точных аналитических решений, описывающих нелинейные осесимметричные колебания кругового вихря с учетом действия стационарной радиальной массовой силы в форме полинома от радиальной координаты. Такие колебания вихря, как и сейши в параболическом бассейне [9], являются результатом нелинейного взаимодействия колебаний, аналогичных найденным в работах [1, 3 – 5], и геострофического течения внутри вихря. Неявное аналитическое решение плоской задачи о колебаниях фронтальной зоны через эллиптические функции найдено в работе [10].

Редукция математической модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В рамках эквивалентно-баротропной модели океана рассматриваются нелинейные осесимметричные колебания линзы легкой воды плотности ρ_1 (теплого приповерхностного вихря), окруженной более тяжелой жидкостью плотности ρ_2 . Учитывается вращение Земли и действие зависящей от времени осесимметричной горизонтальной массовой силы (X, Y) . В цилиндрической системе координат (R, z, ϕ) , где ось z направлена вертикально вверх, не зависящее от азимутального угла ϕ движение жидкости описывается в безразмерных переменных системой трех уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - v = -\frac{\partial h}{\partial r} + X, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + u = Y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial(rhu)}{r \partial r} = 0, \quad (3)$$

где r — расстояние от вертикальной оси симметрии; τ — время; $\{u; v\}(r, \tau)$ — радиальная и азимутальная проекции горизонтальной скорости течения; $h(r, \tau)$ — толщина линзы легкой воды; $\{X; Y\}(r, \tau)$ — ускорение горизонтальной массовой силы.

При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабных единиц скорости течения и толщины вихря использованы соответственно величины $C = \sqrt{g'h_0}$ и h_0 , где $g' = g(1 - c_1/c_2)$; g — ускорение свободного падения, h_0 — максимальная толщина вихря в момент времени $\tau = 0$. Радиальная коор-

дината и время нормированы на величины $C\bar{f}^{-1}$ и \bar{f}^{-1} соответственно. Масштабная единица для ускорения массовой силы равна $C\bar{f}$.

По аналогии с работами [8, 9] решение системы уравнений длинных волн (1) – (3) будем искать в виде следующих многочленов от радиальной координаты r с зависящими от времени τ коэффициентами:

$$u = A(\tau)r, \quad v = \sum_{i=1}^n B_i(\tau)r^{2i-1}, \quad h = \sum_{i=0}^{2n-1} C_i(\tau)r^{2i}, \quad (4)$$

$$X = \sum_{i=1}^{2n-1} p_i(\tau)r^{2i-1}, \quad Y = \sum_{i=1}^n q_i(\tau)r^{2i-1}, \quad (5)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Натуральное число n будем называть ниже порядком решения (4). Подчеркнем, что при всех n радиальная скорость линейно зависит от r .

Подстановка выражений (4), (5) в уравнения (1) – (3) приводит к системе уравнений

$$\delta_{j,j,1}(\dot{A} + A^2) - \sum_{k=1}^j B_k B_{j-k+1} - B_j + 2jC_j - p_j = 0 \quad (j=1, \dots, 2n-1), \quad (6)$$

$$B_j + 2jAB_j + \delta_{j,j,1}A - q_j = 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (7)$$

$$C_j + 2(j+1)AC_j = 0 \quad (j=0, \dots, 2n-1), \quad (8)$$

в которой верхние точки означают дифференцирование по времени, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера ($\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$, но $\delta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$), функции $b_j \equiv 0$, если $j > n$. Заметим, что при $2 \leq j \leq 2n-1$ уравнения (6) представляют собой алгебраические соотношения между коэффициентами B_j ($1 \leq j \leq n$) и C_j ($2 \leq j \leq 2n-1$).

При $n = 1$ система уравнений (6) – (8) имеет четыре степени свободы. Увеличение порядка n решения (4) на единицу дает три дополнительных дифференциальных уравнения и два алгебраических соотношения, а именно: одно уравнение из (7) при $j = n$, два уравнения из (8) при $j = 2n-2$ и $j = 2n-1$, наконец, два алгебраических соотношения из (6) при $j = 2n-2$, $j = 2n-1$. Поэтому переход в системе (6) – (8) от n к $n+1$ добавляет в решение (4) только одну степень свободы.

Точное аналитическое решение нелинейной задачи

Система уравнений (6) – (8) с соответствующими начальными условиями может быть решена численно, например методом Рунге – Кутты. Цель настоящей работы — найти точные аналитические решения, описывающие колебания вихря произвольной амплитуды. Будем предполагать массовую силу стационарной. Применяемая ниже процедура аналогична описанной в работах [8, 9]. Она требует, чтобы массовая сила не содержала азимутальной проекции. Поэтому примем $q_j = 0$. Для любых $n \geq 1$ периодическое решение нелинейной системы уравнений (6) – (8) будем искать в виде

$$A = a\Psi \cos\Phi, \quad \Psi = \frac{1}{1 + \gamma \sin\Phi}, \quad \Phi = \omega\tau + \varphi, \quad (9)$$

$$B_j = -\frac{1}{2}\delta_{j,1} + b_j\Psi^j \quad (j=1, \dots, n), \quad (10)$$

$$C_j = c_j\Psi^{j+1} \quad (j=0, \dots, 2n-1), \quad (11)$$

где ω — подлежащая определению частота колебаний; a , γ , φ , c_j и b_j ($j = 1, \dots, n$) — константы.

Выражения для a и c_j ($j \geq 1$) через b_j и ω находятся в результате подстановки (9) – (11) в уравнения (6) – (8). Окончательно получаем

$$a = \frac{1}{2} \gamma \omega, \quad \omega = \sqrt{1 - 4p_1}, \quad (12)$$

$$2jc_j = (1 - \delta_{j,1})p_j - \frac{1}{4} \delta_{j,1} \omega^2 (1 - \gamma^2) + \sum_{k=1}^j b_k b_{j-k+1} \quad (j = 1, \dots, 2n - 1) \quad (13)$$

при условии, что $b_j = 0$ при $j > n$. Выражения (9) – (13) позволяют записать частное точное решение системы уравнений (1) – (3) при всех $n \geq 1$ в форме

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi r \cos \Phi, \quad v = -\frac{1}{2} r + \sum_{j=1}^n b_j \Psi^j r^{2j-1}, \quad (14)$$

$$h = \sum_{j=0}^{2n-1} c_j \Psi^{j+1} r^{2j}. \quad (15)$$

Параметры γ , φ , c_0 и b_j ($j = 1, \dots, n$) в (14) и (15) — произвольные константы, удовлетворяющие условиям $|\gamma| < 1$, $c_0 > 0$; последнее неравенство обеспечивает ненулевую толщину вихря в начале координат при всех $\tau \geq 0$. Кроме этого, не любые наборы параметров могут обеспечить существование конечного радиуса вихря. Это означает, что свободные параметры должны быть выбраны такими, чтобы уравнение $h(r, \tau) = 0$ по r степени $4n - 2$ имело положительные корни $r = r_b(\tau) > 0$ при всех $\tau \geq 0$. Подвижная граница вихря соответствует наименьшему из этих корней.

Заметим, что частота ω в (12) для нелинейных колебаний вихря не зависит от амплитуды колебаний и порядка n решения. Напротив, она зависит от параметра Кориолиса f и коэффициента p_1 линейного члена по r радиальной массовой силы. При отсутствии внешнего воздействия частота колебаний точно равна инерционной ($\omega = 1$) [8], как и в случае решения первого порядка [1, 3 – 6]. Внешняя радиальная сила, направленная к центру вихря ($p_1 < 0$), смещает частоту свободных колебаний вихря в область суперинерционных частот, а массовая сила противоположного направления ($p_1 > 0$) трансформирует колебания вихря в субинерционные. Согласно (12), внешнее воздействие должно удовлетворять условию $p_1 < 1/4$, чтобы обеспечить существование периодических колебаний вихря.

Низшая мода колебаний

Рассмотрим нелинейные колебания вихря в случае решения первого порядка. Оно является частным случаем решения (14), (15) при $n = 1$. Находим:

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi r \cos \Phi, \quad v = -\frac{1}{2} r - b_1 \Psi r, \quad (16)$$

$$h = c_0 \Psi + c_1 \Psi^2 r^2, \quad (17)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{2} \sqrt{8c_1 + (1 - \gamma^2) \omega^2}.$$

Это движение зависит от четырех констант γ , φ , c_0 и c_1 , которые должны быть подчинены условиям $|\gamma| < 1$, $c_0 > 0$, $-(1 - \gamma^2) \omega^2 / 8 \leq c_1 < 0$. При этих ограниче-

ниях для всех $\tau \geq 0$ существует подвижная граница вихря, соответствующая положительному корню квадратного уравнения $h(r, \tau) = 0$.

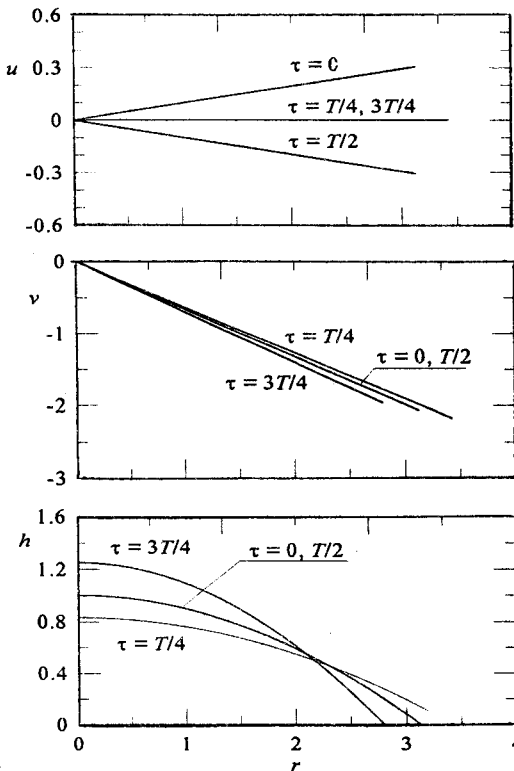
Постоянство объема вихря, являющегося одним из интегралов движения [1, 5 – 7], требует выполнения соотношения $c_1 = -\delta c_0^2$ между коэффициентами в формуле (17): Оно выполняется для вихря, который в режиме геострофического равновесия описывается выражениями

$$u = 0, v = -2\delta r - X, h = 1 - \delta r^2,$$

где внешняя массовая сила $X = p_1 r$, а параметр $\delta = C^2/(fW)^2$, W — радиус вихря в стационарном состоянии.

Простота решения (16), (17) первого порядка позволяет получить аналитические выражения для положения границы вихря $r = r^+(\tau)$, максимальной толщины вихря $h = h^+(\tau)$ и проекций скорости $u = u^+(\phi)$, $v = v^+(\tau)$ на границе вихря $r = r^+(\tau)$. Соответствующие выражения имеют вид:

$$r^+ = \sqrt{\frac{1}{\delta c_0 \Psi}}, h^+ = c_0 \Psi, u^+ = \frac{1}{2} \gamma \omega r^+, v^+ = -\left(\frac{1}{2} + b_1 \Psi\right) r^+. \quad (18)$$



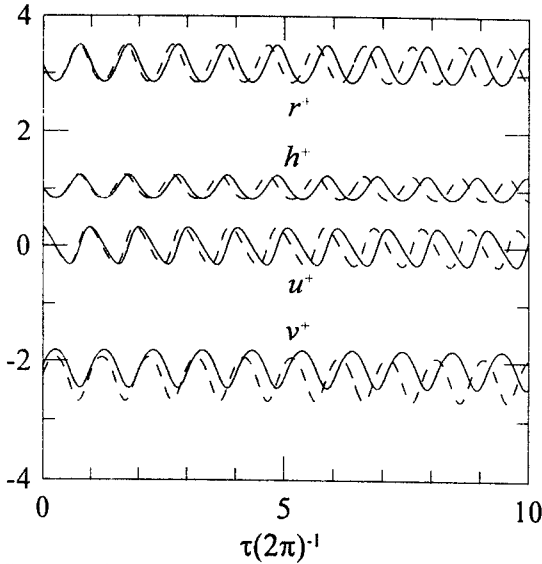
Р и с. 1. Распределения радиальной проекции скорости, азимутальной проекции скорости и толщины вихря для решения (16), (17) первого порядка в моменты времени $\tau = 0; T/4; T/2; 3T/4$, где $T = 6,413$ — безразмерный период вынужденных колебаний вихря. Значения параметров: $\phi = 0, \gamma = 0,2, c_0 = 1, p_1 = 0,01, \delta = 0,102$

Все величины (18) изменяются периодически по времени с частотой ω . Влияние внешнего воздействия проявляется через частоту колебаний ω .

Рассмотрим колебания вихря, который при геострофическом режиме движения имеет параболическое распределение толщины $h_g = 1 - \delta r^2$. Примем следующие физико-географические параметры вихря: радиус $W = 70$ км, максимальная толщина линзы тепловой воды $h_0 = 500$ м, параметр Кориолиса $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, приведенное ускорение $g' = 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$. В этом случае $\delta = (g'h_0)/(Wf)^2 = 0,102$.

На рис. 1 показаны радиальные сечения полей в вихре, соответствующие $n = 1$. Зависимости u, v и h от r приведены для моментов времени с интервалом $1/4$ безразмерного периода вынужденных колебаний вихря $T = 2p/\omega = 6,413$. Массовая сила направлена от центра вихря к его границе. Радиальная скорость в вихре колеблется относительно нулевого значения, изменяя знак в течение одного периода колеба-

ний. Значения азимутальной скорости течения и локальной толщины вихря колеблются относительно стационарных геострофических значений. При $\omega = 0$ распределения v и h совпадают с геострофическими, а распределение азимутальной скорости является ненулевым и выступает в роли начального возмущения геострофического режима движения.



Р и с. 2. Квазиинерционные вынужденные колебания радиуса вихря (r^+), его максимальной толщины (h^+), радиальной (u^+) и азимутальной (v^+) проекций скорости течения на границе вихревого образования $r = r^+$ при действии радиальных массовых сил. Сплошные линии соответствуют массовой силе, направленной от центра ($p_1 = 0,01$), штриховые — к центру ($p_1 = -0,01$) кругового вихря. Значения параметров те же, что и для рис. 1

Рис. 2 иллюстрирует квазиинерционные колебания основных характеристик вихря в случае решения первого порядка с учетом действия радиальной внешней силы, направленной к центру или от центра вихря. При отсутствии внешнего воздействия колебания вихря являются инерционными [1, 4 – 8]. Они трансформируются в субинерционные в результате действия массовой силы, направленной от центра вихря к его периферии ($p_1 > 0$), или суперинерционные, если внешняя сила направлена к центру вихревого образования ($p_1 < 0$). Благодаря изменению частоты колебаний ω амплитудные характеристики колебаний полей в вихре также изменяются в результате внешнего воздействия на вихревое образование.

Новые формы радиальных колебаний вихря

Новые формы нелинейных колебаний вихря соответствуют решениям (14), (15) при $n \geq 2$. Ограничимся численными оценками для случая $n = 3$. Стационарная радиальная массовая сила задается в виде

$$X = r(p_1 + p_2 r^2 + p_3 r^4 + p_4 r^6 + p_5 r^8), \quad (19)$$

поле скорости и толщина вихря описываются формулами

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi r \cos \Phi, \quad v = -\frac{1}{2} r + \Psi r (b_1 + b_2 \Psi r^2 + b_3 \Psi^2 r^4), \quad (20)$$

$$h = \Psi (c_0 + c_1 \Psi r^2 + c_2 \Psi^2 r^4 + c_3 \Psi^3 r^6 + c_4 \Psi^4 r^8 + c_5 \Psi^5 r^{10}), \quad (21)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 - 4p_1}, \quad b_1 = \frac{1}{2} \sqrt{8c_1 + (1 - \gamma^2)\omega^2},$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(p_2 + 2b_1 b_2), \quad c_3 = \frac{1}{6}(p_3 + 2b_1 b_3 + b_2^2),$$

$$c_4 = \frac{1}{8}(p_4 + 2b_2 b_3), \quad c_5 = \frac{1}{10}(p_5 + b_3^2),$$

$\gamma \in (-1, 1)$, $c_0 > 0$, $c_1 < 0$, b_2, b_3 — произвольные константы.

Как отмечалось выше, радиальная массовая сила X может иметь различную физическую природу, в частности, может быть создана барическим полем. В этом случае в размерных переменных она имеет вид

$$X = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p_a}{\partial r},$$

где p_a — отклонение атмосферного давления в аномалии от среднего значения; c_w — плотность воды. Зададим модельное распределение возмущений атмосферного давления над вихрем по формуле

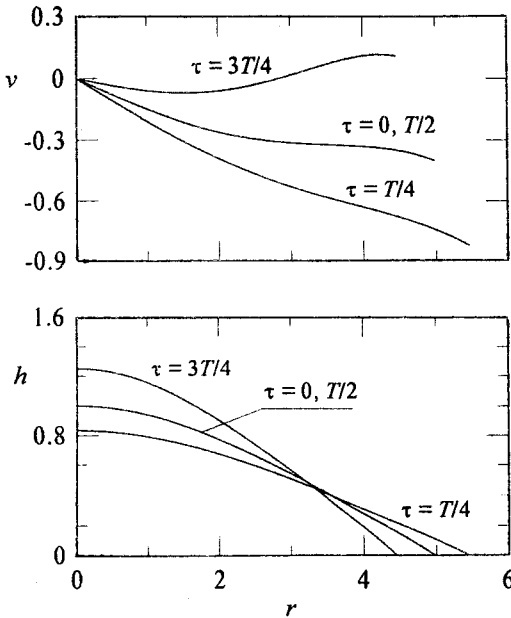
$$p_a = \Delta p \exp(-r^2 / R^2),$$

в которой R — характерный радиус барической аномалии. В безразмерных переменных соответствующая радиальная массовая сила задается выражением

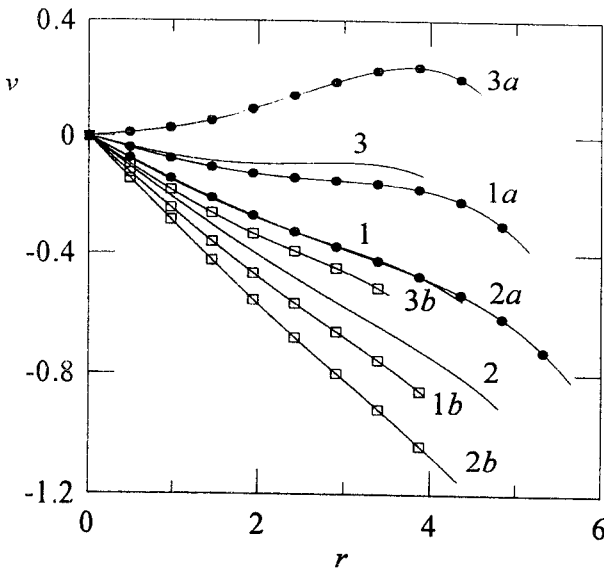
$$X = 2\delta_1 \beta r \exp(-\delta_1 r^2), \quad (22)$$

где $\delta_1 = C^2 / (Rf)^2$, $\beta = \Delta p / (\rho_w C^2)$. Для интенсивной барической аномалии радиуса $R = 100$ км с максимальным возмущением атмосферного давления $\Delta p = 3 \cdot 10^3$ Па коэффициенты полинома в формуле (19) таковы: $p_1 = 2\beta\delta_1 = 6,00 \cdot 10^{-2}$, $p_2 = -3,00 \cdot 10^{-3}$, $p_3 = 7,50 \cdot 10^{-5}$, $p_4 = -1,25 \cdot 10^{-6}$, $p_5 = 1,56 \cdot 10^{-8}$. Погрешность аппроксимации распределения (22) полиномом (19) составляет 0,04%.

Полиномиальная форма решения (14), (15) позволяет воспроизводить существенно более сложные структуры полей по сравнению с классическим решением первого порядка. Хотя линейный характер зависимости радиальной скорости от r сохраняется, горизонтальная структура азимутальной скорости может существенно отличаться от случая $n = 1$. Подобный случай для решения третьего порядка приведен на рис. 3. Расчеты выполнены по формулам (20) и (21) для вихря радиуса $W = 90$ км. Азимутальная скорость течения не является монотонной для всех моментов времени и может изменять свой знак вдоль радиуса (кривая, соответствующая $\tau = 3T/4$). Что касается радиального распределения толщины вихря, то оно качественно такое же, как и в случае $n = 1$.



Р и с. 3. Трансформация со временем распределений азимутальной скорости и толщины вихря для решения третьего порядка ($n = 3$) при отсутствии внешнего воздействия. Кривые соответствуют моментам времени $\tau = 0$; $T/4$; $T/2$; $3T/4$, где $T = 2\pi$ — безразмерный инерционный период. Значения свободных параметров: $\varphi = 0$, $\delta = 0,2$, $c_0 = 1$, $b_2 = 7,6 \cdot 10^{-3}$, $b_3 = -1,8 \cdot 10^{-4}$, $\delta = 0,0617$



Р и с. 4. Распределения азимутальной скорости при $n = 3$ с учетом внешнего воздействия. Кривые 1, 1a, 1b соответствуют моментам времени $\tau = 0; T/2$; кривые 2, 2a, 2b — моменту времени $\tau = T/4$; кривые 3, 3a, 3b — моменту времени $\tau = 3T/4$, где T — безразмерный период для соответствующего вида колебаний вихря. Группы кривых 1 – 3, 1a – 3a и 1b – 3b соответствуют случаям $\Delta p = 0, \Delta p > 0$ и $\Delta p < 0$ в формуле (22). Значения параметров: $\varphi = 0, \gamma = 0,2, c_0 = 1, b_2 = 5,1 \cdot 10^{-3}, b_3 = -1,81 \cdot 10^{-4}, \beta = 0,0617$

Рис. 4 показывает, что радиальная массовая сила может оказывать существенное влияние на распределение азимутальной скорости, даже если это воздействие вызвано возмущениями барического поля средней интенсивности. Влияние внешнего воздействия проявляется как в усложнении радиальной структуры поля скорости, так и в усилении амплитуды колебаний скорости течения. Благодаря атмосферному воздействию на вихревое образование отклонение периода колебаний скорости течения от инерционного достигает 15%.

Колебания малой амплитуды и механизм образования нового класса колебаний

Рассмотрим малые колебания вихря относительно среднего стационарного состояния. Возможные положения равновесия вихревого образования в форме (4), как стационарные решения системы уравнений (6) – (8), удовлетворяют соотношениям

$$\delta_{j,1} A^2 - \sum_{k=1}^j B_k B_{j-k+1} - B_j + 2jC_j - p_j = 0 \quad (j = 1, \dots, 2n-1),$$

$$A(2B_j + \delta_{j,1}) = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$AC_j = 0 \quad (j = 0, \dots, 2n-1).$$

Эта система уравнений имеет решение

$$A = 0, \quad C_j = \frac{1}{2j} \left(B_j + \sum_{k=1}^j B_k B_{j-k+1} + p_j \right) \quad (j = 1, \dots, 2n-1),$$

соответствующее геострофическому круговому течению ($u = 0$), в котором азимутальная скорость $v = v_g(r)$ и толщина $h = h_g(r)$ связаны уравнением

$$\frac{v_g^2}{r} + v_g - \frac{dh_g}{dr} + X = 0. \quad (23)$$

Если толщина геострофического вихря изменяется по квадратичному закону $h_g = 1 - \delta r^2$, а внешняя сила имеет вид $X = p_1 r$, из (23) находим:

$$v_g = b_g r, \quad b_g = -\frac{1}{2}(1 \pm s), \quad s = \sqrt{1 - 8\delta - 4p_1}.$$

Поэтому могут существовать два различных геострофических движения. Для реальных условий параметры δ и p_1 , как правило, малы, а поэтому величина s вещественная.

Линеаризация уравнений (1) – (3) относительно геострофического течения $u = 0, v = v_g(r), h = h_g(r)$ приводит к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - \frac{2v_g \tilde{v}}{r} - \tilde{v} &= -\frac{\partial \tilde{h}}{\partial r}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial v_g}{\partial r} + \frac{\tilde{u} v_g}{r} + \tilde{u} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial (r h_g \tilde{u})}{r \partial r} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

описывающей малые колебания вихря относительно равновесного состояния.

Отклонения полей от геострофического движения представим в виде

$$\tilde{u} = a^*(\tau)r, \quad \tilde{v} = b^*(\tau)r, \quad \tilde{h} = c_0^*(\tau) + c_1^*(\tau)r^2.$$

Неизвестные коэффициенты, помеченные знаками *, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a^* \pm s b^* + 2c_1^* &= 0, \quad b^* - s a^* = 0, \\ c_0^* + 2a^* &= 0, \quad c_1^* - 4\delta a^* = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

вытекающей из задачи (24). Общее решение системы (25) записывается в виде

$$\begin{aligned} a^* &= \alpha_1 \sin \Phi, \quad b^* = \alpha_2 \alpha_1 s \omega^{-1} \cos \Phi, \\ c_0^* &= \alpha_3 + 2\alpha_1 \omega^{-1} \cos \Phi, \quad c_1^* = 0,5 s \alpha_2 - 4\delta \omega^{-1} \alpha_1 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Phi = \omega\tau + \phi$; ω определено в (12); ϕ и $\alpha_{1,2,3}$ – произвольные константы, зависящие от начальных условий. В линейном случае все поля определены на фиксированном интервале $0 \leq r \leq 1/\sqrt{\delta}$. Частота линейных колебаний относительно геострофического течения совпадает с найденной для нелинейной задачи, что является следствием независимости частоты ω от амплитуды колебаний. Возмущение геострофического режима движения приводит к формированию нового геострофического режима движения, относительно которого происходят колебания вихря. При отсутствии резкой границы вихря (его нижняя граница не выходит на поверхность океана) в процессе адаптации полей может происходить излучение волн из зоны вихря и в результате формируется его новое геострофическое состояние [11, 12].

Таким образом, поле скорости и распределение толщины вихря в линейном случае можно представить в форме

$$u = \tilde{u}(r, \tau), \quad v = \tilde{v}(r, \tau) + v_g(r), \quad h = \tilde{h}(r, \tau) + h_g(r).$$

Поля \tilde{u} , \tilde{v} и \tilde{h} соответствуют гармоническим колебаниям вихря с частотой ω относительно стационарного циркуляционного геострофического течения, азимутальная скорость и толщина которого связаны соотношением $v_g = dh_g/dr - X$. Таким образом, поля (14) и (15) можно интерпретировать как результат нелинейного взаимодействия периодического по времени движения жидкости частоты ω , имеющего вид (16), (17), и стационарного геострофического тече-

ния внутри вихря. Эти движения являются независимыми, если опустить нелинейные слагаемые в уравнениях (24), но они взаимодействуют, если в математической модели учитываются нелинейные члены. В последнем случае возникающее движение проявляет свойства как низшей моды радиальных колебаний вихря (16), (17) частоты ω , так и фонового геострофического течения. Свободные параметры b_j в решении (14), (15) — проявление стационарного геострофического течения внутри вихря. Новый класс радиальных колебаний вихря может существовать только при совместном влиянии на динамику океана вращения Земли и нелинейности движения.

Выводы

В рамках эквивалентно-баротропной модели двухслойного вращающегося океана найден класс точных аналитических решений, описывающих нелинейные осесимметричные колебания приповерхностного (теплого) вихря. В отличие от предыдущих исследований этого направления новый класс решений не только имеет более сложную горизонтальную структуру, но и учитывает действие радиальной массовой силы. Радиальная скорость колебаний линейно зависит от радиальной координаты, азимутальная скорость, толщина вихря и массовая сила являются многочленами радиальной координаты с зависящими от времени коэффициентами. Фактически ограничения на степени полиномов отсутствуют.

Метод нахождения аналитического решения использует точную замену исходной математической модели длинноволновых движений океана системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. При отсутствии внешней силы колебания вихря являются точно инерционными. Благодаря действию массовой силы колебания вихря трансформируются в субинерционные, если массовая сила направлена от центра вихря к периферии, или суперинерционные, если эта сила направлена к центру вихревого образования. При одной и той же частоте колебаний радиальная структура поля азимутальной скорости может быть существенно различной. Внешнее воздействие на вихрь, вызванное, например, аномалией барического поля, может приводить к значительным изменениям характера колебаний поля скорости по сравнению со случаем свободных движений вихря.

Показано, что новый класс радиальных колебаний вихря является результатом нелинейного взаимодействия низшей моды колебаний и геострофического течения внутри вихря. Такие движения существуют благодаря совместному влиянию на динамику вихрей вращения Земли и нелинейности процесса. Найденные формы колебаний вихря более реалистичны: наибольшие азимутальные скорости течения не обязательно достигаются на границе вихревого образования, а радиальное распределение толщины вихря может отличаться от параболического закона. Решение дает дополнительные возможности для тестирования нелинейных численных моделей динамики океана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Специального исследовательского проекта *SFB 512, C3* Немецкого научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cushman-Roisin B., Heil W.H., Nof D.* Oscillations and rotations of elliptical warm – core rings // *J. Geophys. Res.* — 1985. — 90, № C6. — P. 11756 – 11764.
2. *Ball F.K.* Some general theorems concerning the finite motion of a shallow rotating liquid lying on a paraboloid // *J. Fluid Mech.* — 1963. — 17, pt. 2. — P. 240 – 256.
3. *Thacker W.C.* Some exact solutions to the nonlinear shallow – water wave equations // *Ibid.* — 1981. — 107. — P. 499 – 508.
4. *Ингель Л.Х.* Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* — 1994. — 30, № 3. — С. 718 – 720.
5. *Cushman – Roisin B.* Exact analytical solution for elliptical vortices of the shallow water equations // *Tellus.* — 1987. — 39A, № 3. — P. 235 – 244.
6. *Young W. R.* Elliptical vortices in shallow water // *J. Fluid Mech.* — 1986. — 171. — P. 101 – 119.
7. *Rogers C.* Elliptic warm – core theory: the pulsrodon // *Phys. Lett.* — A. — 1989. — 138, № 6, 7. — P. 267 – 273.
8. *Rubino A., Brandt P., Hessner K.* Analytical solutions for circular eddies of the reduced-gravity, shallow – water equations // *J. Phys. Oceanogr.* — 1998. — 28, № 5. — P. 999 – 1002.
9. *Доценко С.Ф., Рубино А.* Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* — 2003. — № 2. — С. 158 – 164.
10. *Rubino A., Dotsenko S., Brandt P.* Near-inertial oscillations of geophysical surface frontal currents // *J. Phys. Oceanogr.* — 2003. — 33, № 9. — P. 1990 – 1999.
11. *Доценко С.Ф.* Эволюция начальных возмущений непрерывно стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* — 1984. — 20, № 3. — С. 285 – 294.
12. *Коротаев Г.К.* Нелинейное приспособление тяжелой вращающейся жидкости к равновесию // *Морской гидрофизический журнал.* — 1998. — № 6. — С. 11 – 17.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
Университет Венеции,
Италия

Материал поступил
в редакцию 11.09.03

ABSTRACT A new set of exact analytical solutions describing non-linear axisymmetric oscillations of a surface vortex subjected to the action of stationary radial body force was found within the framework of the reduced-gravity model of the ocean dynamics. The radial velocity of such oscillations is a linear function, and the azimuthal velocity, the vortex thickness and the body force are the polynomials of the radial coordinate with the time-depending coefficients. The method of finding the analytical solution is based on the exact substitution of the original mathematical model for the system of ordinary differential equations and algebraic relations. A new form of vortex motions is a result of non-linear interaction between the lowest mode of oscillations and the geostrophic circulation inside the vortex.