

УДК 551.46:532.59

А.Е. Букатов, В.В. Жарков

Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове при равномерном перемещении области постоянных давлений

Проведено исследование пространственного распределения изгибных напряжений плавающего ледяного покрова, формируемых его колебаниями при движении области постоянных давлений. Дан анализ зависимости изгибных напряжений перед нагрузкой, в зоне ее приложения и в волновом следе от толщины льда, скорости перемещения давлений и вида их распределения в области.

Введение

Характерным фактором гидрологического режима полярных регионов океана, замерзающих морей и внутренних водоемов является наличие ледяного покрова. Обзор теоретических и экспериментальных исследований его влияния на генерацию и распространение изгибно-гравитационных волн приведен в [1 – 6]. От ледового режима в значительной степени зависит решение ряда практических задач. При этом важной характеристикой состояния ледяного покрова является напряжение, формируемое изгибными деформациями под воздействием волновых возмущений. Изгибное напряжение во льду вблизи трассы движущейся по нему нагрузки изучалось в [7].

Исследованию пространственного распределения изгибных напряжений ледяного покрова, формируемых при движении по льду области давлений постоянной интенсивности, посвящена данная работа.

Постановка задачи и основные уравнения

Пусть по сплошному ледяному покрову, плавающему на поверхности бассейна постоянной глубины H , заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, прямолинейно перемещается с постоянной скоростью v осесимметричная область постоянных давлений

$$p_0 = pf(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (1)$$

Считая движение морской воды потенциальным, а колебания плавающего ледяного покрова малыми и безотрывными, рассмотрим напряжение в ледяном покрове, формируемое его изгибными деформациями ζ . Для определения изгибного напряжения в случае плоского фронта движущихся давлений в [8, 9] приведена формула

$$\sigma_x = \frac{1}{2} Eh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (2)$$

© А.Е. Букатов, В.В. Жарков, 2005

где E, h — модуль нормальной упругости и толщина ледяного покрова. В случае трехмерных возмущений формула (2) характеризует компоненту тензора напряжений в направлении перемещения нагрузки. Напряжения σ_y в направлении, нормальном к трассе перемещения нагрузки, и сдвиговые напряжения τ_{xy} определим по формулам

$$\sigma_y = \frac{1}{2} Eh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} Eh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Отметим, что зависимость напряжения изгиба в направлении, составляющем с трассой движения нагрузки угол γ , определяется [10] формулой

$$\sigma^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma + \tau_{xy} \sin 2\gamma.$$

Направление главной оси напряжения находится из уравнения $\partial \sigma^* / \partial \gamma = 0$,

что дает $\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$, а соответствующее ему напряжение σ_g (максимальное по γ абсолютное значение σ^*) выражается по формуле

$$\sigma_g = \frac{|\sigma_x + \sigma_y|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4)$$

Задача определения $\zeta(x, y, t)$ в линейной постановке сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0; \quad 0 < z < H; \quad -\infty < x, y < \infty \quad (5)$$

с граничными и начальными условиями

$$\left(D_1 \nabla^4 + \kappa_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -p_1 f(x_1, y), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (7)$$

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\{D_1, \kappa_1, p_1\} = \{D, \kappa, p\} (\rho g)^{-1}, \quad D = Eh^3 [12(1-\nu^2)]^{-1}, \quad \kappa = \rho^* h,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ρ^*, ν — плотность и коэффициент Пуассона ледяного покрова, ρ, φ — плотность морской воды и потенциал скорости ее движения, g — ускорение свободного падения.

Решая (5) – (8) методом интегральных преобразований, для установившегося режима в полярной системе координат, связанной с эпицентром движущейся осесимметричной области давлений, получим следующие выражения:

$$\zeta = -\frac{Mg}{2\pi\nu^2\rho} \int_0^\infty \frac{f^*(r)thrH}{1+\kappa_1\tau_w^2} I_0 dr, \quad I_0 = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{iRr\cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2 - \cos^2\theta} d\theta, \quad (9)$$

$$\tau_w^2 = rg \operatorname{th} rH, \quad \tau^2 = \frac{\tau_w^2(D_1 r^4 + 1)}{1 + \kappa_1 \tau_w^2}, \quad \tau_0 = \frac{\tau}{r\nu},$$

R, γ и r, θ — полярные координаты в физической плоскости и плоскости Фурье, M — интегральная (по области) масса движущейся нагрузки, а $f^*(r)$ — безразмерная трансформанта Фурье функции $f(x, y)$, деленная на 2π .

Подставляя (9) в (2), (3) и учитывая, что [11]

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{iRr\cos(\theta-\gamma)} d\theta = 2\pi J_0(Rr),$$

находим

$$\sigma_x = \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_y = \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) (I_0 - I_1) dr, \\ \tau_{xy} = \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) I_0^* dr, \quad \sigma_0 = \frac{MgEh}{4\pi\nu^2\rho}, \quad \xi(r) = \frac{r^2 f^*(r) thrH}{1 + \kappa_1 \tau_w^2}, \quad (10)$$

$$I_1 = \tau_0^2 I_0 - 2\pi J_0(Rr), \quad I_0^* = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{iRr\cos(\theta-\gamma)} \sin 2\theta}{\tau_0^2 - \cos^2\theta} d\theta.$$

Аналитические выражения для изгибных напряжений

Исследование интегральных выражений (9), (10) проведем аналогично [6]. Рассмотрим три диапазона скорости перемещения области давлений.

1. Пусть $\nu < \nu_0$, где $\nu_0 = \tau(r_0)/r_0$ — минимальная фазовая скорость свободных волн в системе лед — вода, а r_0 — корень уравнения $\tau - r\partial\tau/\partial r = 0$. В этом диапазоне скорости при вычислении интегралов I_0, I_0^* на пути интегрирования по θ особенности не возникают. Воспользовавшись соотношением [11]

$$e^{iRr\cos(\theta-\gamma)} = J_0(Rr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(Rr) \cos[2k(\theta-\gamma)] + \\ + 2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(Rr) \sin[(2k+1)(\theta-\gamma)],$$

после вычисления I_0 и I_0^* находим:

$$I_0 = \frac{2\pi}{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left\{ J_0(Rr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{J_{2k}(Rr) \cos(2k\gamma)}{\left[\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1} \right]^{2k}} \right\}, \quad (11)$$

$$I_0^* = \frac{\pi}{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left[1 - \frac{1}{\left(\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1} \right)^4} \right] \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{J_{2k}(Rr) \sin(2k\gamma)}{\left[\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1} \right]^{2(k-1)}}.$$

Если значение v отличается от v_0 не менее чем на 5%, то для обеспечения относительной погрешности в пределах 0,5% суммирование в формулах (11) можно ограничить 10 — 12 членами. Подстановка (11) в (9), (10) дает выражения в виде однократных интегралов по r , которые можно считать численно, так как особенностей на пути интегрирования нет. Поскольку значение τ_0 растет с увеличением r , то достаточная точность может быть достигнута, если взять верхний предел интегрирования порядка $50D_1^{1/4}$. Отметим, что члены $2\pi J_0(Rr)$ и $\tau_0^2 I_0$ выражения для I_1 при вычислении интегралов по r для σ_x и σ_y могут расходиться. Но так как при их суммировании расходимость взаимно компенсируется, можно записать:

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left\{ \frac{J_0(Rr)}{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1}} + 2\tau_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{J_{2k}(Rr) \cos(2k\gamma)}{\left[\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1} \right]^{2k}} \right\} \quad (12)$$

2. Рассмотрим теперь диапазон скорости $v_0 < v < c$, где $c = (gH)^{1/2}$ — скорость длинных волн. В этом случае интервал интегрирования по r разобьем на три интервала: $(0, r_1)$; (r_1, r_2) и (r_2, ∞) , где r_1, r_2 — корни уравнения $\tau_0 = 1$, при этом $r_2 > r_1$. В частности, выражения для σ_x принимают вид

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 \sigma_{xi}, \quad \sigma_{x1} = \sigma_0 \int_0^{r_1} \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_{x2} = \sigma_0 \int_{r_1}^{r_2} \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_{x3} = \sigma_0 \int_{r_2}^{\infty} \xi(r) I_1 dr. \quad (13)$$

Для σ_y, τ_{xy} разбиение аналогично.

Исследование двух крайних интервалов проводится как и для $v < v_0$, поскольку на пути интегрирования по θ в I_0, I_0^* особенности не возникают. На пути интегрирования по r при подстановке (11) и/или (12) в выражения для $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_{xy1}$ и $\sigma_{x3}, \sigma_{y3}, \tau_{xy3}$ могут возникать только интегрируемые особенности в точках r_1 и r_2 соответственно.

Для вычисления $\sigma_{x2}, \sigma_{y2}, \tau_{xy2}$ при $r_1 < r < r_2$ в интегралах I_0, I_0^* путь интегрирования по θ деформируем в контур L_0 , обходящий полюса θ_1, θ_4 в

нижней, а θ_2, θ_3 — в верхней полуплоскостях. Здесь $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\theta_{3,4} = \pi \mp \arccos \tau_0$.

В таком случае I_0 представляется в виде

$$I_0 \Big|_{\eta < r < r_2} = I_{00} - \sum_{k=1}^7 I_{0k}, \quad (14)$$

$$I_{00} = \int_{L^*} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta, \quad I_{0k} = \int_{L_k} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta,$$

где L^* — замкнутый контур, образованный L_0 и L_k ($k = 1, \dots, 7$), на которых $\operatorname{Re}[iRr \cos(\theta-\gamma)] \leq 0$. Выбор L^* зависит от угла γ [6]. Выбор пути интегрирования для вычисления I_0^* производится аналогично, при этом соответствующие интегралы обозначим как I_{00}^* и I_{0k}^* .

После применения теоремы Коши найдем:

$$I_{00} = 2\pi(\Phi_1 + \Phi_2), \quad I_{00}^* = -2\pi(\Phi_1^* + \Phi_2^*), \quad (15)$$

где

$$\Phi_1, \Phi_1^* = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi - \theta_0 < \gamma \leq \pi, \quad r_1^* \leq r \leq r_2^*, \\ \Phi_-(r), \Phi_-^*(r) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_2, \Phi_2^* = \begin{cases} \Phi_+(r), \Phi_+^*(r) & \text{при } 0 \leq \gamma \leq \theta_0, \quad r_1^* \leq r \leq r_2^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_{\mp} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}} \sin \left[Rr \left(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma \right) \right],$$

$$\Phi_{\mp}^* = \sin \left[Rr \left(\sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma \mp \tau_0 \cos \gamma \right) \right], \quad \theta_0 = \max_{\eta < r < r_2} \arccos \tau_0,$$

$r_{1,2}^*(\gamma)$ — корни уравнения $\theta_2(r) = \gamma$, если $0 < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi$.

Функции $\Phi_{1,2}$ на рассматриваемых отрезках не имеют особенностей по r , возможно, за исключением интегрируемых в r_1 и r_2 .

Можно показать, что в выражениях I_0 и I_0^* суммы интегралов по L_k для $k = 1, 2, 4, 6, 7$ обращаются в ноль. Суммы интегралов по участкам L_3 и L_5 , параллельным мнимой оси, после соответствующих замен переменных и алгебраических преобразований приводятся к виду

$$I_{03} + I_{05} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}} \sum_{m,n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin \vartheta_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du,$$

$$I_{03}^* + I_{05}^* = \sum_{m,n=1}^2 \sin \vartheta_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du, \quad (16)$$

где

$$\Phi^* = \sin(Rru)(u^2 - 1)^{-1/2} (u - \cos \vartheta_{mn})^{-1},$$

$$\vartheta_{mn} = \gamma + (-1)^{m+n} \arccos \tau_0 + [1 + (-1)^n] \pi / 2.$$

Замена $\sqrt{u^2 - 1}$ на $\sqrt{2(u-1)}$ в малой ε -окрестности $u = 1$ помогает устранить возможную особенность интегрирования и дает

$$\sin \vartheta_{mn} \int_1^{u_0^*} \Phi^* du \approx \sqrt{2(1 + \cos \vartheta_{mn})} (A_1 - A_2) \operatorname{sign}(\sin \vartheta_{mn}), \quad (17)$$

$$A_1 = \sin[Rr(1 + \varepsilon)] \operatorname{arctg} [\varepsilon^{1/2} (1 - \cos \vartheta_{mn})^{-1/2}],$$

$$A_2 = Rr \int_1^{u_0^*} \cos(Rru) \operatorname{arctg} [(u-1)^{1/2} (1 - \cos \vartheta_{mn})^{-1/2}] du, \quad u_0^* = 1 + \varepsilon.$$

Интеграл $\int_{u_0^*}^{\infty} \Phi^* du$ можно приближенно вычислить аналитически, заменяя $(u^2 - 1)^{-1/2}$ на конечных отрезках пути интегрирования $[u_{k-1}^*, u_k^*]$ ($k = 1, \dots, j$) выражениями вида $p_k(u - a_k)^2 + q_k(u - a_k) + b_k$. На участке $[u_j^*, \infty)$ функцию $(1 - u^{-2})^{1/2}$ при $u^{-2} \ll 1$ заменим первыми двумя членами ее разложения в ряд Тейлора по степеням (u^{-2}) . Значение j , длины отрезков интегрирования и коэффициенты p_k, q_k, a_k, b_k можно выбирать так, чтобы погрешность аппроксимации не превышала заданной. В результате получаем

$$\int_{u_{k-1}^*}^{u_k^*} \Phi^* du \approx A_4(u_k^*) - A_4(u_{k-1}^*), \quad \int_{u_j^*}^{\infty} \Phi^* du \approx \sum_{l=1}^2 F_l(r). \quad (18)$$

Здесь

$$A_4 = A_{41} + A_{42},$$

$$A_{41} = p_k (rR)^{-2} \sin(Rru) - [p_k(u - a_k - \beta_k) + q_k] (Rr)^{-1} \cos(Rru),$$

$$A_{42} = (p_k \beta_k^2 - q_k \beta_k + b_k) [\sin \beta_0 \operatorname{Ci}(Rr\beta) + \cos \beta_0 \operatorname{Si}(Rr\beta)],$$

$$\beta_k = a_k - \cos \vartheta_{mn}, \quad \beta_0 = Rr \cos \vartheta_{mn}, \quad \beta = u - \cos \vartheta_{mn},$$

$$F_1 = \begin{cases} [2(\cos \vartheta_{mn} - \beta_*)]^{-1} A_5, & \cos \vartheta_{mn} \neq \beta_*, \\ A_6, & \cos \vartheta_{mn} = \beta_*, \end{cases}$$

$$A_5 = (\pi/2 - \text{Si } \beta_4) \cos \beta_0 - \text{Ci } \beta_4 \sin \beta_0 - (\pi/2 - \text{Si } \beta_5) \cos \frac{Rr}{\sqrt{2}} - (-1)^l \text{Ci } \beta_5 \sin \frac{Rr}{\sqrt{2}},$$

$$A_6 = \frac{\sin(u_j^* Rr)}{2u_j^* + (-1)^l \sqrt{2}} + \frac{Rr}{2} [(-1)^l (\pi/2 - \text{Si } \beta_5) \sin \frac{Rr}{\sqrt{2}} - \text{Ci } \beta_5 \cos \frac{Rr}{\sqrt{2}}],$$

$$\beta_4 = Rr(u_j^* - \cos \vartheta_{mn}), \quad \beta_5 = Rr(u_j^* - \beta_*), \quad \beta_* = (-1)^{l+1} / \sqrt{2}.$$

После подстановки (14) – (18) в выражение (13) для σ_{x_2} и в аналогично полученные формулы для σ_{y_2} , τ_{xy_2} можно проводить численное интегрирование по r от r_1 до r_2 . Отметим, что представление I_1 из (10) в виде (12) на этом конечном интервале нецелесообразно. Член с $J_0(Rr)$ не имеет особенностей при вычислении σ_{x_2} и σ_{y_2} в (13).

3. Пусть $v > c$. Тогда уравнение $\tau_0 = 1$ имеет только один положительный корень $r = r_2$. В этом случае для σ_x вместо (13) имеем

$$\sigma_x = \sigma_{x_2} + \sigma_{x_3}, \quad (19)$$

где в интеграле σ_{x_2} нижний предел равен нулю. Входящие в σ_{x_2} и σ_{x_3} интегралы I_0 имеют вид (14) при $r_1 = 0$. Аналогично представляются σ_y, τ_{xy} .

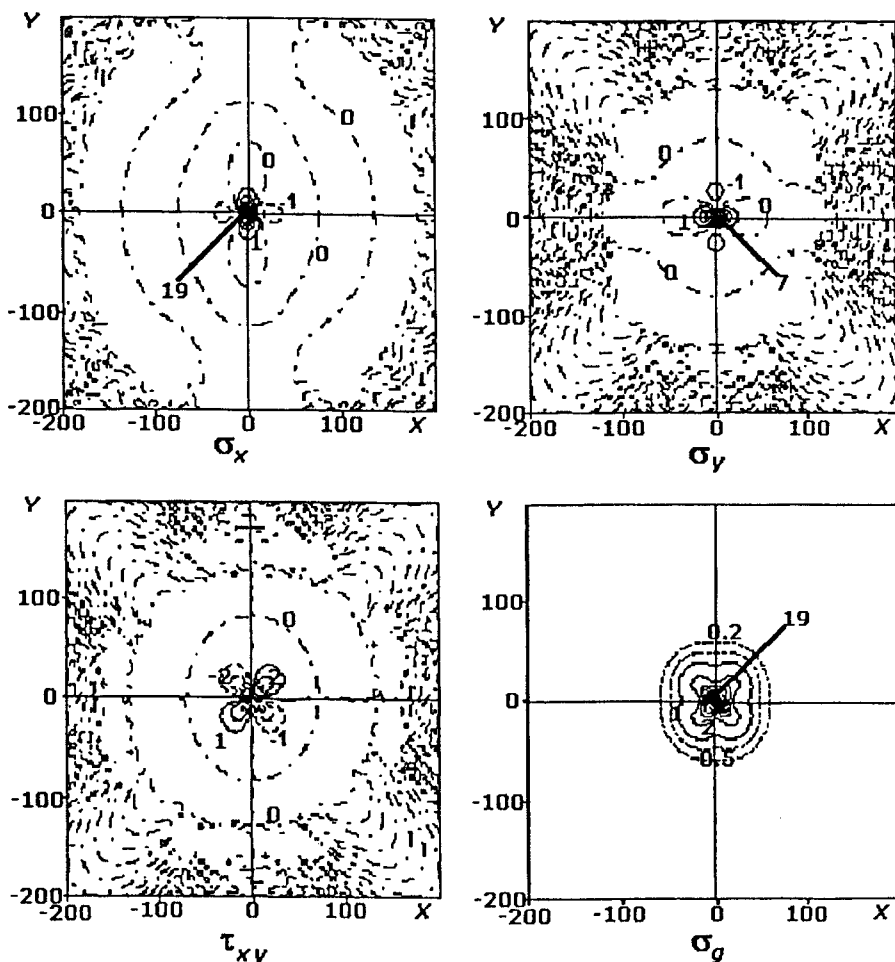
Формулы (15) остаются в силе, если r_1^* является меньшим корнем уравнения $\theta_2(r) = \gamma$ в случае $\theta^* < \gamma < \theta_0$ и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi - \theta^*$, где $\theta^* = \arccos(c/v)$. Если же выполняется условие $0 \leq \gamma \leq \theta^*$ или $\pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi$, то $r_1^* = 0$. Условия для r_2^* и формулы (16) – (18) остаются прежними.

Анализ численных результатов

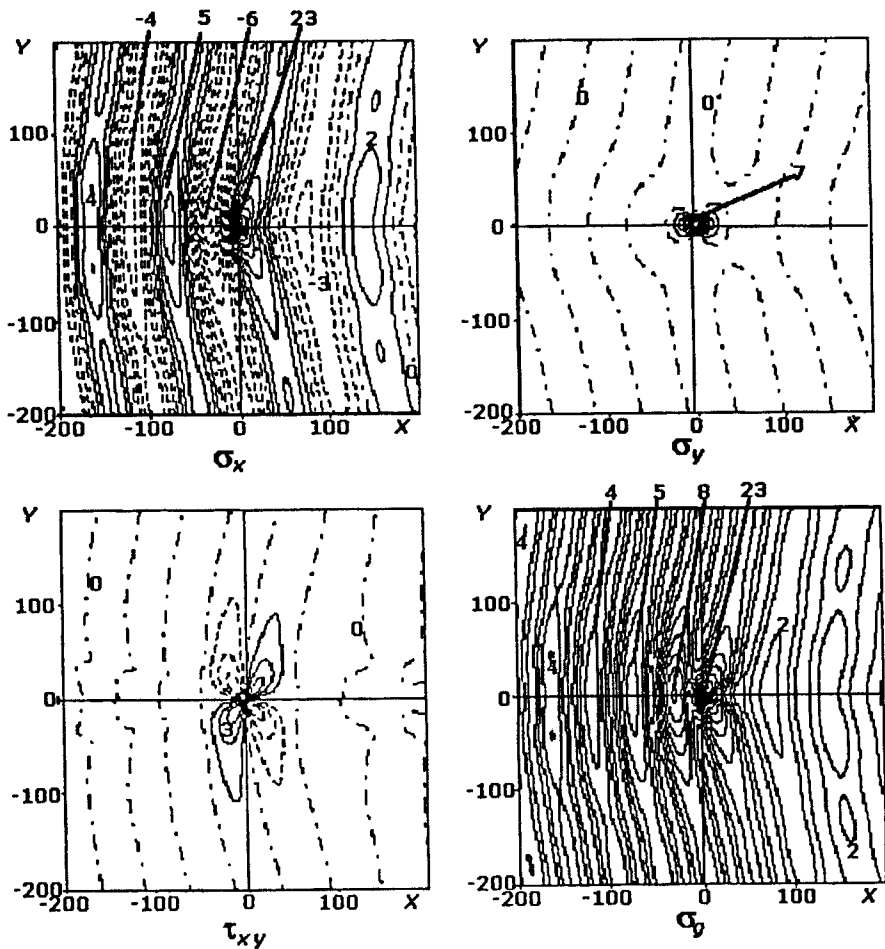
Численные расчеты проводились по формулам (9) – (19). При этом плотность морской воды полагалась равной $1030 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, а глубина бассейна — 100 м. Модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона льда принимались [12] соответственно равными $3 \cdot 10^9 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$ и 0,34. Толщина льда менялась от 0,6 до 2,5 м, а нагрузка перемещалась со скоростью от 5 до 25 м/с. При этом значения скорости попадали в диапазоны с качественно различной структурой волновой картины [3, 5, 6]. Рассматривались как сосредоточенная нагрузка ($f = \delta(R)$), так и давления, распределенные по закону

$f = k^2 e^{-(kr/H)^2} / \pi$ ($f^*(r) = e^{-(rH/2k)^2}$) для различных значений безразмерного параметра k . Этот параметр характеризует распределение давлений в движущейся области. Чем меньше k , тем медленнее происходит уменьшение нагрузки с удалением от эпицентра. Полная масса нагрузки M остается неизменной. Для сосредоточенных давлений $k = \infty$.

Некоторые результаты расчетов иллюстрируются рис. 1 – 4, на каждом из которых приведены топографии распределения σ_x (верхний левый), σ_y (верхний правый), τ_{xy} (нижний левый) и σ_g (нижний правый рисунок) для нагрузки массой $M = 1$ т, эпицентр которой движется справа налево по оси абсцисс при толщине льда 1 м. Изолинии (в килопаскалях) положительных (на гребнях изгиба) значений напряжения показаны сплошными, отрицательных (на впадинах изгиба) — штриховыми, а нулевых — штрихпунктирными линиями. Исключение составляют изолинии распределения σ_g на рис. 1, показанные для 0,2 и 0,5 кПа штрихами.



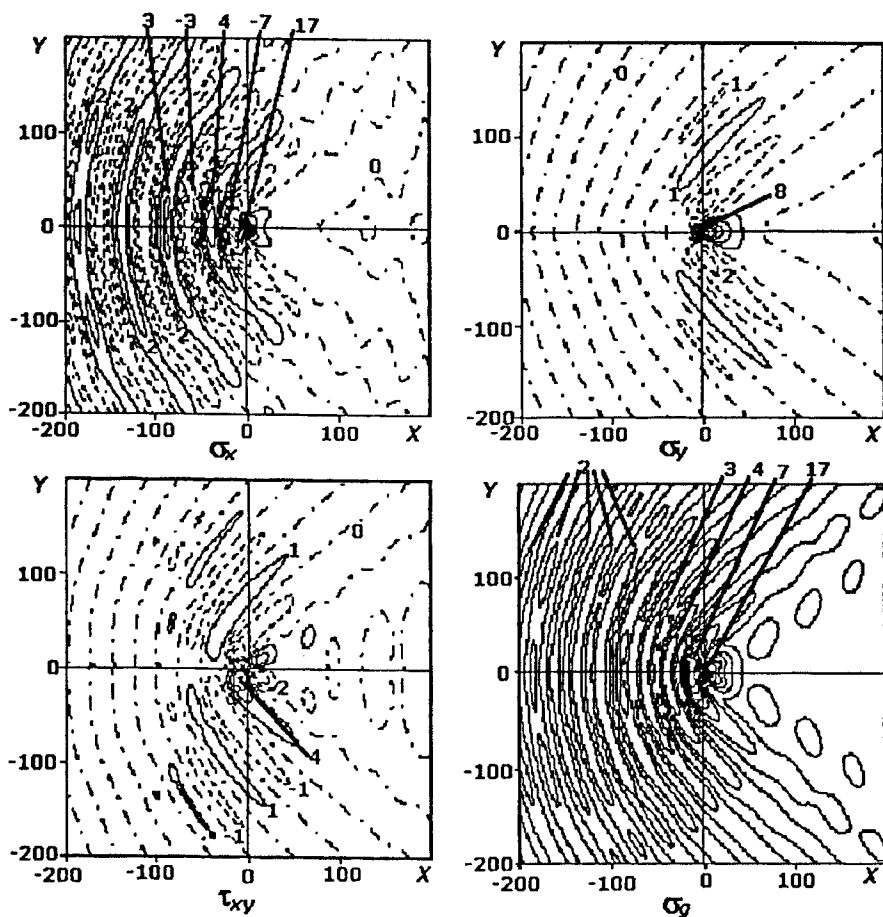
Р и с. 1. Топографии изгибных напряжений при движении сосредоточенной нагрузки со скоростью 5 м/с



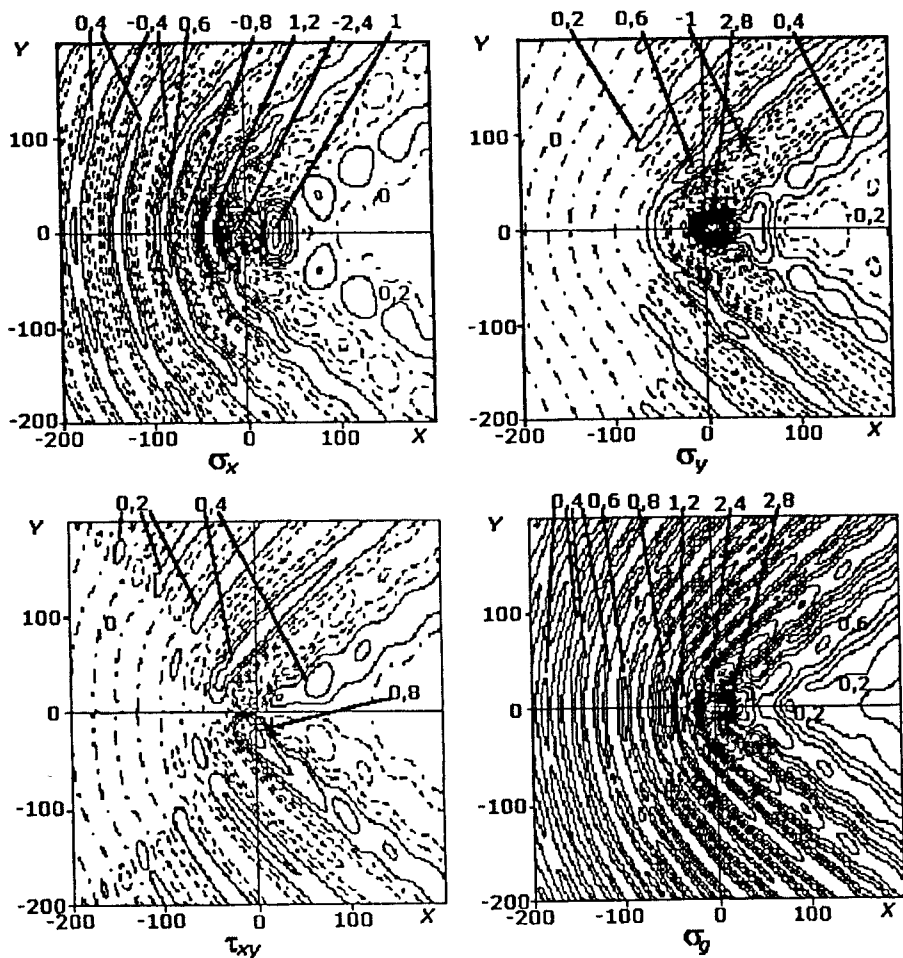
Р и с. 2. Топографии изгибных напряжений при движении сосредоточенной нагрузки со скоростью 15 м/с

Топографии распределения напряжений при $v = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ (из диапазона $v < v_0$) приведены на рис. 1 для сосредоточенной нагрузки. Изолинии здесь даны через 1 кПа. Видно, что для σ_x, σ_y и σ_g топографии симметричны как относительно трассы, так и относительно ортогональной к ней оси, проходящей через эпицентр нагрузки. Это согласуется со свойством топографий изгибных деформаций ледяного покрова при скоростях перемещения нагрузки, меньших минимума фазовой скорости в системе лед — вода. Максимумы каждой из компонент изгибных напряжений приходятся на окрестность эпицентра движущейся нагрузки. При этом наибольшими являются максимумы σ_x и σ_g . Убывание σ_x с удалением от эпицентра быстрее происходит вдоль трассы и медленнее — в поперечном направлении. За область убывания положительного напряжения образуется область более слабого отрицательного напряжения, вытянутая в поперечном направлении. При этом пик отрицательного напряжения возникает на трассе перемещения давлений (на ри-

сунке — круговые изолинии -1 кПа слева и справа от эпицентра). На большем удалении от эпицентра образуются области более слабого положительного и отрицательного напряжения, причем последняя оказывается разомкнутой по обе стороны от трассы и плавно переходит в область близких к нулю значений σ_x . Это выражается в сложности картины на расстоянии более 200 м от эпицентра. Картина распределения σ_y качественно похожа на картину σ_x , повернутую на 90° . Наиболее быстрое уменьшение σ_y происходит в поперечном направлении. Сдвиговое напряжение τ_{xy} по обе стороны от трассы имеет одинаковое распределение абсолютной величины, но разные знаки. При этом τ_{xy} принято за положительное сразу за эпицентром нагрузки справа по курсу ее перемещения. Наибольший рост (от нулевого значения в эпицентре) и убывание сдвигового напряжения происходит в направлениях, составляющих с трассой угол, близкий к 45° . Величина σ_g достигает максимума под эпицентром нагрузки и быстро спадает, причем спад происходит быстрее вдоль и поперек трассы, чем под углом 45° к ней.



Р и с. 3. Топографии изгибных напряжений при движении сосредоточенной нагрузки со скоростью 25 м/с



Р и с. 4. Топографии изгибных напряжений при движении распределенной нагрузки ($k = 10$) со скоростью 25 м/с

На рис. 2 показаны топографии распределения напряжений в случае сосредоточенной нагрузки, движущейся со скоростью $v = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Это значение скорости находится в диапазоне $v_0 < v < v_1$, где выражение для v_1 приведено в [6]. Для такой скорости перед областью давлений распространяется система изгибных, а за ней — изгибно-гравитационных волн. При этом напряжения σ_x , имея волновую структуру, затухают с удалением от эпицентра давлений значительно медленнее, чем при $v < v_0$. Однако в отличие от топографий распределения отклонений поверхности лед — вода от невозмущенного уровня, где наблюдается отставание максимального прогиба от эпицентра давлений, максимальное напряжение достигается непосредственно в точке приложения сосредоточенной нагрузки, как и в диапазоне $v < v_0$. Кроме того, напряжения в изгибных волнах перед давлениями заметно превышают напряжения, обусловленные гравитационными волнами в следе. Это связано с тем, что вблизи трассы перемещения давлений изгибные волны имеют

меньшую длину, чем гравитационные. Отрицательный пик напряжения, соответствующий первому гребню изгибной волны, примерно вдвое превышает отрицательный пик, соответствующий первой гравитационной волне, и по модулю составляет примерно 2/3 от положительного пика под эпицентром нагрузки. Напряжение σ_y с удалением от эпицентра давлений убывает почти так же, как и в случае $v < v_0$. Качественно аналогично ведет себя и τ_{xy} вне малой окрестности эпицентра. Причем максимальные по модулю вдоль гребня (впадины) изгибной или изгибно-гравитационной волны значения σ_y и τ_{xy} достигаются на некотором удалении от трассы перемещения давлений. Что касается распределения напряжения σ_g , то оно качественно похоже на распределение σ_x . Но убывание σ_g с удалением от трассы вдоль гребней (впадин) изгибных и изгибно-гравитационных волн происходит несколько медленнее. Это связано с тем, что на некотором удалении от трассы относительный вклад поперечного и сдвигового напряжений больше, чем непосредственно на трассе.

Топографии распределения компонент напряжения при скорости перемещения сосредоточенной нагрузки $25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ приведены на рис. 3. Рассматриваемое здесь значение скорости попадает в диапазон $v_1 < v < c$, для которого характерно появление в волновом следе за давлениями угловой зоны генерации трех волновых систем: изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн типа корабельных. На топографиях возмущений поверхности лед — вода это проявляется в основном в усложнении структуры желоба прогиба за давлениями. Однако на топографиях компонент изгибных напряжений усложнение структуры их распределения не столь заметно, так как величины вкладов трех указанных волновых систем в напряжения оказываются значительно меньшими вклада изгибных волн и прогиба под давлениями. Анализ изолиний на рис. 3 показывает, что напряжения в волновом следе по модулю не превышают 1 кПа, а сложность структуры следа проявляется лишь в извилистости нулевых изолиний σ_x и τ_{xy} и образовании эллипсообразных изолиний (1 кПа) в топографии распределения σ_g . В то же время напряжения, обусловленные прогибом непосредственно под нагрузкой и изгибными волнами перед ней, достигают 10 кПа. Причем максимальные по модулю значения напряжений σ_x и τ_{xy} вдоль гребней и впадин изгибных волн достигаются вне трассы, а для σ_y — практически на ортогональной к ней оси, проходящей через эпицентр давлений. Это приводит к тому, что величина σ_g с удалением от трассы по гребню (впадине) изгибной волны меняется слабо. Ее заметное убывание сказывается за пересечением линии гребня (впадины) с осью ординат, движущейся вместе с нагрузкой.

Отметим, что поскольку вклад поперечных гравитационных волн в следе с ростом v становится малозаметным, то переход скорости перемещения давления через c , когда этот вклад исчезает, на распределении напряжений практически не сказывается.

Влияние рассредоточения давлений в движущейся области на распределение изгибных напряжений ледяного покрова можно проследить, сравнивая топографии на рис. 3 и 4 при одинаковых значениях v и h , но для сосредоточенной (рис. 3) и распределенной ($k = 10$, рис. 4) нагрузки массой 1 т. При этом изолинии на рис. 4 даны через 0,2 кПа. Видно, что максимальные положительные значения напряжений σ_x и σ_y с уменьшением k начинают отставать от эпицентра движущихся давлений, а на их место в топографии распределения σ_x постепенно сдвигается отрицательный пик напряжения, ранее соответствовавший первому гребню изгибной волны. Напряжения при этом значительно уменьшаются, причем максимальные по модулю значения σ_y могут даже превысить максимальные значения σ_x . Вклады изгибных волн перед эпицентром давлений и корабельных волн в следе в формировании топографий распределения напряжений с рассредоточением нагрузки сравниваются, а σ_y и τ_{xy} в волновом следе становятся значительно большими, чем перед давлениями. Сложная структура следа при $v_1 < v < c$ становится более ярко заметной на фоне резкого ослабления напряжений, обусловленных изгибными волнами. С практической точки зрения это может быть несущественно, так как интенсивность напряжений в волновом следе с уменьшением k также ослабевает, хотя и не столь заметно. С дальнейшим убыванием k вклад волновых возмущений в распределение напряжений становится все более малозаметным на фоне вклада прогиба под давлениями. Причем непосредственно под эпицентром нагрузки σ_x и σ_y могут иметь отрицательный экстремум.

С ростом толщины ледяного покрова структура волновых возмущений в качественном отношении меняется так же, как и с уменьшением скорости перемещения давлений. На топографиях распределения изгибных напряжений это сказывается в том плане, что нулевые изолинии в волновом следе постепенно сглаживаются, напряжения σ_y и τ_{xy} становятся более сконцентрированными вблизи эпицентра движущегося давления, а спад σ_x и σ_y , обусловленных изгибными волнами, с удалением от трассы вдоль волновых гребней и впадин становится более монотонным. Однако напряжения с ростом h убывают. Например, с увеличением h от 1 до 2 м максимальные по абсолютной величине напряжения уменьшаются примерно в 3 раза.

Влияние рассредоточения нагрузки на распределение изгибных напряжений в ледяном покрове ослабевает с ростом толщины льда. Причем с уменьшением k изгибное напряжение, вызванное прогибом под давлениями, убывает более значительно, чем напряжение, обусловленное возмущениями волнового характера.

Выводы

Компоненты напряжений, обусловленных изгибными колебаниями плавающего ледяного покрова, зависят не только от характеристик ледяного покрова, но и от скорости перемещения и характера распределения нагрузки.

Наибольший вклад в распределение напряжений вносят изгибные волны и прогиб льда под нагрузкой. В случае сосредоточенных давлений максимальные напряжения возникают непосредственно под нагрузкой при любых скоростях ее перемещения. Увеличение области распределения нагрузки фиксированной массы приводит к уменьшению изгибных напряжений. При этом точка максимального напряжения под нагрузкой отстает от ее эпицентра. Угол между направлением максимальных напряжений, обусловленных изгибными волнами, и трассой перемещения эпицентра давлений растет с увеличением как скорости движения нагрузки, так и площади ее распределения, а убывает с ростом цилиндрической жесткости льда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеоздат, 1967. — 215 с.
2. Wadhams P. The Seasonal Ice Zone // The Geophysics of Sea Ice / Ed. N. Untersteiner. — Plen. Publ. Corp. — 1986. — Chap. 14. — P. 825 – 991.
3. Takizawa T. Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // J. Geophys. Res. — 1988. — 93, №. C5. — P. 5100 – 5112.
4. Duffy D.G. The response of floating ice to a moving vibrating load // Cold Reg. Sci. and Tech. — 1991. — 20. — P. 51 – 64.
5. Squire V.A., Hosking P.J., Kerr A.D. et al. Moving loads on ice plates. — Dordrecht: Kluwer, 1996. — 230 p.
6. Bukatov A.E., Zharkov V.V. Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Part I. Surface waves // Int. J. Offshore and Polar Eng. — 1997. — 7, № 1. — P. 1 – 12.
7. Squire V.A., Langhorne P.J., Robinson W.H. et al. Moving loads on sea ice // Polar Rec. — 1987. — 23 (146). — P. 569 – 575.
8. Гаврило В.П., Трипольников В.П. Результаты исследования изгибно-гравитационного резонанса в морских льдах // Теория и прочность ледокольного корабля. — Горький: Политехн. ин-т., 1982. — С. 28 – 34.
9. Шушлебин А.И. Волновые процессы и напряжения ледяного покрова // Проблемы Арктики и Антарктики. — 1978. — Вып. 53. — С. 50 – 54.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: АН СССР, 1954. — 648 с.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
12. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометеоздат, 1980. — 384 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 14.09.04

ABSTRACT Spatial distribution of a floating ice cover flexural strains induced by its oscillations during constant pressure area motion is investigated. Dependence of flexural strains before the load, in the loaded area and in the wave track upon the ice thickness, velocity of pressure propagation and a type of their distribution is analyzed.