

## **Численный метод решения уравнения переноса излучения. Коэффициенты отражения и пропускания оптически тонкого плоскопараллельного слоя**

Рассматривается задача выбора начального приближения для коэффициентов отражения и пропускания в численных методах, основанных на принципе «взаимодействия». Показаны недостатки приближения однократного рассеяния и проанализированы закономерности распространения света в средах с сильно анизотропным рассеянием. Предложены полуаналитические выражения для расчета начального приближения, позволяющие в рамках алгоритма «сложения» слоев рассчитывать характеристики светового поля в плоскопараллельных средах с относительной погрешностью  $\sim 10^{-5}$ .

Информация о спектрально-угловых характеристиках светового поля используется для оценок биофизического состояния водных экосистем. Излучение, регистрируемое оптическим датчиком, является результатом рассеяния и поглощения света веществами, содержащимися в воде. Для описания взаимосвязи интенсивности рассеяния света в данном направлении с поглощающими и рассеивающими свойствами вещества применяется уравнение переноса излучения. Численные методы его решения позволяют учесть основные особенности трансформации излучения в системе океан — атмосфера и решить уравнение переноса излучения для реальных условий освещения и индикатрис рассеяния.

Численный метод расчета уравнения переноса радиации в океане, лежащий в основе авторского алгоритма, близок по идеологии к методам «сложения» и «удвоения» [1, 2] и матричного оператора [3]. Несмотря на то что впервые эти методы были опубликованы около 30 лет назад, они применялись только в оптике атмосферы. С широким распространением персональных компьютеров и в связи с увеличением точности выполнения операций с плавающей точкой появилась возможность для реализации ранее нестабильных численных схем. Тем не менее до сих пор на Западе основными методами численного решения уравнения переноса в море считаются метод Монте-Карло и метод инвариантного погружения [4].

Несомненно, каждый метод имеет собственные недостатки, но сам факт существования и широкого распространения метода Монте-Карло есть свидетельство неблагополучия других методов. Заметим, что метод инвариантного погружения основан на принципе инвариантности, а метод матричного оператора и методы «сложения» и «удвоения» — на принципе «взаимодействия» [5], из которого следуют принципы инвариантности. Принципы инвариантности позволили получить аналитические выражения для коэффициентов отражения в случае простых индикатрис рассеяния [6, 7]. Однако численный алгоритм не является последовательностью эквивалентных преобразований

и, по мнению автора, основная проблема вышеуказанных методов есть проблема решения уравнения переноса для тонкого слоя с *достаточной* точностью. Обоснование критерия точности и разработка метода решения уравнения переноса для оптически тонкого слоя с произвольной индикатрисой рассеяния является целью данной работы.

### Условие сходимости численного алгоритма

В методах «сложения» и матричного оператора, основанных на принципе «взаимодействия», предполагается, что коэффициенты отражения  $R_0$  и пропускания  $T_0$  однородного оптически тонкого плоскопараллельного слоя известны с большой точностью. Для расчета коэффициентов слоя произвольной оптической толщины используется рекуррентная процедура удвоения:

$$R_n = R_{n-1} + T_{n-1}R_{n-1}(E - R_{n-1}R_{n-1})^{-1}T_{n-1}, \quad (1)$$

$$T_n = T_{n-1}(E - R_{n-1}R_{n-1})^{-1}T_{n-1}. \quad (2)$$

Индекс  $n$  относится к характеристикам слоя с удвоенной по сравнению с предыдущим слоем оптической толщиной. Если оптическая толщина начального слоя равна  $\tau_0$ , а  $R_0$  и  $T_0$  заданы, то после  $n$  шагов будут известны функции  $R_n$  и  $T_n$  для однородного слоя с оптической толщиной, равной  $\tau = \tau_0 2^n$ . Строго говоря, все переменные в формулах (1), (2) являются операторами, причем  $E$  — единичный оператор, а  $( )^{-1}$  — обратный. Без учета поляризационных эффектов линейные интегральные операторы  $R_i$  и  $T_i$  записываются в виде:

$$\hat{Y}I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 y(\mu, \varphi, \mu', \varphi') I(\mu', \varphi', \mu_0, \varphi_0) \mu' d\mu' \quad (3)$$

с ядром  $y(\mu, \varphi, \mu', \varphi')$ , равным коэффициенту отражения

$$r(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0) = \pi \frac{I^-(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)}{\mu_0 I_0} \quad (4)$$

или коэффициенту пропускания

$$t(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0) = \pi \frac{I^+(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)}{\mu_0 I_0}. \quad (5)$$

В силу линейности уравнения переноса коэффициенты  $r(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)$  и  $t(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)$  не зависят от интенсивности падающего света  $I_0$  и являются функциями косинусов зенитных углов падения —  $\theta_0$  и рассеяния —  $\theta$  света, а также разности азимутов  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ . Смысл процедуры удвоения состоит в том, что для коэффициентов отражения и пропускания *достаточно* тонкого слоя можно использовать приближенные решения уравнения переноса. Очевидно, что с вычислительной точки зрения начальное приближение должно быть простым.

Для оптически тонких слоев  $T \approx E$ , а  $R_n \approx 2R_{n-1}$ . Следовательно, относительная ошибка расчета определяется относительной ошибкой начального приближения. Поэтому естественным требованием, предъявляемым к по-

грешности начального приближения, будет стремление к нулю относительной ошибки при уменьшении оптической толщины:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau_0 \rightarrow 0. \quad (6)$$

Заметим, что условие (6) является необходимым, но не достаточным вследствие неизбежных ошибок округления.

В пределе малых оптических толщин ( $\tau \ll \mu = \cos(\theta)$ ) решение уравнения переноса стремится к величине  $\frac{p(\cos(\gamma))\tau}{4\pi\mu}$ , где  $p(\cos(\gamma))$  — индикатриса

са рассеяния света на угол  $\gamma = \arccos(\mu\mu_0 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_0^2}\cos\Delta\varphi)$ . Поэтому среди приближенных решений возможны лишь те, в выражениях которых содержится индикатриса рассеяния в явном виде. Метод последовательных кратностей рассеяния удовлетворяет вышеупомянутому требованию. Остается выяснить, какую кратность рассеяния достаточно учесть, чтобы обеспечить сходимость алгоритма.

### Метод последовательных кратностей

Метод основан на последовательном вычислении  $n$ -кратного рассеяния, как правило, после предварительного Фурье-разложения по азимуту. (Фурье-компоненты коэффициентов отражения и пропускания будут обозначаться большими латинскими буквами  $R$ ,  $T$  без указания индекса компоненты. Индексы будут характеризовать кратность рассеяния). Если известно решение уравнения переноса для  $n$ -кратного рассеяния  $I_n(\tau, \mu, \mu_0)$ , где  $\tau$  — оптическая толщина,  $\mu$ ,  $\mu_0$  — косинусы угла визирования и угла падения света, то интенсивность следующей кратности —  $I_{n+1}(\tau, \mu, \mu_0)$  — находится интегрированием вдоль направления визирования функции источника  $J_n(\tau, \mu, \mu_0)$ :

$$I_{n+1}(\tau, \mu, \mu_0) = \frac{1}{|\mu|} \int_{0, \tau}^{\tau, \tau_0} J_{n+1}(\tau, \mu, \mu_0) \exp\left(-\frac{|\tau - y|}{|\mu|}\right) dy. \quad (7)$$

В зависимости от направления визирования пределы интегрирования меняются либо от 0 до  $\tau$ , либо от  $\tau$  до  $\tau_0$ . Функция источника выражается через интеграл по зенитному углу:

$$J_{n+1}(\tau, \mu, \mu_0) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu_1) I_n(\tau, \mu_1, \mu_0) d\mu_1, \quad (8)$$

где  $\omega$  — вероятность выживания фотона,  $p(\mu, \mu_1)$  — индикатриса рассеяния. Интенсивность многократно рассеянного света  $I(\tau, \mu, \mu_0)$  есть сумма всех кратностей рассеяния, но ее удобнее записать в виде

$$I_n(\tau, \mu, \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n I_n^*(\tau, \mu, \mu_0), \quad (9)$$

где  $I_n^*(\tau, \mu, \mu_0)$  — интенсивность  $n$ -й кратности при консервативном рассеянии, то есть в отсутствие поглощения.

Интенсивность нулевой кратности есть закон Бугера — Ламберта

$$I_0 = S_0 \delta(\mu - \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right),$$

где  $S_0$  — облученность единицы площади при нормальном падении луча. Если оптическая толщина  $\tau$  отсчитывается от верхней границы, а оптическая толщина всего слоя есть  $\tau_0$ , то интенсивность однократно рассеянного света выражается формулами

$$I_1(\mu_0, \mu) = \frac{\mu_0 S_0 p(\mu_0, \mu)}{4\pi(\mu_0 - \mu)} \left[ \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \right], \quad (10)$$

$$I_1(\mu_0, -\mu) = \frac{\mu_0 S_0 p(\mu_0, -\mu)}{4\pi(\mu_0 + \mu)} \left[ \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) - \exp\left(-\frac{\tau_0}{\mu_0} - \frac{(\tau_0 - \tau)}{\mu}\right) \right], \quad (11)$$

где  $\mu = |\cos\theta|$ .

В формулы для двукратно рассеянного излучения формально входят двойные интегралы, поэтому нижеприведенные аналитические выражения в литературе автору не встречались. В первую очередь нас интересует решение на границе, то есть отражение и пропускание плоскопараллельного слоя. Объединим формулы (7), (8) в одну, поменяем порядок интегрирования и проинтегрируем по оптической толщине. В результате задача расчета двукратно рассеяния сведется к интегрированию только по зенитному углу. Перейдем к нормированным характеристикам излучения — к коэффициентам отражения и пропускания (формулы (4), (5) соответственно) — и введем обозначения.

Для упрощения окончательности выражений введем коэффициенты отражения и пропускания непоглощающего слоя толщиной  $\tau$  с изотропной индикатрисой рассеяния в однократном приближении:

$$R_1^i(\mu_0, \mu) = \frac{1}{4(\mu_0 + \mu)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0} - \frac{\tau}{\mu}\right) \right], \quad (12)$$

$$T_1^i(\mu_0, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{4(\mu_0 - \mu)} \left[ \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \right], & \mu_0 \neq \mu, \\ \frac{\tau}{4\mu_0\mu} \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right), & \mu_0 = \mu. \end{cases} \quad (13)$$

В результате интегрирования по  $\tau$  рассеяние второго порядка записывается следующим образом:

$$R_2(\mu_0, \mu) = \int_0^1 \frac{p_b(\mu_0, \mu_1) p_f(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 + \mu_1)} \left[ \mu_0 R_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) T_1^i(\mu_1, \mu) \right] \partial \mu_1 + \\ + \int_0^1 \frac{p_f(\mu_0, \mu_1) p_b(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 - \mu_1)} \left[ \mu_0 R_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 R_1^i(\mu_1, \mu) \right] \partial \mu_1, \quad (14)$$

$$T_2(\mu_0, \mu) = \int_0^1 \frac{P_b(\mu_0, \mu_1) P_b(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 + \mu_1)} \left[ \mu_0 T_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) R_1^i(\mu_1, \mu) \right] \partial \mu_1 + \int_0^1 \frac{P_f(\mu_0, \mu_1) P_f(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 - \mu_1)} \left[ \mu_0 T_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 T_1^i(\mu_1, \mu) \right] \partial \mu_1 \quad (15)$$

с устранимыми особенностями при  $\mu_1 = \mu_0$  и  $\mu_1 = \mu_0 = \mu$ :

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_0} \frac{\mu_0 R_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 R_1^i(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 - \mu_1)} = \frac{\mu R_1^i(\mu_0, \mu) - \mu T_1^i(\mu_0, \mu_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)}{2(\mu + \mu_0)}, \quad (16)$$

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_0} \frac{\mu_0 T_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_1 T_1^i(\mu_1, \mu)}{2(\mu_0 - \mu_1)} = \frac{\mu T_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_0 T_1^i(\mu_0, \mu_0)}{2(\mu - \mu_0)}, \quad (17)$$

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_0 \rightarrow \mu} \frac{\mu T_1^i(\mu_0, \mu) - \mu_0 T_1^i(\mu_0, \mu_0)}{2(\mu - \mu_0)} = \frac{\tau^2}{16\mu^3} \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right). \quad (18)$$

Формулы (14) — (18) справедливы для всех Фурье-компонент  $R$ ,  $T$ .

### Метод учета высоких кратностей рассеяния

Перед тем как перейти к дальнейшим выкладкам, следует сделать некоторые замечания. Во-первых, для учета рассеяния большей кратности в рамках метода последовательных кратностей рассеяния требуется (естественно, после предварительного аналитического интегрирования) вычислять двойные интегралы по углу, что становится невыгодным с численной точки зрения. Во-вторых, численные методы «сложения» и матричного оператора рассчитывают функции рассеяния в оптимально выбранных точках пространства. Решение уравнения переноса не выражается в виде конечного степенного ряда. Следовательно, в дискретных точках даже точные формулы рассеяния не будут удовлетворять уравнениям (1), (2). В основном данное замечание касается конечного представления реальных индикатрис рассеяния, для описания которых требуется более 1 000 членов разложения по полиномам Лежандра или квадратурная формула соответствующей длины. Дополнительную сложность составляет описание поведения решения в окрестности  $\mu = 0$ , например при анализе угловой структуры рассеяния оптически тонких слоев. Поэтому следует предусмотреть дополнительные нормировочные процедуры.

1. При численном интегрировании условие нормировки индикатрисы рассеяния  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\mu_0, \mu) \partial \mu = 1$  должно выполняться строго для всех  $\mu_0$ .

2. В отсутствие поглощения (при  $\omega = 1$ ) отражение и пропускание плоскопараллельного слоя должно удовлетворять интегралу потока [8]:

$$2 \int_0^1 [R + T] \mu d\mu = 1,$$

где  $T$  — полное пропускание, равное  $T = T_d + \frac{1}{2\mu} \delta(\mu - \mu_0) \exp(-\frac{\tau}{\mu})$ .

Предлагаемый метод учета рассеяния больших кратностей состоит в следующем. Для всех углов падения рассчитаем величину потерь потока, нормированную на  $\mu_0$ :

$$\delta\Psi(\mu_0) = 1 - \exp(-\frac{\tau}{\mu_0}) - 2 \int_0^1 [R_1 + T_{d1}] \mu d\mu - 2 \int_0^1 [R_2 + T_{d2}] \mu d\mu. \quad (19)$$

С другой стороны, эта величина равна

$$\delta\Psi(\mu_0) = 2 \int_0^1 [R_3 + T_{d3}] \mu d\mu, \quad (20)$$

где  $R_3, T_{d3}$  — коэффициенты отражения и пропускания света, рассеянного три и более раз. В соответствии с принципом взаимности коэффициенты  $R$  и  $T$  для однородного слоя симметричны относительно  $\mu_0$  и  $\mu$ . Одним из простых и удобных симметричных представлений является следующий вид:

$$R_3 = \frac{\delta\Psi(\mu_0) \delta\Psi(\mu)}{F_r}, \quad (21)$$

$$T_{d3} = \frac{\delta\Psi(\mu_0) \delta\Psi(\mu)}{F_t}. \quad (22)$$

В случае симметричных индикатрис ( $p(\mu) = p(-\mu)$ ) с большой точностью  $R_3 = T_{d3}$ , тогда нормировочный коэффициент  $F_r = F_t$  находим подстановкой (21), (22) в (20). Для вытянутых индикатрис в пределе при  $\tau \rightarrow 0$  приближение  $R_3 = T_{d3}$  для трех- и более кратного рассеяния также оказывается правомерным, что обусловлено геометрическим свойством плоскопараллельных слоев. А именно, для любой малой величины  $\tau$  и произвольного положительного числа  $L$  существует такое направление луча  $\mu = \cos(\theta)$ , что оптическая длина пути  $\tau / \mu > L$ . Поэтому в направлениях при  $\mu$ , близких к нулю, интенсивность света, рассеянного  $n$  раз, наибольшая, как и погрешность приближения  $n$ -кратного рассеяния. Интенсивность двукратного рассеяния внутри слоя  $I_2$  входит в выражение (8) для функции источника трехкратного рассеяния. Поскольку при малых  $\tau$  интенсивность  $I_2$  в окрестности малых  $\mu$  растет с уменьшением  $\mu$ , а также вследствие непрерывности индикатрисы рассеяния функция источника в пределе  $\tau \rightarrow 0$  стремится к симметричной при малых  $\mu$ .

Для слоев конечной оптической толщины точность приближения  $R_3 = T_3$  будет определяться степенью вытянутости индикатрисы рассеяния. Другое допущение касается вида выражений (21), (22). Хотя такой вид функций коэффициентов отражения и пропускания является приближенным, он был использован в [9] при выводе аналитических выражений для коэффициентов отражения и пропускания непоглощающего плоскопараллельного слоя про-

извольной оптической толщины. Показано, что в случае изотропного рассеяния следующее приближенное выражение обладает высокой точностью:

$$R = T = \frac{[1 - \exp(-\tau/\mu_0)][1 - \exp(-\tau/\mu)]}{4(0,5 - E_3(\tau))},$$

где  $E_3(x) = \int_1^{\infty} y^{-3} \exp(-xy) dy$  — интегральная показательная функция.

Альтернативный способ нормировки потока заключается в процедуре включения дефицита потока в нерассеянный свет:

$$\Delta T(\mu_0, \mu) = \omega^3 \frac{\delta\Psi(\mu_0)}{F} \delta(\mu_0 - \mu). \quad (23)$$

На первый взгляд, такой способ нормировки потока выглядит более естественным для сильно вытянутых индикатрис.

Окончательно начальное приближение записывается в виде:

$$R(\mu_0, \mu) = \omega R_1(\mu_0, \mu) + \omega^2 R_2(\mu_0, \mu) + \omega^3 \frac{\delta\Psi(\mu_0)\delta\Psi(\mu)}{F}, \quad (24)$$

$$T(\mu_0, \mu) = \omega T_1(\mu_0, \mu) + \omega^2 T_2(\mu_0, \mu) + \omega^3 \frac{\delta\Psi(\mu_0)\delta\Psi(\mu)}{F}. \quad (25)$$

Формулы (24), (25) предназначены для расчета азимутально осредненных величин. Для других коэффициентов Фурье-разложения, по-видимому, достаточно точности приближения двукратного рассеяния вследствие уменьшения азимутальной зависимости при многократном рассеянии. Математически это следует из того, что значение интеграла

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\mu_0, \mu, \varphi) \cos(n_f \varphi) d\varphi d\mu < 1, \text{ если } n_f > 0.$$

В табл. 1 приведены результаты тестирования начальных приближений для расчета коэффициентов отражения однородного полубесконечного плоскопараллельного слоя методом удвоения при различных индикатрисах рассеяния [10, 11]. Коэффициент отражения  $r(\mu_i, \mu_j)$  рассчитывался для матрицы  $32 \times 32$ . В качестве критерия точности использовалось условие

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{r(\mu_N, \mu_k)}{r_p(\mu_N, \mu_k)} - 1 \right)^2} < 10^{-6}, \quad (26)$$

где  $\mu_N$  близко к единице. Матрица  $r_p(\mu_i, \mu_j)$  рассчитана методом удвоения, начиная с  $\tau = 10^5$ , причем в качестве начального приближения было использовано приближение двукратного рассеяния.

**Значения начальной оптической толщины приближенных решений, необходимых для расчета коэффициента яркости однородного слоя со средней относительной погрешностью менее  $10^{-6}$**

Индикатриса рассеяния	Вероятность рассеяния назад	Оптическая толщина слоя	Вероятность выживания фотона	Начальная толщина слоя, приближение			
				однократное	двукратное	двукратное с нормировкой	
						формула (23)	формулы (24), (25)
Рэлеевская	0,5	0,25	1	$2^{-23}$	$2^{-13}$	$2^{-13}$	$2^{-6}$
Дымки $L, H$ Дейрменджана, $\lambda = 500$ нм	0,096 0,080	0,25	1	$2^{-24}$	$2^{-13}$	$2^{-13}$	$2^{-10}$
Хеньи — Гринштейна, $g = 0,8$ [10]	0,051	0,5	1	$2^{-24}$	$2^{-14}$	$2^{-13}$	$2^{-11}$
Петцольда, $p(\gamma)$ № 8 [11]	0,014	2,0	0,906	$2^{-26}$	$2^{-16}$	$2^{-14}$	$2^{-12}$
Петцольда, $p(\gamma)$ № 4	0,014	2,0	0,585	$2^{-24}$	$2^{-15}$	$2^{-14}$	$2^{-12}$
Петцольда, $p(\gamma)$ № 2	0,044	2,0	0,247	$2^{-22}$	$2^{-13}$	$2^{-13}$	$2^{-11}$

Как и ожидалось, в приближении однократного рассеяния начальная оптическая толщина слоя должна быть достаточно малой, даже при малых вероятностях выживания фотона. Дополнительным недостатком этого приближения является его ограниченная точность при  $\tau > 10^{-8}$ , в то время как при  $\tau < 10^{-8}$  численная схема начинает расходиться вследствие ошибок округления. Существенно лучшим является приближение двукратного рассеяния. Кроме большей точности по сравнению с приближением однократного рассеяния, оно позволяет уменьшить число удвоений приблизительно на 10. Приближения с нормировкой потока еще эффективнее. В отличие от приближения двукратного рассеяния дополнительное число операций в этих приближениях незначительно. Интересно отметить, что даже для морских индикатрис формулы (21), (22), при  $F_r = F_t$  предпочтительнее, чем (23). Это свидетельствует о том, что основной вклад в рассеяние большой кратности для оптически тонких слоев вносят лучи, перерассеянные через зенитные углы, близкие к  $90^\circ$ . По мере увеличения вытянутости индикатрисы рассеяния наблюдается общая тенденция всех приближений — требуемые начальные значения оптической толщины уменьшаются. Естественно, эффект поглощения работает в обратном направлении. Снижение точности приближения  $n$ -кратного рассеяния для вытянутых индикатрис ставит под сомнение целесообразность формальной аппроксимации индикатрисы выражением



$$x(\mu) = 2(1 - a_0)\delta(1 - \mu) + \sum_{i=0}^n a_i P_i(\mu),$$

где  $P_i$  — полиномы Лежандра. Выделение части лучей, рассеянных вперед в дельта-функцию, математически эквивалентно перенормировке индикатрисы с уменьшением эффективной оптической толщины. Это, в свою очередь, должно было бы снизить погрешности любого приближенного решения, а не наоборот. Увеличение доли многократного рассеяния в отраженном назад излучении при рассеянии на аэрозольных частицах явилось одной из причин неудачи методики атмосферной коррекции по измерениям в полосе поглощения кислорода [12]. Рассеяние большей кратности увеличивает эффективную длину пробега фотона, после чего становится невозможным разделить отраженную от поверхности составляющую от рассеянной назад аэрозодем.

Для слоев конечной оптической толщины значения начальной толщины дискретны ( $\tau_0 = \tau 2^{-k}$ ). Поэтому сравнение различных начальных приближений не дает достаточно точной оценки  $\tau_0$ . Для определения этих значений были проведены аналогичные тестовые расчеты коэффициента отражения бесконечно глубокого океана. Равенство коэффициентов отражения для слоев с оптическими толщинами  $\tau$  и  $2\tau$  служило признаком оптически бесконечной среды (как правило,  $\tau > 200$ ). Поскольку для приближения однократного рассеяния условие (26) оказалось невыполнимым, использовался критерий  $\varepsilon < 10^{-5}$ . Результаты даны в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

**Значения начальной оптической толщины приближенных решений, необходимых для расчета коэффициента яркости однородного бесконечного слоя со средней относительной погрешностью  $10^{-5}$**

Индикатриса рассеяния	Вероятность рассеяния назад	Вероятность вы- живания фотона	Начальная толщина слоя, приближение			
			одно- кратное	дву- кратное	двукратное с нормировкой	
					форму- ла (23)	форму- лы (24), (25)
Хенли — Гринштейна, $g = 0,8$	0,051	1	$4,7 \cdot 10^{-9}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
Петцольда, $p(\gamma)$ №8	0,014	0,906	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-4}$
Петцольда, $p(\gamma)$ №12	0,012	0,867	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$
Петцольда, $p(\gamma)$ №4	0,014	0,585	$6,1 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$
Петцольда, $p(\gamma)$ №2	0,044	0,247	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
Петцольда, $p(\gamma)$ №15	0,143	0,091	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$

Как видно из табл. 2, с ростом вероятности выживания фотона точность приближений без нормировки потока уменьшается, а приближения с нормировкой чувствительны к форме индикатрис.

## Выводы

1. Предложен новый эффективный способ расчета рассеяния в оптически тонких однородных плоскопараллельных слоях. Время расчета сопоставимо со временем выполнения одной процедуры «удвоения», а выигрыш составляет 10 – 20 операций удвоения. Уменьшение количества операций гарантирует высокую точность расчета коэффициента отражения полубесконечной среды практически с произвольными оптическими характеристиками.

2. Начальная оптическая толщина в процедуре «удвоения» зависит от вероятности рассеяния назад и вероятности выживания фотона. Причем чем больше света рассеивается вперед, тем точнее должно быть начальное приближение для коэффициентов отражения и пропускания. Такая особенность рассеяния в средах с сильно вытянутыми индикатрисами означает, что процедуры усечения индикатрисы рассеяния вносят существенные ошибки в окончательный результат даже при расчете отраженного назад излучения.

3. Сравнения приближений — однократного, двукратного, а также предложенного в работе — показали, что приближение однократного рассеяния, взятое в качестве начального, не может обеспечить высокую точность расчета для полубесконечной среды. Причем существует некоторое оптимальное, заранее неизвестное, значение начальной оптической толщины. Если использовать меньшие значения  $\tau_0$ , то численная схема будет вносить дополнительные ошибки — ошибки округления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takashima T.* A new approach of the adding method for computations of emergent radiation of an inhomogeneous plane parallel atmosphere // *Astroph. Spa. Sci.* — 1975. — **36**. — P. 319 – 328.
2. *Hansen H. E.* Radiative transfer by doubling very thin layers // *Astroph. J.* — 1969. — 155. — P. 565 – 573.
3. *Plass G.N., Kattawar G.W., Catchings F.E.* Matrix operator theory II. Scattering from maritime haze. // *Appl. Opt.* — 1973. — **12**. — P. 1071 – 1084.
4. *Mobley C. D.* Light and water: Radiative transfer in natural waters. — San Diego: Academic, 1994. — 592 p.
5. *Preisendorfer R. W.* Radiative Transfer on Discrete Spaces. — New York: Pergamon Press, 1965. — 461 p.
6. *Амбарцумян В.А.* К вопросу о диффузном отражении света мутной средой // *ДАН СССР.* — 1943. — **38**, № 8.
7. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953. — 431 с.
8. *Соболев В.В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1956. — 391 с.
9. *Шибанов Е.Б., Афонин Е.И.* Физическая модель переноса излучения в плоскопараллельной атмосфере для задач дистанционного зондирования, приближение для изотропно и анизотропно рассеивающего слоя / Депон. рукопись № 1631-В89. — М.: ВНИИТИ, 1989. — 41 с.
10. *Heney L.C., Greenstein J.L.* Diffuse radiation in the galaxy // *Astroph. J.* — 1941. — **93**. — P. 70 – 83.
11. *Petzold T.J.* Volume scattering functions for selected ocean waters // *S 10 Ref.* — San Diego: Scripps Inst. Oceanog. — 1972. — P. 72 – 78.

12. Малкевич М.С., Бадаев В.В. Метод комплексных исследований океана и атмосферы из космоса // Исследования Земли из космоса. — 1981. — № 4. — С. 45 — 53.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 02.12.03  
После доработки 15.03.04

**ABSTRACT** The problem of choosing the initial approximation of the reflectance and transmittance coefficients in the numerical method based on the «interaction» principle is considered. The drawbacks of a single-order scattering approximation are shown and the regularities of light propagation in the media with the strong peaked phase function are analyzed. Semi-analytical expressions for calculating the initial approximation are proposed. They permit to calculate light field characteristics in the plane-parallel media with a relative error  $\sim 10^{-5}$ .

### **Уважаемые коллеги!**

На базе Морского гидрофизического института НАН Украины с 1999 года издается сборник научных трудов **«Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа»**.

Тематическая направленность сборника — экологическое состояние и изменчивость морской среды, проблемы возможных последствий антропогенной деятельности в прибрежных и шельфовых зонах. Сборник содержит результаты исследований морских акваторий, выполняемых научными организациями, чьи совместные планы исследований включают в себя изучение наиболее интересных объектов шельфа. Работы выполняются по направлениям: мониторинг и разработка новых технологий контроля морской среды; научные основы комплексного использования природных ресурсов шельфа, моделирование шельфовых экосистем, биотехнологии воспроизводства качества среды и биоресурсов.

Сборник входит в Перечень Высшей аттестационной комиссии (ВАК) Украины научных изданий, в которых могут публиковаться основные результаты диссертационных работ по физико-математическим, географическим, биологическим наукам; выходит 4 раза в год.

Сборник предназначен для ученых и специалистов академических и отраслевых институтов, студентов, аспирантов, преподавателей высших учебных заведений, специалистов, работающих в области исследования и использования ресурсов прибрежной и шельфовой зон.

**Приобрести сборник можно в Морском гидрофизическом институте НАН Украины.**

---

### **К 75-летию юбилею в МГИ НАН Украины издана монография**

---

**Развитие морских наук и технологий в Морском гидрофизическом институте за 75 лет** /Под общ. ред. В.Н. Еремеева. — Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. — 704 с., 314 ил., 44 табл.

ISBN 966-02-3385-X

В юбилейной монографии всесторонне представлены история развития Морского гидрофизического института НАН Украины, направленность исследований его научных отделов и отделений — экспериментального и гидроакустики, Специального конструкторско-технологического бюро, научно-производственных подразделений. Приводятся основные достижения института за 75-летний период по ключевым направлениям развития морских наук и технологий.

Книга предназначена для широкого круга читателей: научных и инженерно-технических работников в области океанологии, гидрофизики, гидрохимии, гидрометеорологии, морского приборостроения, информатики, автоматизации научных исследований, а также специалистов по проблемам изучения и использования ресурсов морей и океанов, аспирантов, студентов вузов и всех, кому интересна история отечественной науки.