

Затухание нелинейных колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины

Выполнено исследование временного затухания сгонно-нагонных колебаний жидкости в мелководном круглом бассейне переменной глубины. Проведен анализ зависимости логарифмического декремента затухания от формы рельефа дна и скорости ветра. Дана оценка роли конвективного ускорения и придонного трения в формировании уровня вертикального смещения поверхности бассейна и поля скорости горизонтальных волновых течений.

Введение. Исследованию гидродинамических процессов в ограниченных бассейнах посвящено значительное количество публикаций. В частности, вызванные ветром возмущения воды в ограниченном бассейне малой постоянной глубины рассмотрены в [1], где построена численная модель, предназначенная для решения дифференциальных уравнений, определяющих неустановившийся приливной поток в мелких прибрежных районах и вызванную ветром циркуляцию воды в озерах и резервуарах. В приближении теории длинных волн сейшевые колебания в Черном и Азовском морях изучались в [2, 3]. На основе метода конечных элементов в работе [4] рассмотрено движение воды, вызванное касательными напряжениями ветра в круглом бассейне конечной глубины без учета придонного трения и конвективного ускорения.

В данной работе выполнено исследование временного затухания сгонно-нагонных колебаний жидкости в мелководном круглом бассейне переменной глубины. Проведен анализ зависимости логарифмического декремента затухания от формы рельефа дна и скорости ветра. Дана оценка роли конвективного ускорения и придонного трения в формировании уровня вертикального смещения поверхности бассейна и поля скорости горизонтальных волновых течений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о динамике воды в замкнутых водоемах переменной глубины. За основу математической модели примем проинтегрированные по вертикали уравнения движения мелкой воды, записанные через две компоненты горизонтального потока количества жидкости $q_{1,2}$ и сумму H отклонения свободной поверхности ζ от невозмущенного уровня и глубины h бассейна [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) &= B_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_2^2}{H} \right) &= B_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$B_1 = f q_2 + \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{C^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial (H-h)}{\partial x} - H \frac{\partial P_a}{\partial x},$$

$$B_2 = -f q_1 + \gamma^2 \rho_a W^2 \sin \theta - \left(\frac{g}{C^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}{H^2} - \rho g H \frac{\partial (H-h)}{\partial y} - H \frac{\partial P_a}{\partial y}.$$

Уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial (\rho H)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Здесь $q_1 = \rho \int_{-h}^{\zeta} v_x dz$, $q_2 = \rho \int_{-h}^{\zeta} v_y dz$ (v_x, v_y — мгновенные скорости жидких частиц), g — ускорение силы тяжести, f — параметр Кориолиса, C — коэффициент трения (или коэффициент Шези), γ — коэффициент ветрового напряжения, W — скорость ветра, θ — угол между осью x и направлением ветра, P_a — атмосферное давление на поверхности воды, ρ и ρ_a — плотность воды и воздуха соответственно. Для решения полученной системы дополним ее граничными и начальными условиями. На твердой границе зададим условие непротекания

$$q_n = 0. \quad (3)$$

Начальные условия могут быть записаны в виде

$$H(x, y, t = 0) = H_0, \quad q_1(x, y, t = 0) = q_{01}, \quad q_2(x, y, t = 0) = q_{02}. \quad (4)$$

Сформулируем конечно-элементную постановку рассматриваемой задачи [4, 5, 6]. Если для $q_{1,2}$ и H применяются одни и те же интерполяционные функции ϕ , т. е.

$$q_1 = \Phi^T \mathbf{q}_1^n, \quad q_2 = \Phi^T \mathbf{q}_2^n, \quad H = \Phi^T \mathbf{H}^n,$$

то уравнения движения для одного элемента A представляются в матричном виде:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_1^{n,T} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}_1^n}{\partial t} - \mathbf{F}_1 \right) &= 0, \\ \delta \mathbf{q}_2^{n,T} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}_2^n}{\partial t} - \mathbf{F}_2 \right) &= 0, \\ \delta \mathbf{H}^{n,T} \left(\mathbf{M}^* \frac{\partial \mathbf{H}^n}{\partial t} - \mathbf{F}_H \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \iint \varphi \varphi^T dA; \quad \mathbf{M}^* = \iint \rho \varphi \varphi^T dA, \\ \mathbf{F}_1 &= \iint (\varphi B_1 - \varphi A_1) dA, \\ \mathbf{F}_2 &= \iint (\varphi B_2 - \varphi A_2) dA, \\ \mathbf{F}_H &= \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} q_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} q_2 \right) dA, \end{aligned} \quad (6)$$

A_1 и A_2 — конвективные части полных производных

$$A_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1^2}{H} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right), \quad A_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_1 q_2}{H} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_2^2}{H} \right), \quad (7)$$

δq_1 , δq_2 , δH — вариации, удовлетворяющие граничным условиям для массового расхода и возвышения свободной поверхности. Знак T означает транспонирование.

Для численного интегрирования по элементу A в слагаемых, описывающих придонное трение и конвективное ускорение, осуществлен переход в косоугольные координаты, позволяющий применить к уравнениям (6) метод трепещей.

Численная реализация сформулированной задачи выполнена для круглого бассейна, радиус которого составляет 1000 м, и различных форм рельефа дна. Расчетная область и варианты морфологии дна аналогичны представленным в работе [4]. Рассмотрены случаи плоского дна при $h = 5$ м (вариант 1), параболического выпуклого (вариант 2) и вогнутого (вариант 3) дна. В варианте 2 глубина в центре водоема $h_{ц} = 5$ м, а по краям $h_6 = 10$ м, в варианте 3 соответственно $h_{ц} = 10$ м, $h_6 = 5$ м. Шаг по времени принимался $\Delta t = 5$ с в соответствии с критерием $\Delta t < \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta x (gh)^{-1/4}$.

В связи с относительно небольшими линейными размерами рассматриваемого бассейна влияние вращения Земли не учитывалось. Величина атмосферного давления P_a принималась постоянной. Поле касательных напряжений ветра считалось однородным на всей поверхности бассейна при коэффициенте ветрового напряжения $\gamma^2 = 0,0026$ [7]. Скорость ветра и значение коэффициента трения (коэффициента Шези) изменялись в интервалах 1 – 12 м/с, 5 – 50 соответственно.

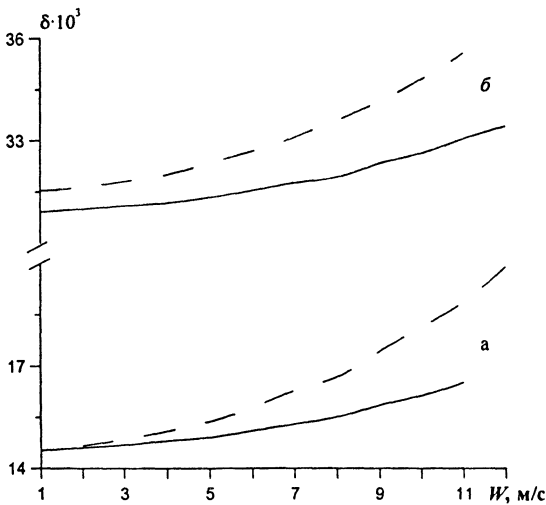
Анализ результатов численных экспериментов. Решение уравнений (1) – (4), представленных в конечно-элементной формулировке (5) – (7), позволяет оценить влияние придонного трения и конвективного ускорения на вызванные ветром колебания в ограниченном бассейне переменной глубины.

Расчеты, проведенные для вариантов 1 – 3, показали, что воздействие касательных напряжений ветра на водную поверхность приводит к периодическим колебаниям уровня воды. Периоды колебаний T определяются геометрией бассейна и морфологией дна. Расчетные периоды волновых возмущений для вариантов 1 – 3 примерно равны 8,2; 7,5 и 6 мин соответственно. Амплитуда колебания свободной поверхности в каждой расчетной точке при учете придонного трения уменьшается с течением времени. При этом уровенная поверхность бассейна стремится занять квазистационарное положение, не совпадающее с невозмущенным. Относительное уменьшение амплитуды колебаний ζ за период характеризует логарифмический декремент затухания δ [8]. Количественная характеристика скорости затухания (δ) — величина, обратная числу колебаний, после которых амплитуда убывает в e раз. Время выхода на такой режим колебаний равно $\tau = T/\delta$. В табл. 1 представлены логарифмические декременты затухания δ и время τ , рассчитанные у подветренного берега для трех вариантов морфологии дна и различных коэффициентов Шези при скорости ветра 5 м/с. Из таблицы видно, что эти декременты затухания существенно зависят от морфологии дна. При прочих равных условиях наибольшее затухание у берега наблюдается при вогнутом дне, а наименьшее — при ровном. Отметим, что увеличение скорости ветра приводит к возрастанию значения декремента затухания. Зависимость δ от скорости ветра заметнее проявляется в случае варианта 1 (ровное дно), чем в случаях вариантов 2, 3 (переменная глубина). В частности, при $h = \text{const}$ увеличение скорости ветра от 1 до 12 м/с приводит к росту логарифмического декремента затухания примерно на 20%. В то время как в рассматриваемых случаях неровного дна прирост δ не превышает 10%. Чем больше коэффициент Шези, тем меньше δ зависит от скорости ветра. Это иллюстрирует рис. 1. Здесь представлена зависимость значений логарифмического декремента затухания от скорости ветра. Сплошными линиями обозначены зависимости $\delta(W)$ для значения коэффициента Шези $C = 50$, а штриховыми — при $C = 30$. Графики 1, а, б даны для вариантов 1, 2 соответственно. Зависимость $\delta(W)$ для третьего варианта аналогична представленным на рис. 1.

Придонное трение также уменьшает значения горизонтальных волновых скоростей. Однако степень затухания ζ и модуля волновых скоростей со временем не одинаковая. В частности, за характерное время $t = \tau$ при $C = 10$ модуль волновой скорости в центральной точке бассейна уменьшается в 1,9; 6,9; 4 раза для вариантов 1 – 3 соответственно. Следовательно, максимальное затухание абсолютного значения волновой скорости наблюдается для выпуклого дна.

**Логарифмические декременты затухания колебаний
уровенной поверхности**

С	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$\delta \cdot 10^3$	τ	$\delta \cdot 10^3$	τ	$\delta \cdot 10^3$	τ
5	46,94	2 ч 50 мин	42,62	2 ч 40 мин	45,73	2 ч 20 мин
10	21,26	6 ч 25 мин	36,81	3 ч 10 мин	37,51	2 ч 40 мин
20	16,58	8 ч 10 мин	33,15	4 ч	34,07	3 ч
30	15,37	8 ч 50 мин	32,34	4 ч 10 мин	33,8	3 ч 10 мин
40	14,96	9 ч 10 мин	31,45	4 ч 20 мин	33,7	3 ч 15 мин
50	14,9	9 ч 15 мин	31,33	4 ч 30 мин	33,48	3 ч 20 мин



Р и с. 1. Зависимость логарифмического декремента затухания уровенной поверхности от скорости ветра при $C = 50$ (сплошные линии) и $C = 30$ (штриховые): *а* — вариант 1 (плоское дно), *б* — вариант 2 (выпуклое дно)

По результатам численных расчетов проведен также и анализ влияния конвективного ускорения на характеристики сгонно-нагонных колебаний. Учет конвективных слагаемых в уравнениях мелкой воды может приводить к искажению формы волны в процессе ее распространения. На рис. 2 для варианта 2 и рис. 3 для варианта 3 представлены изменения со временем формы уровня свободной поверхности бассейна в точке, лежащей у подветренного берега, при скорости ветра 5 м/с. Штриховыми

линиями на этих рисунках обозначены $\zeta(t)$ без учета конвективных и диссипативных слагаемых. Сплошными линиями на рис. 2, *а*, *г*, рис. 3, *а*, *г* даны $\zeta(t)$ при учете только придонного трения ($C = 25$). Аналогичными кривыми на рис. 2, *б*, *д* и рис. 3, *б*, *д* представлены $\zeta(t)$ при учете конвективного ускорения без трения. Совместный учет конвективного ускорения и трения

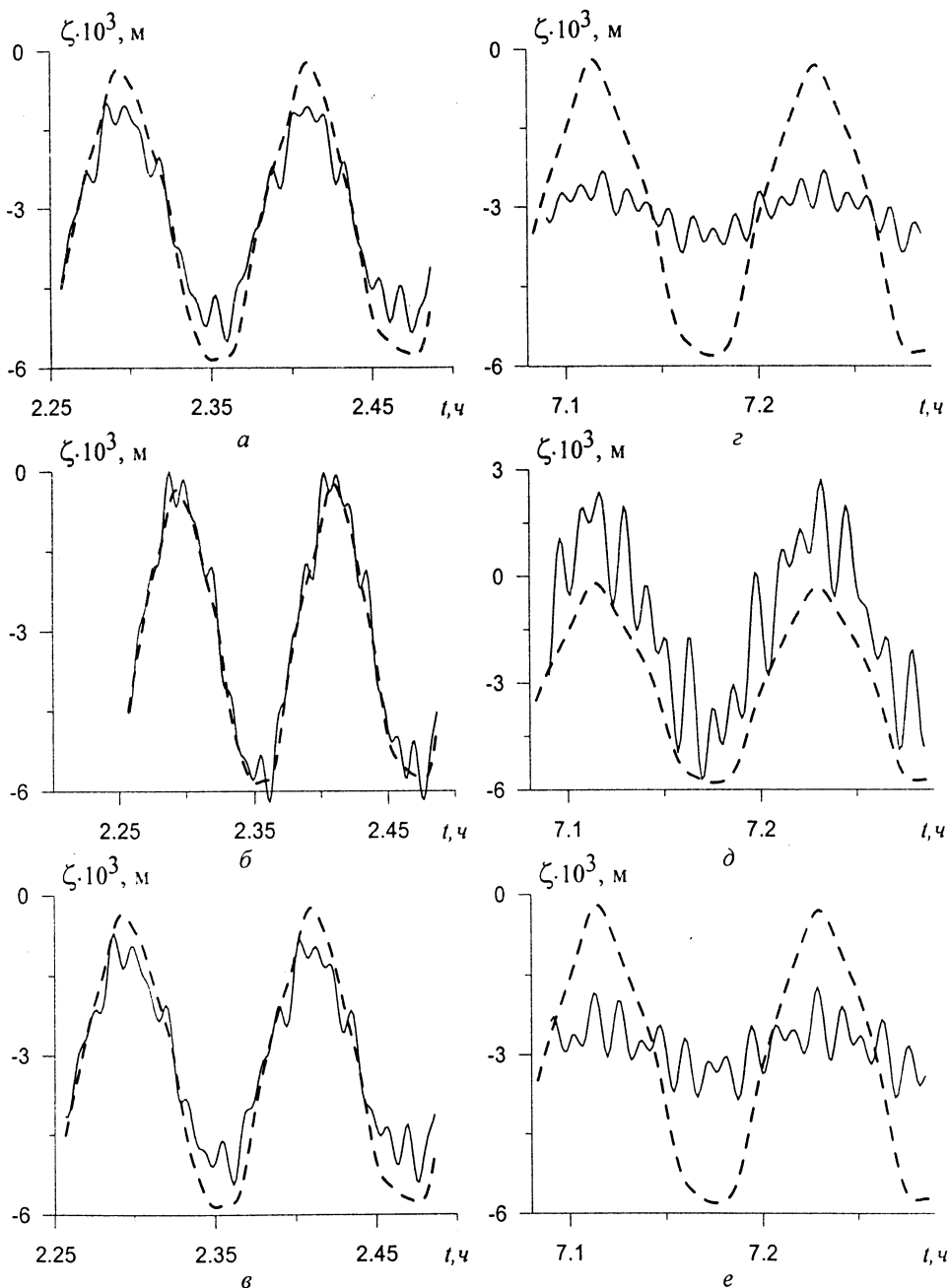
($C = 25$) иллюстрируют сплошные линии на рис. 2, в, е и рис. 3, в, е. Рис. 2, а, б, в и 3, а, б, в представляют временную зависимость $\zeta(t)$ в интервале времени двадцатого периода колебания, а рис. 2, г, д, е и 3, г, д, е — в интервале времени шестидесятого периода. Степень влияния конвективного ускорения существенно зависит от неоднородности рельефа дна и усиливается со временем действия ветра. Отметим, что профиль волны в бассейне с ровным дном практически не искажается конвективным ускорением с течением времени. При одновременном учете конвективных и диссипативных слагаемых изменения волновых характеристик, вызванные трением, преобладают. При этом конвективное ускорение на диссипацию вынужденных колебаний практически не влияет, что позволяет не учитывать конвективные слагаемые в расчетах параметров затухания волновых возмущений.

Рассмотрим теперь затухание начального возмущения в замкнутом бассейне после прекращения действия ветра. В качестве начальных условий примем максимальное отклонение уровня и соответствующее поле горизонтальных волновых скоростей, сформировавшиеся под воздействием ветра. При таких условиях в бассейне установятся свободные колебания, затухающие со временем с тем же периодом, что и при постоянно действующем ветре. Уменьшение амплитуды свободных колебаний уровневой поверхности со временем происходит быстрее, чем вынужденных. Это иллюстрирует табл. 2, где представлены значения логарифмического декремента затухания δ_0 и время τ_0 , за которое амплитуда $\zeta(t)$ свободных колебаний уменьшается в e раз.

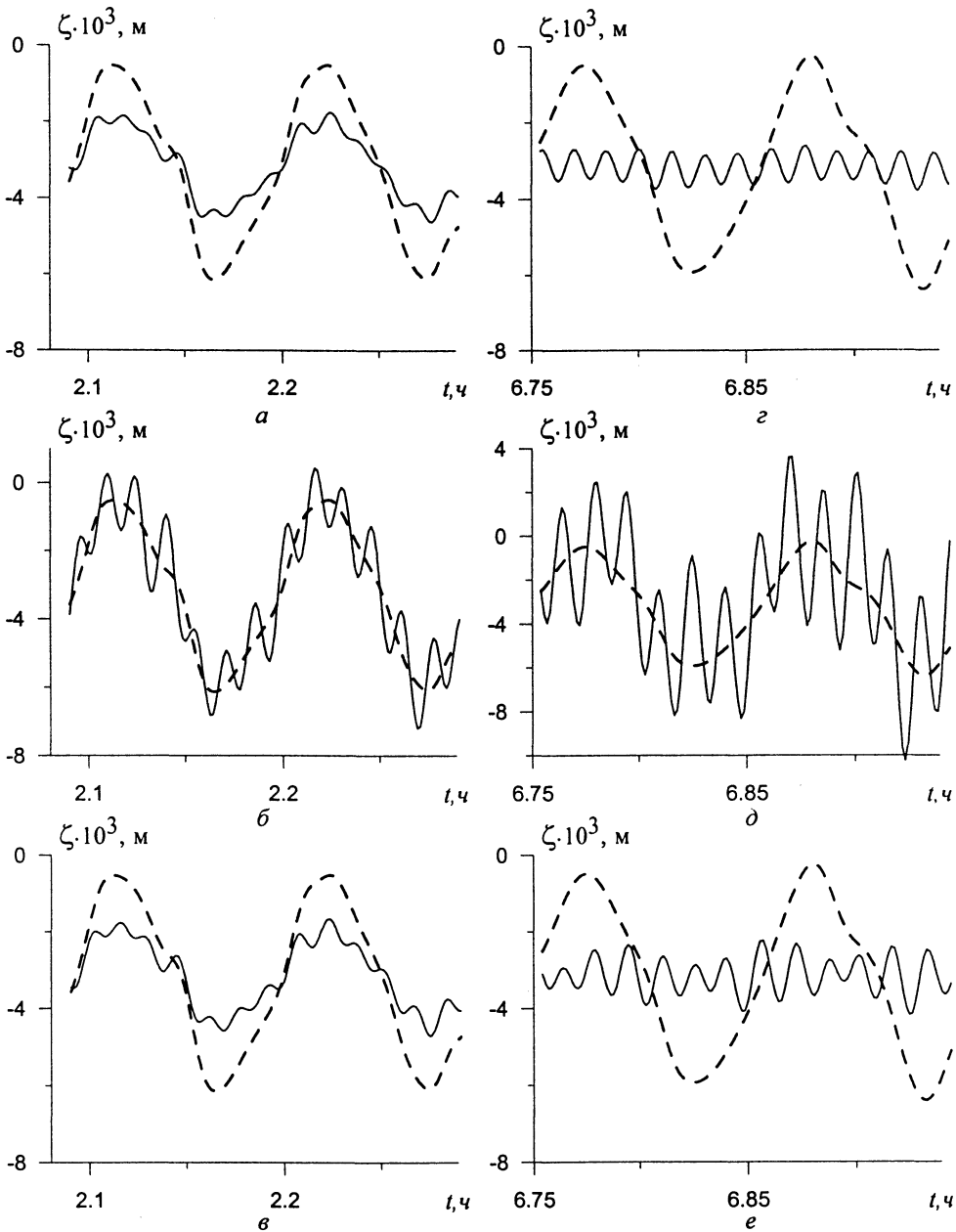
Т а б л и ц а 2

Логарифмические декременты затухания свободных колебаний уровневой поверхности

C	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	$\delta_0 \cdot 10^3$	τ_0	$\delta_0 \cdot 10^3$	τ_0	$\delta_0 \cdot 10^3$	τ_0
5	12,3	50 мин	8,3	1 ч 40 мин	13,5	45 мин
10	9,5	1 ч 30 мин	4,6	3 ч	11,8	50 мин
20	7,4	1 ч 50 мин	3,4	3 ч 30 мин	10,7	1 ч
30	6,9	2 ч	3,21	4 ч	10,5	1 ч 10 мин
40	6,8	2 ч 10 мин	3,15	4 ч 10 мин	10,3	1 ч 15 мин
50	6,8	2 ч 10 мин	3,1	4 ч 20 мин	10,2	1 ч 15 мин



Р и с. 2. Влияние придонного трения и конвективного ускорения на вертикальные смещения уровня поверхности $\zeta(t)$ бассейна с выпуклым дном: штриховые линии — без учета конвективных и диссипативных слагаемых; сплошные линии: *a*, *г* — при учете только придонного трения ($C = 25$), *б*, *д* — при учете только конвективного ускорения. *в*, *е* — при учете трения ($C = 25$) и конвективного ускорения



Р и с. 3. Влияние придонного трения и конвективного ускорения на вертикальные смещения уровня поверхности $\zeta(t)$ бассейна с вогнутым дном (обозначения те же, что для рис. 2)

Выводы. Логарифмические декременты затухания сгонно-нагонных колебаний существенно зависят от морфологии дна. При прочих равных условиях наибольшее затухание у берега наблюдается при вогнутом дне, а наименьшее — при ровном. Увеличение скорости ветра приводит к возрастанию значения декремента затухания. Зависимость логарифмического декремента затухания от скорости ветра заметнее проявляется при ровном дне, чем в случае неоднородного рельефа. Чем больше коэффициент Шези, тем меньше декремент затухания зависит от скорости ветра. Влияние конвективного ускорения зависит от неоднородности рельефа дна и усиливается со временем действия ветра. Конвективное ускорение на диссипацию вынужденных колебаний практически не влияет, что позволяет не учитывать конвективные слагаемые в расчетах параметров затухания волновых возмущений. Уменьшение амплитуды свободных колебаний урвонной поверхности со временем происходит существенно быстрее, чем вынужденных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davis J.M.* The finite element method: an alternative subdomain method for modelling unsteady flow in coastal waters and lakes // Proc. Int. Symp. Unsteady flow Open Channels, Newcastle-upon-Tyne, Granfield, 1976. — В4 41 – В4 53.
2. *Архипкин В.С., Иванов В.А., Николаенко Е.Г.* Моделирование баротропных сейш в южных морях // Моделирование гидрофизических процессов и полей в замкнутых водоемах и морях. — М.: Наука, 1989. — С. 104 – 117.
3. *Иванов В.А., Манилюк Ю.В., Черкесов Л.В.* О сейшах Азовского моря // Метеорология и гидрология. 1994, № 6. — С. 105 – 110.
4. *Букатов А.Е., Завьялов Д.Д.* Вызванное ветром движение воды в мелководных замкнутых бассейнах // Морской гидрофизический журнал. — 2004. — № 5. — С. 35 – 44.
5. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. — Л.: Судостроение, 1970. — 269 с.
6. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
7. *Дронкерс Й.* Расчеты приливов в реках и прибрежных водах. — Л.: Гидрометеоздат, 1967. — 294 с.
8. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 1. — М.: Наука, 1986. — 432 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 29.11.04

ABSTRACT The time-attenuation of the fluid serge oscillations in a shallow round basin of variable depth is studied. Dependence of logarithmic decrement of attenuation upon the bottom relief and wind speed is analyzed. The role of convection acceleration and near-bottom friction in formation of the basin surface vertical displacement and the velocity field of the horizontal wave currents is determined.