

# Математическое моделирование морских систем

УДК 532.59

В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга

## Математическое моделирование баротропных волн в озере Донузлав

В рамках линейной теории с использованием численных методов исследуются свободные и вынужденные волны в ограниченном бассейне, геометрические характеристики которого приближенно соответствуют оз. Донузлав. В качестве вынуждающей силы рассматриваются колебательные движения жидкости у входа в озеро. Выполнен анализ зависимости амплитуд генерируемых волн от параметров вынуждающей силы.

Исследование волновых процессов в ограниченных бассейнах представляет собой одну из важнейших задач динамики моря. В работах [1 – 7] аналитическими методами изучаются свободные волны в ограниченных бассейнах сравнительно простой геометрической формы. В данной статье с использованием численных методов анализируются свободные и вынужденные баротропные волны в ограниченном бассейне, геометрические характеристики которого приближенно соответствуют оз. Донузлав.

1. Исследуем свободные колебания жидкости, заполняющей симметричный относительно оси  $x$  ограниченный бассейн (канал) переменного поперечного сечения (рис. 1, а).

В предположениях линейной теории длинных волн однородной невязкой жидкости для определения горизонтальной скорости  $u(x, t)$  и профиля свободной поверхности  $\zeta(x, t)$  имеем систему двух дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{2b(x)} \frac{\partial(Su)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $S(x)$  — площадь поперечного сечения перпендикулярного оси  $x$  канала,  $g$  — ускорение свободного падения.

Пусть функция глубины бассейна имеет вид

$$h(x, y) = h_0(x) \cos \frac{\pi y}{2b(x)}, \quad (2)$$

где  $2b(x)$  — ширина озера,  $h_0(x)$  — глубина озера вдоль оси  $x$  (рис. 1, б).

© В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга, 2006

Интегрируя функцию (2) по  $y$  на промежутке  $[-b; b]$ , получаем  $S(x) = 4b(x)h_0(x)/\pi$ . Будем полагать далее, что при  $x = 0$  и  $x = l$  ( $l = 2 \cdot 10^4$  м) бассейн ограничен вертикальными стенками  $h_0(0) = h_0(l) = 1$  м.

Система уравнений (1) допускает решение вида

$$u(x, t) = \bar{u}(x)\sin\sigma t, \quad \zeta(x, t) = \bar{\zeta}(x)\cos\sigma t, \quad (3)$$

представляющее собой стоячие волны. Подставляя выражения (3) в (1), получаем систему двух дифференциальных уравнений для нахождения  $\bar{u}(x)$  и  $\bar{\zeta}(x)$ :

$$\sigma \bar{u} = -g \frac{d\bar{\zeta}}{dx}, \quad \sigma \bar{\zeta} = -\frac{1}{2b(x)} \frac{d(\bar{u}S)}{dx}. \quad (4)$$

Для определения амплитуды волновых течений  $\bar{u}(x)$  получаем из (4) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

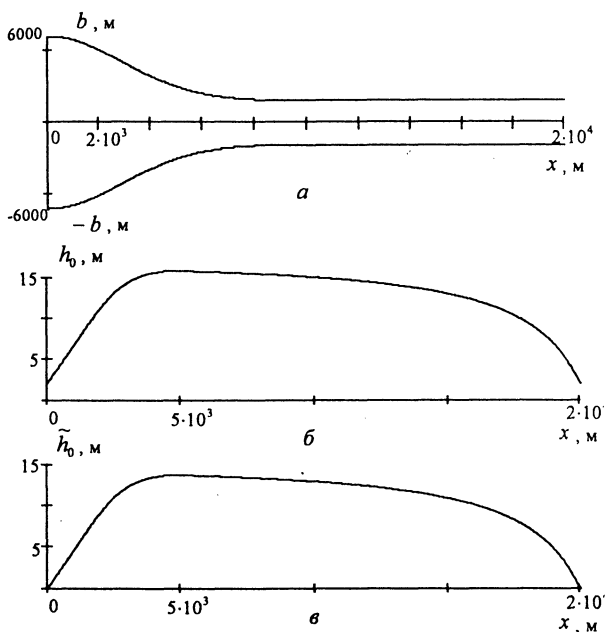
$$\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} \frac{S(x)}{2b(x)} + \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \left[ \frac{dS(x)}{dx} \frac{1}{b(x)} - \frac{S(x)}{2b^2(x)} \frac{db(x)}{dx} \right] + \bar{u}(x) \left[ \frac{d^2 S(x)}{dx^2} \frac{1}{2b(x)} - \frac{1}{2b^2(x)} \frac{db(x)}{dx} \frac{dS(x)}{dx} + \frac{\sigma^2}{g} \right] = 0. \quad (5)$$

На границах бассейна ( $x = 0$ ,  $x = l$ ), учитывая, что  $S(0) \neq 0$  и  $S(l) \neq 0$ , имеем такие граничные условия:

$$\bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(l) = 0. \quad (6)$$

В общем случае аналитическое решение задачи (5), (6) для бассейна сложной геометрической формы (рис. 1) неизвестно, поэтому найдем численное решение этой задачи методом Рунге — Кутты четвертого порядка [8, 9]. Ограничимся поиском первых трех мод. При этом полученные решения нормируем так, чтобы  $\max|\bar{u}(x)|$  равнялся 50 см/с.

В результате численных расчетов получены функции  $\bar{u}(x)$ ,  $\bar{\zeta}(x)$  и собственные значения частот и периодов свободных колебаний, соответствующие первым трем модам. Решения задачи (5), (6) представляют собой одно-, двух- и трехузловые сейши с уменьшающимися периодами:  $\tau_1 = 1$  ч 47 мин,  $\tau_2 = 40$  мин,  $\tau_3 = 25$  мин. Таким образом, период второй моды  $\tau_2$  меньше периода первой моды  $\tau_1$  на 1 ч 7 мин, или на 63%, а период третьей моды — на 1 ч 21 мин, или на 76% по сравнению с периодом первой моды. Период третьей моды уменьшился относительно периода второй моды на 14 мин, или на 35%.



Р и с. 1. Модель оз. Донузлав: а — поперечные границы озера; б — профиль глубины озера вдоль оси  $x$  при наличии твердой стенки высотой 0,5 м; в — без стенки

поверхности для рассматриваемых мод имеют место на правой границе озера ( $x = l$ ). Свободная поверхность первой моды имеет один узел при  $x_1 = 3,2$  км. Профиль второй моды — две узловые точки  $x_1 = 2,3$  км и  $x_2 = 15,1$  км. Координаты узловых точек третьей моды свободных колебаний —  $x_1 = 2$  км,  $x_2 = 10,3$  км,  $x_3 = 17,25$  км. Как показывают расчеты, первая узловая точка сейш тем ближе к левой границе ( $x = 0$ ), чем больше номер моды.

2. Рассмотрим вынужденные колебания жидкости. Тогда в задаче (5), (6) должны удовлетворяться отличные от нуля граничные условия. Найдем методом Рунге — Кутта два фундаментальных решения  $\bar{u}_1(x)$  и  $\bar{u}_2(x)$  дифференциального уравнения (5) с граничными условиями:

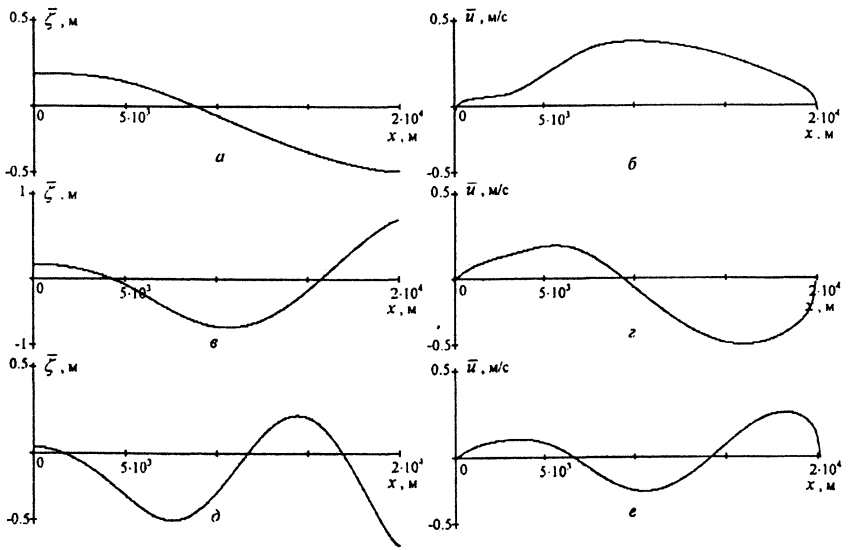
$$\bar{u}_1(0) = 1, \bar{u}_1'(0) = 0; \quad \bar{u}_2(0) = 0, \bar{u}_2'(0) = 1. \quad (7)$$

При этом общее решение уравнения (5) запишем так:  $\bar{u}(x) = C_1 \bar{u}_1(x) + C_2 \bar{u}_2(x)$ , где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

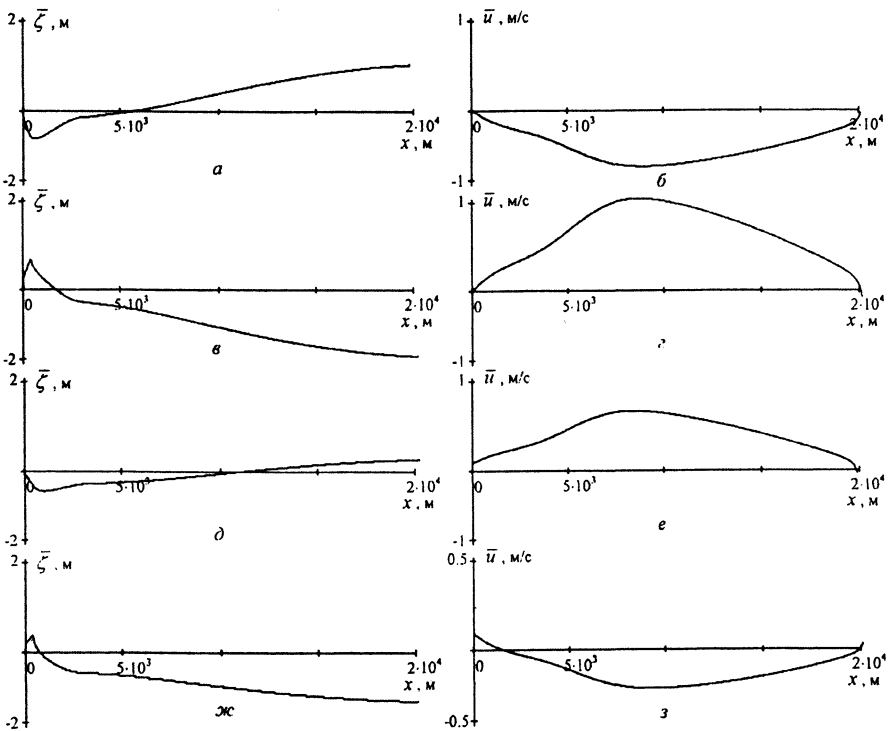
Пусть при  $x = 0$  имеет место периодическое колебание жидкости с амплитудой 0,1 м, а при  $x = l$  — твердая стенка. Тогда граничные условия для функции  $\bar{u}(x)$  ( $\bar{u}(0) = 0,1$ ;  $\bar{u}(l) = 0$ ) удовлетворяем за счет соответствующего выбора произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Для отыскания амплитудной функции профиля свободной поверхности  $\bar{\zeta}(x)$  используем ее выражение

$$\text{через } \bar{u}(x): \bar{\zeta}(x) = -\frac{1}{2\sigma b(x)} \frac{d}{dx} [\bar{u}(x) S(x)].$$

На рис. 2 приведены профили амплитуд свободных колебаний свободной поверхности и горизонтальной скорости. При этом максимальное значение  $|\bar{u}(x)|$  для всех трех мод выбрано одинаковым, равным 50 см/с, и максимумы амплитуд для первой, второй и третьей мод равны 1,2; 1 и 0,8 м соответственно. Таким образом, максимальные значения  $|\bar{\zeta}(x)|$  при одном и том же значении максимума  $|\bar{u}(x)|$  убывают с увеличением номера моды. Характерно, что абсолютные максимумы отклонения профиля свободной



Р и с. 2. Профили амплитуд свободной поверхности и горизонтальной скорости для первых трех мод свободных колебаний: *а, б* — первая; *в, г* — вторая; *д, е* — третья



Р и с. 3. Амплитудные функции свободной поверхности  $\zeta(x)$  и скорости  $u(x)$  для значений периодов, отличающихся на  $\pm 5$  и  $\pm 15$  мин от резонансного периода первой моды ( $\tau_1$ ): *а, б* —  $\tau = \tau_1 - 5$  мин; *в, г* —  $\tau = \tau_1 + 5$  мин; *д, е* —  $\tau = \tau_1 - 15$  мин; *ж, з* —  $\tau = \tau_1 + 15$  мин

2.1. Найдем несколько решений для ряда значений периодов вынужденных колебаний. Выберем  $\tau$ , близкие к резонансным периодам свободных колебаний. Зададим значения периодов, отличающиеся на  $\pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 15$  и  $\pm 20$  мин от периода свободных колебаний первой моды  $\tau_1$ .

Графики амплитуд скорости, рассчитанные для периодов, меньших резонансного ( $\tau = \tau_1 - 5$  мин и  $\tau = \tau_1 - 15$  мин), представлены на рис. 3, б, е соответственно. Эти кривые убывают от 10 см/с (значения амплитуды скорости вынужденных колебаний на границе  $x = 0$ ), достигают единственного минимума и затем возрастают до 0 м/с — значения скорости на твердой границе  $x = l$ . На рис. 3, г, з представлены графики функции  $\bar{u}(x)$ , рассчитанные для периодов, больших резонансного ( $\tau = \tau_1 + 5$  мин и  $\tau = \tau_1 + 15$  мин). Они представляют собой кривые, которые возрастают от значения, заданного на левой границе озера ( $x = 0$ ), имеют один максимум и убывают до нуля при  $x = l$ .

Таким образом, амплитудная функция скорости волны с периодом меньше резонансного ( $\tau < \tau_1$ ) находится в противофазе с функцией скорости волны, которая имеет период больше резонансного ( $\tau > \tau_1$ ).

Профили амплитуд вынужденных колебаний представляют собой одноузловые сейши, имеющие один максимум и один минимум. Сравнивая профили амплитуд свободной поверхности для периодов  $\tau < \tau_1$  (рис. 3, а, д) с профилями амплитуд  $\bar{\zeta}(x)$  с периодами  $\tau > \tau_1$  (рис. 3, в, ж), можно отметить, что аналогично профилям  $\bar{u}(x)$  фазы этих волн противоположны.

Анализ результатов расчетов показывает (табл. 1), что для значений  $\tau$ , приближающихся справа и слева к резонансному значению периода первой моды, максимумы  $|\bar{u}(x)|$  нарастают. Для  $\tau = \tau_1 + 20$  мин абсолютный максимум амплитуды скорости равен 0,476 м/с, а для  $\tau = \tau_1 + 5$  мин он составляет 1,596 м/с. Отсюда следует, что при уменьшении периода на 15 мин происходит увеличение амплитуды скорости волны на 235%. При этом граничные условия для функции  $\bar{u}(x)$  остаются одними и теми же. Чем дальше от резонансного периода выбран период возмущающих колебаний, тем меньше максимум амплитуды скорости. При  $\tau = \tau_1 + \Delta$  максимумы больше и лежат левее, чем при  $\tau = \tau_1 - \Delta$  для всех рассмотренных значений  $\Delta$ .

Отметим, что выбор периодов колебаний не существенно влияет на изменение координат максимумов  $|\bar{u}(x)|$ . Координата точки максимума перемещается к границе  $x = 0$  с увеличением периода. Амплитуда скорости достигает абсолютного максимума для наименьшего из рассматриваемых периодов ( $\tau = \tau_1 - 20$  мин) при  $x = 9,6$  км, для наибольшего ( $\tau = \tau_1 + 20$  мин) — при  $x = 8,4$  км. Координата максимума  $|\bar{u}(x)|$  смещается при этом изменении  $\tau$  влево на 1,2 км, или на 13 %.

## Абсолютные значения и координаты максимумов амплитуд скорости

Период	$\max \bar{u}(x) $ , м/с	$x_{\max}$ , м
$\tau_1 - 20$ мин	0,285	$9,641 \cdot 10^3$
$\tau_1 - 15$ мин	0,408	$9,333 \cdot 10^3$
$\tau_1 - 10$ мин	0,656	$9,094 \cdot 10^3$
$\tau_1 - 8$ мин	0,842	$9,013 \cdot 10^3$
$\tau_1 - 5$ мин	1,401	$8,905 \cdot 10^3$
$\tau_1 + 5$ мин	1,596	$8,628 \cdot 10^3$
$\tau_1 + 8$ мин	1,035	$8,564 \cdot 10^3$
$\tau_1 + 10$ мин	0,848	$8,525 \cdot 10^3$
$\tau_1 + 15$ мин	0,600	$8,438 \cdot 10^3$
$\tau_1 + 20$ мин	0,476	$8,363 \cdot 10^3$

Таким образом, если период возмущающих колебаний приближается к резонансному, то скорости волновых возмущений возрастают. Однако положения максимумов  $|\bar{u}(x)|$  слабо зависят от приближения рассматриваемого периода к резонансному  $\tau_1$ .

Т а б л и ц а 2

Значения и координаты максимумов и минимумов амплитуд  
профиля свободной поверхности и отклонение  $\bar{\zeta}(x)$   
на правой границе озера ( $x = l$ )

Период	$\max \bar{\zeta}(x)$ , м	$x_{\max}$ , м	$\min \bar{\zeta}(x)$ , м	$x_{\min}$ , м	$ \bar{\zeta}(l) $ $l=20$ км
$\tau_1 - 20$ мин	0,333	$1,998 \cdot 10^4$	-0,211	$1,135 \cdot 10^3$	0,297
$\tau_1 - 15$ мин	0,468	$1,994 \cdot 10^4$	-0,274	$1,019 \cdot 10^3$	0,431
$\tau_1 - 10$ мин	0,783	$1,998 \cdot 10^4$	-0,404	871,443	0,715
$\tau_1 - 8$ мин	0,984	$1,994 \cdot 10^4$	-0,507	796,410	0,905
$\tau_1 - 5$ мин	1,701	$1,994 \cdot 10^4$	-0,831	645,601	1,521
$\tau_1 + 5$ мин	1,333	387,478	-1,954	$1,994 \cdot 10^4$	1,793
$\tau_1 + 8$ мин	0,952	387,481	-1,279	$1,994 \cdot 10^4$	1,176
$\tau_1 + 10$ мин	0,812	387,481	-1,057	$1,994 \cdot 10^4$	0,971
$\tau_1 + 15$ мин	0,666	387,480	-0,784	$1,998 \cdot 10^4$	0,701
$\tau_1 + 20$ мин	0,378	387,479	-0,618	$1,994 \cdot 10^4$	0,568

Координаты максимумов и минимумов профиля волны  $\bar{\zeta}(x)$ , соответствующие выбранным величинам  $\tau$ , и значения  $\bar{\zeta}(x)$  на правой границе озера даны в табл. 2. Эти данные рассчитаны для  $\tau_1 - 20 \text{ мин} \leq \tau \leq \tau_1 + 20 \text{ мин}$ . Как видно, распределение амплитуд свободной поверхности имеет один максимум и один минимум. Максимумы и минимумы  $\bar{\zeta}(x)$  возрастают, когда выбранный период приближается к резонансному. Профили амплитуд с периодами  $\tau > \tau_1$  находятся в противофазе к  $\bar{\zeta}(x)$  для периодов  $\tau < \tau_1$ . Максимум  $|\bar{\zeta}(x)|$  достигается у твердой стенки ( $x = l$ ).

Координаты минимумов  $|\bar{\zeta}(x)|$  перемещаются с увеличением  $\tau$  к границе  $x = 0$ . Для наименьшего из рассматриваемых периодов ( $\tau = \tau_1 - 20 \text{ мин}$ ) абсолютный минимум достигнут при  $x = 1,1 \text{ км}$ , для наибольшего периода ( $\tau = \tau_1 + 20 \text{ мин}$ ) — при  $x = 387 \text{ м}$ . Итак, минимум амплитуды волны переместился влево на 747 м, или на 65 % при увеличении  $\tau$  от  $\tau_1 - 20 \text{ мин}$  до  $\tau_1 + 20 \text{ мин}$ .

2.2. Проведены аналогичные расчеты для периодов возмущающих колебаний, близких к значению  $\tau_2$  — периода второй моды свободных колебаний. Величины периодов отличаются на  $\pm 1, \pm 2, \pm 5 \text{ мин}$  от  $\tau_2$ .

Анализируя данные, приведенные в табл. 3, отмечаем, что чем дальше от резонансного периода выбран период возмущающих колебаний, тем меньше максимум амплитуды скорости. Для  $\tau = \tau_2 + 5 \text{ мин}$  максимум амплитуды скорости равен 0,159 м/с, а для  $\tau = \tau_2 + 1 \text{ мин}$  он составляет 0,681 м/с. Отсюда видно, что при уменьшении периода на 4 мин, произошло увеличение амплитуды скорости волны на 0,522 м/с, или на 328 %. В то же время положение максимумов  $|\bar{u}(x)|$  мало изменяется при приближении рассматриваемого периода к  $\tau_2$ . При  $\tau = \tau_2 + \Delta$  максимумы больше и лежат левее, чем при  $\tau = \tau_2 - \Delta$  для всех рассмотренных значений  $\Delta$ . Так, для наименьшего из периодов ( $\tau = \tau_2 - 5 \text{ мин}$ ) амплитуда скорости достигает максимума при  $x = 1,5 \text{ км}$ , для наибольшего ( $\tau = \tau_2 + 5 \text{ мин}$ ) — при  $x = 1,7 \text{ км}$ . Следовательно, максимум  $|\bar{u}(x)|$  перемещается при таком изменении  $\tau$  на 0,2 км влево.

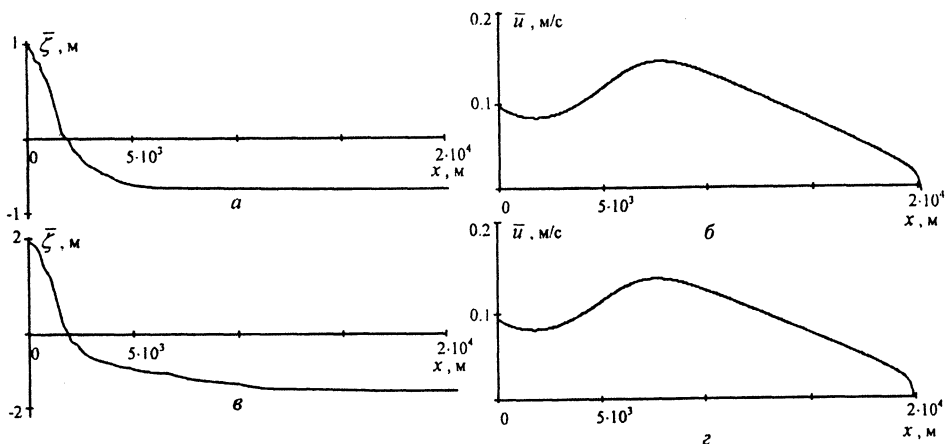
Максимум амплитуд свободной поверхности с периодами  $\tau > \tau_2$  и периодами  $\tau < \tau_2$  достигается на твердой стенке ( $x = l$ ). Для всех рассмотренных  $\tau$  максимум  $|\bar{\zeta}(x)|$  возрастает при приближении к резонансному периоду. Для  $\tau = \tau_2 + 5 \text{ мин}$  максимум амплитуды свободной поверхности равен 0,18 м, а для  $\tau = \tau_2 + 1 \text{ мин}$  он составляет 0,76 м. Отсюда видно, что при уменьшении периода на 4 мин, произошло увеличение амплитуды волны на 0,58 м, или в 4,2 раза.

Значения и координаты максимумов амплитуд скорости и профиля свободной поверхности и отклонение  $\zeta(x)$  на правой границе озера ( $x = l$ )

Период	$\max \bar{u}(x) , \text{ м/с}$	$x_{\max}, \text{ м}$	$\max \bar{\zeta}(x) , \text{ м}$	$x_{\max}, \text{ м}$	$ \bar{\zeta}(l) $ $l = 20 \text{ км}$
$\tau_2 - 5 \text{ мин}$	0,129	$1,679 \cdot 10^4$	0,137	$1,994 \cdot 10^4$	0,127
$\tau_2 - 2 \text{ мин}$	0,319	$1,635 \cdot 10^4$	0,343	$1,994 \cdot 10^4$	0,316
$\tau_2 - 1 \text{ мин}$	0,647	$1,620 \cdot 10^4$	0,699	$1,994 \cdot 10^4$	0,643
$\tau_2 + 1 \text{ мин}$	0,681	$1,590 \cdot 10^4$	0,761	$1,998 \cdot 10^4$	0,680
$\tau_2 + 2 \text{ мин}$	0,352	$1,575 \cdot 10^4$	0,394	$1,998 \cdot 10^4$	0,353
$\tau_2 + 5 \text{ мин}$	0,159	$1,530 \cdot 10^4$	0,180	$1,998 \cdot 10^4$	0,161

2.3. Найдем несколько решений для значений периодов возмущающих колебаний, намного превышающих период первой моды. Выберем  $\tau$  равными 3, 6, 9, 12, 18, 24, 36 и 48 ч.

Профили горизонтальной скорости, вычисленные для периодов возмущающих колебаний, намного превышающих резонансный период первой моды, находятся в одной фазе. Это кривые (рис. 4, б, з), которые возрастают от значения, заданного на левой границе, имеют один максимум и убывают до значения, заданного на правой границе  $x = l$  ( $\bar{u}(l) = 0$ ).



Р и с. 4. Профили амплитуд свободной поверхности и горизонтальной скорости для периодов, много больших резонансных: а, б — 6 ч; в, з — 12 ч

Профили амплитуд свободной поверхности представляют собой кривые, имеющие одну узловую точку, один максимум и один минимум. Для всех рассмотренных периодов они находятся в одной фазе (рис. 4, а, в).

На основании данных, приведенных в табл. 4, видим, что при увеличении периода колебаний максимумы амплитуд скорости уменьшаются от



0,2 до 0,13 м/с. Это уменьшение составляет 0,07 м/с, или 35 %. Точка максимума, рассчитанная для периода  $\tau = 3$  ч, имеет координату 7,9 км. С увеличением периода она смещается влево и для  $\tau = 12$  ч имеет координату 7,6 км. Таким образом, увеличение периода возмущающих колебаний влечет уменьшение максимума  $|\bar{u}(x)|$ , но не существенно влияет на положение его координаты.

Т а б л и ц а 4

**Значения и координаты максимумов амплитуд скорости в соответствии с начальной скоростью  $u(0)$  и максимумы отклонений  $\zeta(x)$  вдоль озера и на его правой границе ( $x = l$ )**

Период, ч	$\bar{u}(0)$ , м/с	$\max \bar{u}(x) $ , м/с	$x_{\max}$ , м	$\max \bar{\zeta}(x) $ , м	$ \bar{\zeta}(l) $ , $l = 20$ км
3	0,10	0,211	$7,965 \cdot 10^3$	0,535	0,318
6	0,10	0,149	$7,707 \cdot 10^3$	1,074	0,411
9	0,10	0,141	$7,662 \cdot 10^3$	1,604	0,575
12	0,10	0,138	$7,647 \cdot 10^3$	2,139	0,748
18	0,05	0,068	$7,636 \cdot 10^3$	1,604	0,552
24	0,05	0,068	$7,632 \cdot 10^3$	2,139	0,732
36	0,02	0,027	$7,629 \cdot 10^3$	1,283	0,437
48	0,02	0,027	$7,628 \cdot 10^3$	1,171	0,528

Профили амплитуд свободной поверхности (рис. 4) имеют один максимум и один минимум. Максимальное значение амплитуды  $|\bar{\zeta}(x)|$  имеет место на левой границе  $x = 0$  (табл. 4). Это значение растет с увеличением периода возмущающих колебаний. Для  $\tau = 3$  ч амплитудный максимум равен 0,54 м, для  $\tau = 12$  ч — 2,14 м, т. е. он вырос на 1,6 м, или в 3,9 раза. Координаты максимумов и минимумов отклонений профиля  $\bar{\zeta}(x)$  при выборе различных значений периодов изменяются мало.

3. Решим задачу о колебаниях жидкости, возникающих от начальных возмущений профиля свободной поверхности. Рассмотрим ту же модель оз. Донузлав, но проведем расчеты при условии, что горизонтальные составляющие скорости и профиль свободной поверхности зависят от трех переменных  $x, y$  и  $t$ . При этом функция глубины бассейна задается так:

$$H(x, y) = \tilde{h}_0(x) \cos \frac{\pi y}{2b(x)} + h_1, \text{ где } \tilde{h}_0(x) \text{ — глубина озера вдоль оси } x \text{ и}$$

$$\tilde{h}_0(0) = \tilde{h}_0(l) = 0, h_1 = 0,5 \text{ м — высота стенки (рис 1, в).}$$

Для определения компонент скорости  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  и профиля свободной поверхности  $\zeta(x, y, t)$  имеем следующую систему уравнений [2]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} \right], \quad \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = F_y, \quad (8)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $F_x = \mu u$ ,  $F_y = \mu v$  — составляющие сил диссипации;  $\mu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  — коэффициент диссипации.

Опишем границы озера (рис. 1, а) функциями  $y_1(x) = b(x)$  и  $y_2(x) = -b(x)$ . Из задания  $H(x, y)$  видно, что при  $x = 0$  и  $x = l$  ( $l = 2 \cdot 10^4$  м) и  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  имеют место твердые вертикальные стенки высотой 0,5 м.

При  $x = 0$  и  $x = l$  граничные условия для составляющей скорости  $u(x, y, t)$  имеют вид:

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

для составляющей скорости  $v_n(x, y, t)$  на границах  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  граничные условия записываются так:

$$v_n(x, y, t)|_{y=y_1(x)} = v_n(x, y, t)|_{y=y_2(x)} = 0. \quad (10)$$

В качестве начальных условий для функции  $\zeta(x, y, t)$  в момент времени  $t = t_0 = 0$  выбрано возмущение, которое задается аналитическим выражением:

$$\zeta(x, y, 0) = \begin{cases} a_0 \cos^2 \frac{\pi r}{2R}, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (11)$$

где  $R = 500$  м — радиус начального возвышения,  $a_0 = 1$  м — его максимальная амплитуда,  $r$  — расстояние от центра возмущения до точки с координатами  $(x, y)$ . Центр начального возвышения находится в точке с координатами  $x = 3$  км,  $y = 0$ . В области  $r > R$  свободная поверхность при  $t = 0$  находится в невозмущенном состоянии.

Аналитическое решение задачи (8) с граничными и начальными условиями (9) — (11) неизвестно, поэтому получим численное решение этой задачи с помощью разностной схемы, аппроксимирующей уравнения теории мелкой воды [10].

Для реализации схемы перейдем от переменных  $x, y, t$  к новым переменным [11]:

$$x^* = x, \quad t^* = t, \quad \sigma = \frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)}, \quad (12)$$

где  $\sigma \in [0; 1]$ . Отметим, что в новых переменных границы канала будут прямоугольными. С учетом того, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} \right] = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{1}{D(x)},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{y - y_1(x)}{D(x)} \right] = \frac{1}{D^2(x)} \left\{ -D(x) \frac{dy_1(x)}{dx} - [y - y_1(x)] \frac{dD(x)}{dx} \right\} =$$

$$= - \left[ \frac{1}{D(x)} \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{\sigma}{D(x)} \frac{dD(x)}{dx} \right],$$

$$D(x) = y_2(x) - y_1(x),$$

$$B(x, \sigma) = y_1(x) + \sigma D(x),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^*} = - \frac{1}{D(x)} \frac{\partial B}{\partial x^*},$$

преобразованная система (8) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{1}{D} \left\{ \frac{\partial(DHu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ (Hv) - (Hu) \frac{\partial B}{\partial x} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right) = F_x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{g}{D} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right) = F_y. \quad (14)$$

Аппроксимируем систему (13), (14) разностной схемой [10]:

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{D} \left[ \frac{\Delta_{+x}}{\Delta x} \left( \overline{D^x H^x} u_{i,j}^n \right) + \frac{\Delta_{+\sigma}}{\Delta \sigma} \left( \overline{D^\sigma H^\sigma} v_{i,j}^n - \overline{H^\sigma} u_{i,j}^n \frac{\Delta_{+x} B}{\Delta x} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + g \left( \frac{\Delta_{-x}}{\Delta x} \zeta_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{D} \frac{\Delta_{-x} B}{\Delta x} \frac{\Delta_{-\sigma}}{\Delta \sigma} \zeta_{i,j}^{n+1} \right) - \mu u_{i,j}^{n+1} = 0,$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{g}{D} \frac{\Delta_{-\sigma}}{\Delta \sigma} \zeta_{i,j}^{n+1} - \mu v_{i,j}^{n+1} = 0.$$

Схема, построенная на разнесенном шаблоне, в сочетании с центрально-разностной аппроксимацией пространственных производных упрощает численную реализацию граничных условий:

$$[\zeta(x, y, t)]_{i,j}^n = \zeta_{i,j}^n = \zeta(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t),$$

$$[u(x, y, t)]_{i,j}^n = u_{i,j}^n = u\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right],$$

$$[v(x, y, t)]_{i,j}^n = v_{i,j}^n = v\left[i\Delta x, \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right].$$

В расчетной области вводится сетка с пространственными интервалами  $\Delta x$ ,  $\Delta \sigma$  и с шагом по времени  $\Delta t$ . Операторы сдвига  $T$  и  $E$  определяются так:

$$T_{+x}\varpi = \varpi(x + \Delta x, y, t), \quad T_{+y}\varpi = \varpi(x, y - \Delta y, t),$$

$$T_{-x}\varpi = \varpi(x - \Delta x, y, t), \quad T_{-y}\varpi = \varpi(x, y + \Delta y, t), \quad E\varpi = \varpi(x, y, t);$$

разностный оператор  $\Delta$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{+x}\varpi &= (T_{+x} - E)\varpi, & \Delta_{-x}\varpi &= (E - T_{-x})\varpi, & \Delta_{+y}\varpi &= (T_{+y} - E)\varpi, \\ \Delta_{-y}\varpi &= (E - T_{-y})\varpi, & \overline{\varpi}^x &= \frac{1}{2}(E + T_{+x})\varpi, & \overline{\varpi}^y &= \frac{1}{2}(E + T_{+y})\varpi. \end{aligned}$$

Алгоритм реализации схемы заключается в нахождении по известным значениям  $u^n$ ,  $v^n$ ,  $\zeta^n$  значения  $\zeta^{n+1}$ , затем по  $u^n$ ,  $v^n$  и  $\zeta^{n+1}$  вычисляются значения скоростей на  $(n + 1)$ -м временном слое.

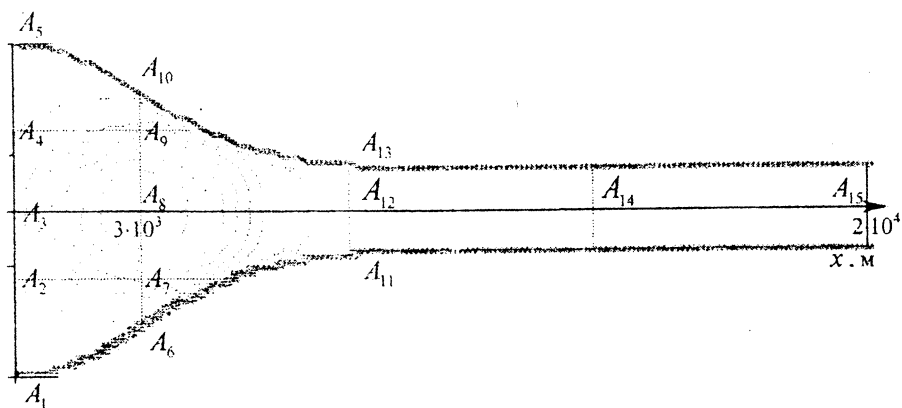
Данная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространственным переменным. Критерий устойчивости схемы задается следующим неравенством:

$$\Delta t^* \leq \left\{ \sqrt{gH_{\max} \left[ (\Delta x^*)^{-2} + (\Delta \sigma)^{-2} \right]} \right\}^{-1},$$

где  $H_{\max} = \max[H(x, y)] = 15$  м достигается при  $x = 3$  км,  $y = 0$ .

В результате численных расчетов найдены функции  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  и  $\zeta(x, y, t)$ , рассчитанные для 48 ч.

На рис. 5 отмечены точки  $A_1 - A_{15}$ , в которых фиксировалось изменение амплитуд отклонения свободной поверхности. Поскольку начальное возвышение и границы канала симметричны относительно оси  $x$  и центр возмущения лежит на этой оси, то амплитуды отклонений  $\zeta(x, y, t)$  в симметричных относительно оси  $x$  точках одинаковы. В табл. 5 приведены экстремумы амплитуд и моменты времени, в которые они наступили, при этом приводятся данные только об одной из пары симметричных точек на границе, а также о точках вдоль озера.



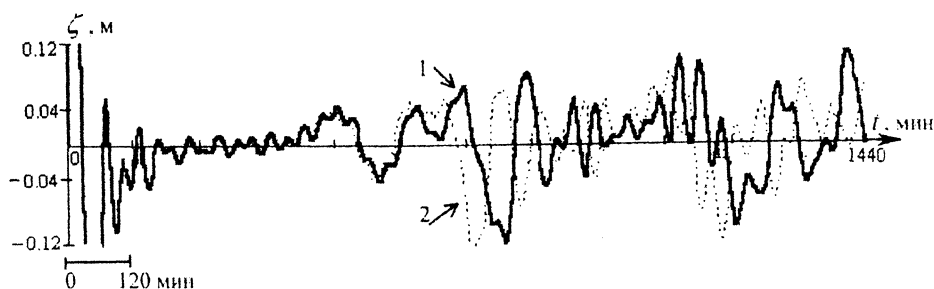
Р и с. 5. Точки  $A_1 - A_{15}$ , в которых фиксировалось изменение амплитуд отклонений свободной поверхности, вызванное колебаниями, возникающими в результате начального возмущения профиля свободной поверхности

Экстремальные значения амплитуд волн и соответствующие им моменты времени

$A_1$		$A_2$		$A_3$		$A_6$		$A_7$		$A_8$		$A_{12}$		$A_{14}$		$A_{15}$	
$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин	$\zeta$ , м	$t$ , ч, мин
0,08	12,39	0,21	5,12	0,12	3,50	0,12	8,06	0,17	1,39	1,00	0,01	0,11	2,32	0,05	5,52	0,04	9,20
-0,02	15,31	-0,24	6,03	-0,09	5,49	-0,23	9,47	-0,12	2,43	-0,58	0,48	-0,09	3,27	-0,04	6,48	-0,02	10,43
0,14	17,33	0,09	6,42	0,06	6,27	0,13	10,36	0,06	10,43	0,05	1,07	0,07	10,36	0,06	10,17	0,09	12,47
-0,22	20,01	-0,13	15,57	-0,05	7,01	-0,15	14,07	-0,07	11,55	-0,14	1,32	-0,14	11,45	-0,11	11,22	-0,14	14,50
0,13	21,32	0,15	17,02	0,06	15,01	0,08	15,34	0,06	12,57	0,04	8,06	0,04	12,34	0,07	16,18	0,09	15,25
-0,26	22,52	-0,21	18,05	-0,13	16,58	-0,05	16,51	-0,06	14,45	-0,05	9,17	-0,06	19,50	-0,08	17,29	-0,14	19,55
0,46	23,40	0,22	19,24	0,11	19,55	0,07	17,58	0,05	15,21	0,06	11,56	0,09	20,51	0,07	23,10	0,11	20,52
-0,41	23,56	-0,05	21,16	-0,06	23,07	-0,06	20,56	-0,04	23,03	-0,11	13,22	-0,03	23,13	-0,06	27,01	-0,06	22,57
0,23	25,01	0,09	23,51	0,07	23,18	0,08	22,01	0,03	23,30	0,09	13,51	0,05	23,04	0,07	28,16	0,06	23,26
-0,30	40,37	-0,08	24,04	-0,12	24,54	-0,11	23,14	0,12	25,32	-0,10	20,04	-0,06	24,01	-0,05	33,05	-0,25	27,18
0,24	43,18	0,09	25,30	0,11	25,27	0,16	27,08	-0,13	29,35	0,11	23,32	0,08	26,02	0,07	42,02	0,22	34,02
-0,08	46,59	-0,09	30,58	-0,05	29,24	-0,18	35,17	-0,04	39,22	-0,11	30,01	-0,09	40,03	-0,08	43,02	-0,08	44,58
—	—	0,19	31,50	0,12	31,09	0,15	40,18	0,06	45,38	0,09	20,53	0,05	43,41	0,08	46,49	0,04	47,35
—	—	-0,26	32,33	-0,08	33,04	-0,07	46,04	-0,02	47,32	-0,04	37,01	-0,04	47,35	—	—	—	—
—	—	0,22	33,21	0,12	36,57	0,14	47,02	—	—	0,05	38,21	—	—	—	—	—	—
—	—	-0,17	35,24	-0,11	39,32	—	—	—	—	-0,06	40,46	—	—	—	—	—	—
—	—	0,14	44,44	0,11	45,00	—	—	—	—	0,12	41,44	—	—	—	—	—	—
—	—	-0,13	47,32	-0,14	46,08	—	—	—	—	-0,04	47,57	—	—	—	—	—	—

Проанализируем время затухания амплитуд  $\zeta(x, y, t)$  от начального значения до величины, не превышающей 0,1 м, по данным, приведенным в табл. 5. Для точки  $A_1$  это время составляет 45 ч 48 мин, точки  $A_2$  — 45 ч 04 мин,  $A_3$  — 30 ч 12 мин,  $A_6$  — 38 ч 02 мин,  $A_7$  — 13 ч 01 мин,  $A_8$  — 45 ч 55 мин,  $A_{12}$  — 34 ч 56 мин,  $A_{14}$  — 13 ч 03 мин,  $A_{15}$  — 16 ч 36 мин. Следовательно, время затухания максимумов амплитуд больше для тех точек, которые расположены на границе бассейна. Наивысший период затухания имеет место в центре начального возвышения. Расчеты показали, что в точках на границах бассейна максимумы амплитуд волн больше, чем в его внутренних точках.

Было получено решение этой задачи для вертикальных стенок на границах бассейна  $h_1 = 1$  м. При этом максимальные значения амплитуд отклонения свободной поверхности в тех же точках  $A_1$  —  $A_{15}$  (рис. 5) увеличиваются в среднем на 3 — 8 % по сравнению с амплитудами, рассчитанными для бассейна с вертикальной стенкой  $h_1 = 0,5$  м. Время затухания амплитуды свободной поверхности уменьшается на 1 — 2% в бассейне, ограниченном более высокими вертикальными стенками. На рис. 6 приведены графики амплитуды волны в точке  $A_8$  для значений  $h_1 = 0,5$  м и  $h_1 = 1$  м.



Р и с. 6. Графики амплитуд отклонений свободной поверхности в точке  $A_8$  при  $h_1 = 0,5$  м (кривая 1) и  $h_1 = 1$  м (кривая 2)

Сформулируем кратко основные выводы:

- максимальные значения амплитуд свободных колебаний достигаются на правой границе озера ( $x = l$ );
- максимальные значения амплитуд свободных колебаний убывают по абсолютной величине с увеличением номера моды;
- узловые точки сейш с увеличением номера моды сдвигаются к левой границе озера ( $x = 0$ );
- максимальное значение амплитуды вынужденной волны имеет место на правой границе озера ( $x = l$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.: ОНТИ, 1936.—303с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. — 948 с.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1955. — 560 с.
4. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. — М.: Мир, 1981. — 680 с.
5. *Гидродинамика береговой зоны и эстуариев /* Под ред. А.Т. Иппена. — Л.: Гидрометеоздат, 1970.— 394 с.
6. *Черкесов Л. В.* Основы динамики несжимаемой жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984.— 164 с.
7. *Черкесов Л.В., Иванов В.А, Хартиев С.М.* Введение в гидродинамику и теорию волн. — СПб.: Гидрометеоздат, 1992. — 264 с.
8. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Численные методы анализа. — М.: Наука, 1963. — 512 с.
9. *Милн В.Э.* Численное решение дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 138 с.
10. *Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.* Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука, 1983. — 174 с.
11. *Вольцингер Н.Е.* Длинные волны на малой воде. — Л.: Гидрометеоздат, 1985. — 158 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
Морское отделение Украинского научно-исследовательского  
гидрометеорологического института,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 29.11.04

**ABSTRACT** Within the framework of the linear theory and using the numerical methods studied are the free and forced waves in a bounded basin whose geometrical characteristics approximately correspond to the Donuzlav Lake. The fluid fluctuating motions at the entrance to the lake are assumed to be a constraining force. Dependence of the amplitudes of the generated waves upon the parameters of the constraining force is analyzed.