

Численный метод решения уравнения переноса излучения. Основные принципы и формулы

Предлагается новый численный метод решения уравнения переноса излучения. Алгоритм метода работает исключительно в дискретных точках пространства, что дает возможность избежать осциллирующих ошибок по азимуту. При этом для перехода к непрерывному пространству используется процедура кусочно-непрерывной интерполяции. Достоинством метода являются также удобство и простота формул, которые позволяют учесть такие важные эффекты, как эффект внутреннего отражения для гидрооптических задач и эффекты отражения от морской поверхности для задач атмосферной коррекции. Метод может служить основой различных специализированных численных алгоритмов для расчета переноса излучения в океане и атмосфере.

Введение. Характерной чертой процессов распространения света в водной среде является высокая вероятность рассеяния по сравнению с поглощением. Поэтому световое поле в оптически бесконечной среде, какой является море, определяется в основном многократным рассеянием. Цель теории переноса излучения состоит в количественном описании эффектов многократного рассеяния посредством аналитических выражений и численных расчетов. Аналитические методы возможны лишь в простейших случаях и всегда требуют дополнительных численных расчетов. При работе на современных вычислительных средствах применение большинства численных методов позволяет получить величины яркости рассеянного излучения за короткое время счета с точностью, превышающей точность измерений характеристик светового поля в натуральных условиях.

К сожалению, существующие численные алгоритмы имеют собственные недостатки. Например, в методе «сложения» [1, 2] применение формального математического подхода является причиной ошибок осциллирующего характера, а результаты расчетов по методу Монте-Карло [3] требуют дополнительного сглаживания вследствие статистических шумов.

Численный метод, используемый автором не первый год, не имеет вышеупомянутых ошибок, и его относительная погрешность оценивается как 10^{-5} . Метод базируется на следующих принципах и элементах.

1. Принцип «взаимодействия» [4].
2. Расчет параметров светового поля в дискретных точках пространства. Квадратурные формулы и сетка интегрирования.
3. Метод интерполяции из дискретной сетки точек.
4. Выбор начального приближения для коэффициентов отражения и пропуска оптически тонкого слоя.

В данной работе обсуждаются первые три элемента численного метода.

Принцип «взаимодействия» плоскопараллельных слоев. Общий смысл принципа «взаимодействия» состоит в линейности и аддитивности реакции оптической среды и ее составляющих на падающую радиацию [5]. Из принципа «взаимодействия» следуют принципы инвариантности для конечных [6, 7] и бесконечных [8] плоскопараллельных сред, и на его основе построены численные методы решения уравнения переноса, такие как методы «сложения» [2] и «удвоения» [1], метод матричного оператора [9, 10], метод «инвариантного погружения» [11, 12].

Задача теории переноса излучения в проблеме дистанционного зондирования Земли в оптическом диапазоне сводится к расчету свойств отражения и пропускания плоскопараллельных сред. Для описания реакции плоскопараллельного слоя на падающее излучение I определим линейный интегральный оператор

$$\hat{Y}I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \sum_{k=1}^4 y_{ik}(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I_k(\mu', \varphi', \mu_0, \varphi_0) \mu' d\mu', \quad (1)$$

где I_k — вектор-параметр Стокса; $y_{ij}(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ — матрица поляризации, равная либо коэффициенту отражения слоя $R_{ij}(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$, либо коэффициенту пропускания $T_{ij}(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$; $\mu = \cos\theta$ и $\mu_0 = \cos\theta_0$ — косинус зенитного угла падающего и рассеянного света соответственно, φ и φ_0 — соответствующие азимуты. Линейные интегральные операторы \hat{R} и \hat{T} однозначно определяют законы отражения и пропускания однородного слоя для произвольных условий освещения. Для неоднородных слоев следует различать отражение и пропускание слоя при падении света сверху и снизу. Линейные интегральные операторы, описывающие законы отражения или пропускания света вниз, будут обозначаться индексом d , а верх — индексом u . Для оптической системы, состоящей из двух слоев, суммарные операторы \hat{R} и \hat{T} определяются из решения системы линейных уравнений (2), которая с очевидностью следует из рисунка:

$$\hat{R}^u I_0 = I_1 = \hat{R}_1^u I_0 + \hat{T}_1^u I_3, \quad (2a)$$

$$I_3 = \hat{R}_2^u I_2, \quad (2б)$$

$$I_2 = \hat{T}_1^d I_0 + \hat{R}_1^d I_3, \quad (2в)$$

$$\hat{T}^d I_0 = I_4 = \hat{T}_2^d I_2. \quad (2г)$$

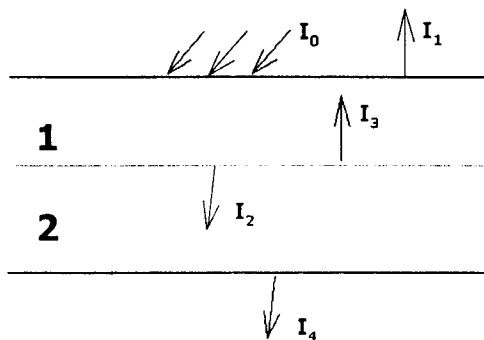


Схема «сложения» плоскопараллельных слоев (1, 2 — номер слоя, I_0 и I_1 — интенсивность падающего и отраженного света соответственно, I_2 и I_3 — интенсивность излучения на границе двух слоев, I_4 — интенсивность пропущенного слоем света)

Интенсивности внутри среды определяются из (2б) и (2в):

$$I_2 = (\widehat{E} - \widehat{R}_1^d \widehat{R}_2^u)^{-1} \widehat{T}_1^d I_0, \quad (3)$$

$$I_3 = R_2^u (\widehat{E} - \widehat{R}_1^d \widehat{R}_2^u)^{-1} \widehat{T}_1^d I_0, \quad (4)$$

где \widehat{E} — единичный, а $()^{-1}$ — обратный операторы. Поэтому отражение и пропускание суммарного слоя есть

$$\widehat{R}^u = \widehat{R}_1^u + \widehat{T}_1^u \widehat{R}_2^d (\widehat{E} - \widehat{R}_1^d \widehat{R}_2^u)^{-1} \widehat{T}_1^d, \quad (5)$$

$$\widehat{T}^d = \widehat{T}_2^d (\widehat{E} - \widehat{R}_1^d \widehat{R}_2^u)^{-1} \widehat{T}_1^d. \quad (6)$$

Аналогично для освещения снизу получим

$$\widehat{R}^d = \widehat{R}_2^d + \widehat{T}_2^d \widehat{R}_1^u (\widehat{E} - \widehat{R}_2^u \widehat{R}_1^d)^{-1} \widehat{T}_2^u, \quad (7)$$

$$\widehat{T}^u = \widehat{T}_1^u (\widehat{E} - \widehat{R}_2^u \widehat{R}_1^d)^{-1} \widehat{T}_2^u. \quad (8)$$

Заметим, что

$$\widehat{R}_1 (\widehat{E} - \widehat{R}_2 \widehat{R}_1)^{-1} = (\widehat{E} - \widehat{R}_1 \widehat{R}_2)^{-1} \widehat{R}_1. \quad (9)$$

Это становится очевидным, если представить обратный оператор в виде бесконечной суммы

$$(\widehat{E} - \widehat{R}_1 \widehat{R}_2)^{-1} = \widehat{E} + \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 + \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 + \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 \widehat{R}_1 \widehat{R}_2 + \dots \quad (10)$$

Формула (10) используется в алгоритме метода «сложения».

Разбив плоскопараллельную среду на слои, можно учитывать вертикальную неоднородность (метод «сложения»). Для однородных сред, «складывая» слои одинаковой толщины, можно быстро получить характеристики оптически плотной среды (метод «удвоения»). Приведенная схема применима для расчета яркости внутри среды по формулам (3), (4) и для учета граничных условий.

Формулы «сложения» в матричном виде. Расчет по формулам (1) – (9) возможен как в дискретных точках пространства, так и для коэффициентов разложения по ортогональным сферическим функциям. Проблема использования сферических функций заключается в следующем:

— для описания реальных морских индикатрис рассеяния требуется около 1000 членов ряда;

— решение уравнения переноса выражается в виде бесконечного ряда, даже в случае простых аналитических индикатрис рассеяния.

Дальнейшие выкладки приведены для дискретного представления.

Если определить коэффициенты отражения $r_{i,j}$ и пропускания $l_{i,j}$ в точках $\Omega_i = (\mu, \varphi)$, то на языке матриц операция интегрирования по углам будет эквивалентна произведению матриц

$$\widehat{L}_{i,k} Y_{k,l} = X_{i,j} N_{j,k} Y_{k,l}, \quad (11)$$

где $N_{j,k}$ — диагональная матрица с элементами $N_{j,j} = 2\mu_j V(\mu_j, \varphi_k)$. Умножение на матрицу $N_{j,j}$ есть интегрирование по квадратурной формуле с определенным заранее набором точек интегрирования μ_i, φ_k и весовых коэффициентов $V(\mu_i, \varphi_k)$. Аналогом единичного оператора будет диагональная матрица $E_{i,j} = N_{i,j}^{-1}$ с элементами $E_{i,i} = (2\mu_i V)^{-1}$, а обратного оператора следующая матрица:

$$(\widehat{X}_{i,j})^{-1} = E_{i,k} X_{k,l}^{-1} E_{l,j}, \quad (12)$$

где X^{-1} — обратная матрица. Следовательно, формулы (5) – (8) в матричном представлении переписутся в виде

$$R^u = R_1^u + T_1^u N R_2^u (E - R_1^d N R_2^u)^{-1} T_1^d, \quad (13)$$

$$T^d = T_2^d (E - R_1^d N R_2^u)^{-1} T_1^d, \quad (14)$$

$$R^d = R_2^d + T_2^d N R_1^d (E - R_2^u N R_1^d)^{-1} T_2^u, \quad (15)$$

$$T^u = T_1^u (E - R_2^u N R_1^d)^{-1} T_2^u. \quad (16)$$

Таким образом, задача сводится к стандартным операциям линейной алгебры — сложению, умножению матриц и нахождению обратной матрицы. Для реализации численной схемы необходимо задать сетку и веса интегрирования. Чандрасекаром [8] для интегрирования по зенитному углу было предложено использовать квадратурную формулу Гаусса. Если в интервале $[-1 \dots +1]$ задать $2n$ точек μ_i , являющихся корнями P_{2n} — полинома Лежандра степени $2n$, то данный способ интегрирования по точкам

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \approx \sum_{i=1}^{2n} a_i f(\mu_i) \quad (17)$$

будет оптимальным для заданного числа точек $2n$. Значения соответствующих весов a_i определяются выражением

$$a_i = \frac{1}{\frac{dP_{2n}(\mu_i)}{d\mu}} \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(\mu)}{\mu - \mu_i} d\mu. \quad (18)$$

Аналогично для интегрирования по азимуту точки интегрирования есть корни уравнения

$$\sin n_\varphi \varphi = 0, \quad (19)$$

что приводит к равномерной по азимуту сетке с равными весовыми коэффициентами.

Громоздкость численной схемы, заключающаяся в алгебраических преобразованиях матриц размером $(n_\mu n_\varphi) \times (n_\mu n_\varphi)$ (а при рассмотрении эффектов поляризации в 16 раз больше), устраняется посредством дискретного Фурье преобразования [13].

Фурье преобразование в дискретном представлении. В среде с осевой симметрией рассеяние зависит не от значений азимутальных углов в отдельности, а от их разности. Матрицы коэффициентов отражения и пропускания как функции азимута записываются в виде

$$R, T(\varphi_1\varphi_2) = f(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20)$$

Первые две компоненты вектор-параметра Стокса I и Q , характеризующие сумму и разность интенсивностей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, являются четными функциями азимута:

$$f(-\varphi) = f(\varphi), \quad (21a)$$

$$f(\pi + \varphi) = f(\pi - \varphi). \quad (21b)$$

Для определения положения плоскости поляризации и степени эллиптичности используются еще два параметра U и V , которые в случае изотропных частиц имеют антисимметричную зависимость от азимута:

$$f(-\varphi) = -f(\varphi), \quad (22a)$$

$$f(\pi + \varphi) = -f(\pi - \varphi). \quad (22b)$$

С учетом свойств симметрии (21), (22) матрицы коэффициентов отражения и пропускания для поляризованного света имеют вид

$$R, T = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & A_{13} & A_{14} \\ S_{21} & S_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & S_{33} & S_{34} \\ A_{41} & A_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix},$$

где S_{kl} — азимутально-симметричные, A_{kl} — антисимметричные матрицы.

Законы симметрии (21), (22) позволяют каждой матрице размером $n_\varphi \times n_\varphi$ сопоставить вектор b размером n_φ . Для произвольного числа точек по азимуту n_φ в интервале от 0 до 2π матрица со свойствами (21) записывается как

$$S_{ij} = b_{|i-j|+1}, \quad i=1, n_\varphi, \quad (23)$$

причем

$$b_{n-i+2} = b_i. \quad (24)$$

Линейное преобразование

$$R = F^{-1}SF \quad (25)$$

приводит матрицу S к диагональному виду, где F — матрица, столбцы которой составлены из собственных функций матрицы S . При этом матрица R — диагональная, с элементами, равными собственным значениям. Преобразование (25) с помощью символа Кронекера тривиально обобщается для случая поляризационных матриц. Для вида симметрии (21), (22), собственными функциями являются

$$1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \dots, \sin k\varphi, \cos k\varphi. \quad (26)$$

С учетом ортогональности этих функций обратная матрица записывается в виде

$$F^{-1} = d_{ij} F^T, \quad (27)$$

где верхний индекс T означает операцию транспонирования; d_{ij} — нормированная диагональная матрица с коэффициентами, равными $2/n_\varphi$ для $i \neq 1$ и $i \neq n_\varphi$, если n_φ — четно. В противном случае $d_{i,i} = 1/n_\varphi$. Ненулевые элементы диагональной матрицы вида R равны:

$$R_{1,1} = \sum_{i=1}^N b_i, \quad (28)$$

$$R_{2k-2,2k-2} = R_{2k-1,2k-1} = \sum_{i=1}^N b_i \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{N}(k-1)\right), \quad k > 1. \quad (29)$$

Если применить преобразование (25) к антисимметричной матрице со свойствами (22), то получим матрицу, диагональные элементы которой развернуты на 90° , причем ненулевые элементы равны:

$$R_{2k-2,2k-1} = -R_{2k-1,2k-2} = \sum_{i=1}^N b_i \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{N}(k-1)\right), \quad k = 2, n_\varphi/2. \quad (30)$$

Окончательно имеем два типа матриц (вида D — диагональная и вида N — недиагональная) со следующими групповыми свойствами:

$$D_1 D_2 = D_3, \quad (31a)$$

$$N_1 N_2 = D, \quad (31б)$$

$$D N_1 = N_2, \quad (31в)$$

$$N_1 D = N_2. \quad (31г)$$

Заметим, что формальные алгебраические операции над матрицами типа N такие же, как если бы они имели тип D .

Как видно из (29) и (30), процедура нахождения ненулевых элементов матриц аналогична Фурье разложению. Одно из отличий состоит в том, что такое эквивалентное преобразование в предлагаемом методе всего лишь формальное математическое средство, предназначенное для облегчения дальнейших расчетов. Другое состоит в различной интерпретации Фурье разложения. Так в методе «сложения» коэффициенты находятся интегрированием, а в излагаемом методе — суммированием.

Преимущества дискретного представления следующие:

— излучение, рассеянное один раз, будет учитываться без ошибок, так как в приближение однократного рассеяния индикатриса входит в явном виде;

— процедура суммирования более простая и быстрая, ее проще реализовать на компьютере и оптимизировать вычисления.

Заметим, что коэффициенты дискретного Фурье разложения учитывают также и частоты $nj \pm k$, где $j = (1, 2, \dots)$, поэтому если эти частоты существуют в индикатрисе, то интегрирование по азимуту по точкам будет неточным. Поскольку причина этого состоит в большой вытянутости индикатрисы рассеяния, коррекцию следует проводить за счет рассеяния на малые углы.

Особенности интерполяции из дискретных точек пространства. Основное отличие между предложенным методом и методом «сложения» заключается в подходе к Фурье разложению уравнения переноса. В методе «сложения» численное решение выражается через Фурье ряд, т. е. как непрерывная функция азимута. Для этого уравнение переноса разлагается по Фурье на первом шаге алгоритма. Следует отметить, что стандартный метод «сложения» «бoitся» сингулярности, и поэтому прямое излучение в матрице пропускания выделено как отдельный член. В результате: 1) формулы «сложения» отличаются от формул (5) – (8); 2) обратная матрица определяется по формуле (10).

В данном методе рассчитываются величины рассеяния в точках квадратуры, а при переходе к непрерывным функциям используется процедура интерполяции. Эта процедура должна строиться на основе интерполяционной гипотезы о поведении решения.

Если для любой точки пространства при интерполяции использовать все рассчитанные значения яркости в дискретных точках, то результат такой интерполяции должен совпасть с результатом метода «сложения». Так, для молекулярной атмосферы Фурье ряд обрывается на $\cos(2\varphi)$, и трех точек в интервале $[0 \dots \pi]$ для интерполяции будет достаточно. При этом интерполяционная функция должна быть построена из функций $1, \cos(\varphi), \cos(2\varphi)$, т. е. она будет полиномом второй степени от косинуса азимута. Аналогично для любого конечного Фурье разложения можно построить интерполяционный полином. Для реальных индикатрис конечное разложение на сферические функции является аппроксимацией. Поэтому при решении уравнения переноса методом «сложения» появляются ошибки, имеющие вид осцилляций по азимуту. Причина таких осцилляций обусловлена тем фактом, что реальные индикатрисы рассеяния, особенно морские, аппроксимируются слишком длинным рядом разложения по сферическим функциям. Это, с одной стороны, связано с большой вытянутостью индикатрисы. Например, типичная морская индикатриса изменяется на 4 – 5 порядков. С другой стороны, коэффициент яркости моря слабо зависит от угла визирования. Только в углах, соответствующих строго обратному рассеянию, наблюдается заметное увеличение яркости. Такое увеличение обусловлено особенностями обратного рассеяния и никак не связано с переносом излучения, рассеянного в малые углы. Значит, точность решения в нашем случае будет определяться точностью аппроксимации задней части индикатрисы. Если угловые особенности индикатрисы не «проваливаются» под сетку, то в окрестности этих особенностей используется интерполяция по двум точкам. В остальных углах полином второй или третьей степени обеспечивает высокую точность расчетов.

Аппроксимация кусочно-непрерывными функциями более предпочтительна хотя бы потому, что разложение на сферические функции оптимально

только в интегральном смысле. Так, для морских индикатрис с увеличением числа членов Фурье разложения максимальная ошибка не будет уменьшаться при N порядка 30, а с увеличением числа точек сетки ошибка процедуры даже линейной интерполяции оценивается как N^{-2} . Более высокую точность метода интерполяции можно объяснить тем, что высокие частоты в поле рассеянной назад радиации оказываются скомпенсированными, так что функция становится гладкой. Заметим, что при пассивном дистанционном зондировании с борта судна измерения коэффициента яркости в области углов, соответствующих рассеянию на 180° , вследствие тени от прибора не производятся. Поэтому в приложении численных результатов к задаче дистанционного зондирования метод кусочно-непрерывной интерполяции обеспечит высокую точность решения прямой задачи теории переноса излучения.

Заключение. Приведенные формулы и принципы могут служить основой различных специализированных численных алгоритмов для расчета переноса излучения в океане и атмосфере. Удобство и простота формул позволяют вместе с тем учесть такие важные эффекты, как эффект внутреннего отражения для гидрооптических задач и эффекты отражения от морской поверхности для задач атмосферной коррекции.

Изложенный метод не имеет проблем, связанных с сингулярностью граничных условий. Быстродействие метода превышает быстродействие классического метода «сложения». Кроме того, численное решение, в отличие от метода «сложения», не имеет характерной осциллирующей по азимуту ошибки. Скорость расчета линейно зависит от числа азимутальных точек, а от числа точек по зенитному углу — по кубическому закону. Погрешность расчета непрерывного поля рассеянного излучения зависит от процедуры интерполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hansen H. E. Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. Part I: The Doubling Method // *J. Atmos. Sci.* — 1971. — 28. — P. 120 – 125.
2. Takashima T. A. New approach of the adding method for computations of emergent radiation of an inhomogeneous plane parallel atmosphere // *Astrophys. Spa. Sci.* — 1975. — 36. — P. 319 – 328.
3. Plass G.N., Kattawar G.W. Radiance and polarization of the Earth's atmosphere with haze and clouds // *J. Atm. Sci.* — 1971. — 28. — P. 1187 – 1198.
4. Preisendorfer R. W. Radiative Transfer on Discrete Spaces. — New York: Pergamon Press Inc., 1965. — 461 p.
5. Preisendorfer R.W. Hydrologic Optics V. II. — Hawaii, Honolulu: U.S. Dep. Comm., NOAA, Environ. Res. Lab., Pacif. Mar. Environ. Lab., 1976. — P. 188 – 400.
6. Амбарцумян В.А. О рассеянии света атмосферами планет // *Астрофизический журнал.* — 1942. — 19, № 5.
7. Амбарцумян В.А. Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде // *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* — 1942. — 27, № 3.
8. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — 431 с.
9. Plass G.N., Kattawar G.W., Catchings F.E. Matrix operator theory of radiative transfer: I. Rayleigh scattering // *Appl. Opt.* — 1973. — 12. — P. 314 – 329.
10. Kattawar G.W., Plass G.N., Catchings F.E. Matrix operator theory: II. Scattering for maritime haze // *Ibid.* — P. 1071 – 1084.
11. Preisendorfer R.W. Generalized invariant imbedding relation // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1961. — 47. — C. 591.

12. *Mobley C. D.* Light and water: Radiative transfer in natural waters. — San Diego: Academic, 1994. — 592 p.
13. *Shybanov E.B.* Numerical method of the radiative transfer equation solution in the plane parallel media // Proc. Int. Conf. «Current Problems in Optics of Natural Waters». — St.-Petersburg. — 2001. — P. 283 – 289.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 04.11.03
После доработки 28.11.03

ABSTRACT New numerical method for solving the radiation transfer equation is proposed. In order to avoid the oscillation errors on the azimuth, the represented method operates exclusively in the space discrete points. The method of piecewise-polynomial interpolation is used to get a numerical solution for the whole space. The advantage of the method also consists in convenience and simplicity that permits to take into account such important effects as the effect of internal reflection for hydrooptical problems and the effects of sea surface reflection for the problems of the atmospheric correction. The method can be a foundation for elaborating various specific numerical algorithms to calculate the radiation transfer in the ocean and the atmosphere.