

Математическое моделирование морских систем

УДК 551.465

И.И. Карпатович

Спектральная баротропная модель для прогноза синоптических течений в открытой области океана

Рассмотрена квазигеострофическая спектральная модель для прогноза синоптических течений в баротропном океане. Спектральный метод основан на разложении функции тока в двойной ряд по косинусам. Подробно излагается алгоритм вычисления нелинейного слагаемого в уравнении потенциального вихря.

Введение. В метеорологических и океанологических задачах, как правило, используются конечно-разностный и спектральный методы интегрирования уравнений. Основное достоинство конечно-разностного метода — высокая скорость вычислений, недостаток — ошибки при вычислении фазовых и групповых скоростей. Главное преимущество спектрального метода — значительно более точное вычисление пространственных производных, недостатки — проблема численной реализации граничных условий и невысокая скорость вычислений. В океанологических исследованиях спектральный метод, как правило, используется в модельных задачах с периодическими граничными условиями с разложением искомым функций в ряд по комплексным тригонометрическим функциям. Ряды по этим функциям хорошо сходятся и, кроме того, допускают реализацию быстрого алгоритма вычислений. Однако периодические граничные условия полностью не отражают реальные процессы в океане. Как будет показано ниже, спектральная техника интегрирования может быть применена и при непериодических граничных условиях при разложении искомым функций в ряд по косинусам.

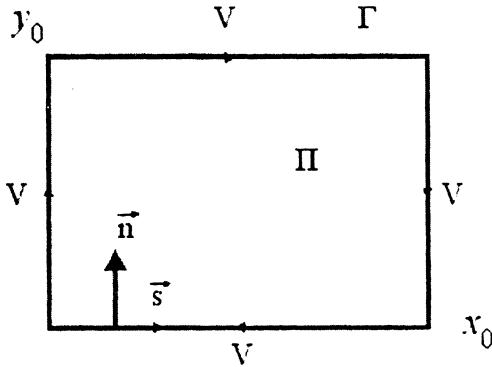
Из спектральных моделей динамики океана и атмосферы отметим описанные в работах [1] и [2]. Основная трудность применения спектрального метода в ограниченной области состоит в проблеме численной реализации граничных условий. В данной работе эта проблема решается введением касательной скорости на границе области интегрирования.

Постановка задачи. Уравнение квазигеострофического потенциального вихря с учетом трения и ветрового воздействия имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + J(\Psi, \Delta \Psi) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho H} \operatorname{rot}_z \bar{\tau} + \mu \Delta^2 \Psi - \frac{v}{H} \Delta \Psi. \quad (1)$$

Здесь Ψ — квазигеострофическая функция тока, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$, f — параметр Ко-

риолеса, ρ — плотность воды, H — глубина бассейна, $\text{rot}_z \vec{\tau} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}$, τ_x и τ_y — компоненты вектора ветрового касательного напряжения трения, μ — коэффициент турбулентного трения, ν — коэффициент сопротивления, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$. Уравнение (1) будем решать в прямоугольной области Π с границей Γ , нормалью к границе \vec{n} и касательной \vec{s} (рис 1).



Р и с. 1. Область интегрирования задачи

Граничные условия поставим следующим образом:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -V \vec{s}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где V — касательная скорость течения на боковой границе, которая является функцией только времени и вычисляется в процессе интегрирования. В начальный момент времени, когда система находится в состоянии покоя ($\Psi = 0$, $V = 0$), начинает действовать ветер. Уравнение (1) при граничных условиях (2) и (3) интегрируется до выхода на квазистационарный режим.

Метод решения. В области Π введем равномерную сетку:

$$x_i = i \frac{x_0}{N}, \quad y_j = j \frac{y_0}{M}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M.$$

Функцию тока Ψ в узлах сетки аппроксимируем двойным рядом по косинусам:

$$\Psi(x_i, y_j, t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M \bar{\Psi}_{cc}(k, l, t) \cos \frac{\pi k x_i}{x_0} \cos \frac{\pi l y_j}{y_0}. \quad (4)$$

Спектральные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\bar{\Psi}_{cc}(k, l, t) = \frac{1}{X_k Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \Psi(x, y, t) \cos \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy, \quad (5)$$

где

$$X_k = \begin{cases} x_0, & k=0, N, \\ x_0/2, & 0 < k < N, \end{cases} \quad Y_l = \begin{cases} y_0, & l=0, M, \\ y_0/2, & 0 < l < M. \end{cases}$$

Интеграл (5) будем аппроксимировать квадратурной формулой трапеции:

$$\bar{\Psi}_{cc}(k, l, t) = \frac{1}{N_k M_l} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \Psi_{i,j} \cos \frac{\pi k i}{N} \cos \frac{\pi l j}{M}. \quad (6)$$

Здесь

$$a_i = \begin{cases} 1/2, & i=0, N, \\ 1, & 0 < i < N, \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} 1/2, & j=0, M, \\ 1, & 0 < j < M, \end{cases}$$

$$N_k = \begin{cases} N, & k=0, N, \\ N/2, & 0 < k < N, \end{cases} \quad M_l = \begin{cases} M, & l=0, M, \\ M/2, & 0 < l < M. \end{cases}$$

В теории спектрального метода доказывается, что квадратурная формула трапеции точна, если число спектральных гармоник не превышает числа сеточных точек [4]. Система функций

$$1, \cos \frac{\pi x_i}{x_0}, \cos \frac{2\pi x_i}{x_0}, \dots, \cos \frac{k\pi x_i}{x_0}$$

со скалярным произведением по квадратурной формуле трапеции на отрезке $[0, x_0]$ является полной ортогональной системой функций (Приложение 1), поэтому спектральные коэффициенты $\bar{\Psi}_{cc}$ однозначно определяются формулой (6). Выполнив спектральное интегрирование уравнения (1) с учетом граничных условий (2), (3), получим усеченную систему дифференциальных уравнений для каждой спектральной гармоники:

$$-K^2 \frac{\partial \bar{\Psi}_{cc}}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} C + \bar{J}_{cc} + \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{cc} = \bar{\tau}_{cc} + \left(\mu K^2 + \frac{\nu}{H} \right) (VC + K^2 \bar{\Psi}_{cc}). \quad (7)$$

Здесь

$$K^2 = \frac{\pi^2 k^2}{x_0^2} + \frac{\pi^2 l^2}{y_0^2}, \quad C = \frac{[(-1)^k + 1]}{X_k} \delta_{0l} + \frac{[(-1)^l + 1]}{Y_l} \delta_{0k},$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\bar{J}_{cc}(k, l, t) = \frac{1}{X_k Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} J(\Psi, \Delta \Psi) \cos \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy \quad (8)$$

— спектральное представление нелинейного слагаемого,

$$\beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{cc} = \frac{\beta}{X_k Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy \quad (9)$$

— спектральное представление β -слагаемого,

$$\bar{\tau}_{cc} = \frac{1}{X_k Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{1}{\rho H} \operatorname{rot}_z \bar{\tau} \cos \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy$$

— спектральное представление ветрового воздействия.

Касательная скорость на боковой границе V является функцией только времени и находится из интегрального соотношения. Интегрируя уравнение (1) по области Π с учетом граничных условий (2), (3), получим для касательной скорости V прогностическое соотношение

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2(x_0 + y_0)} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \left(J + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{\rho H} \operatorname{rot}_z \bar{\tau} \right) dx dy - \frac{\nu}{H} V. \quad (10)$$

Совместное интегрирование уравнений (7) и (10) дает спектральные коэффициенты $\bar{\Psi}_{cc}$. Вычисление нелинейного слагаемого и β -слагаемого рассмотрено в Приложении 2.

Тестовый и численный эксперименты со спектральной моделью. Тестовый эксперимент проведем для нелинейного уравнения диффузии вихря

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + J(\Psi, \Delta \Psi) = \mu \Delta^2 \Psi - \frac{\nu}{H} \Delta \Psi.$$

При начальных условиях

$$\Psi = \cos \frac{\pi n x}{x_0} \cos \frac{\pi m y}{y_0}, \quad V = 0$$

уравнение имеет следующее решение:

$$\Psi(x, y, t) = \cos \frac{\pi n x}{x_0} \cos \frac{\pi m y}{y_0} \exp \left\{ - \left[\mu \left(\frac{\pi^2 n^2}{x_0^2} + \frac{\pi^2 m^2}{y_0^2} \right) + \frac{\nu}{H} \right] t \right\}, \quad (11)$$

$$V(t) = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что спектральное решение в точности совпадает с аналитическим решением (11).

Численный эксперимент со спектральной моделью проведем при следующих параметрах задачи:

$$x_0 = y_0 = 250 \text{ км}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad H = 2 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad \beta = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\mu = 10^3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}, \quad \nu = 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

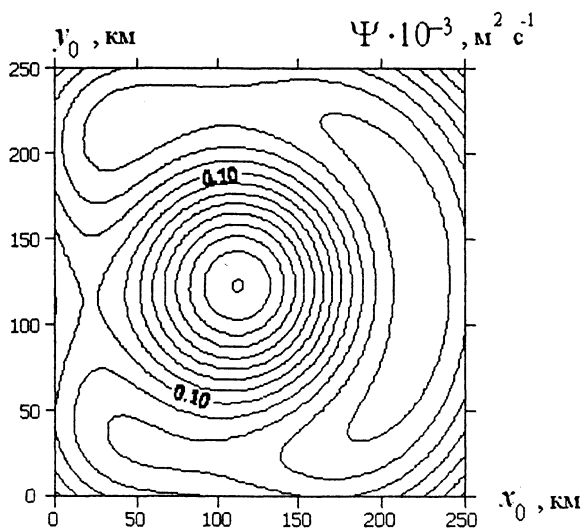
Ветровое воздействие зададим в виде:

$$\tau_x = -\tau_0 \sin^3 \frac{\pi x}{x_0} \sin^2 \frac{\pi y}{y_0} \cos \frac{\pi y}{y_0},$$

$$\tau_y = \tau_0 \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} \cos \frac{\pi x}{x_0} \sin^3 \frac{\pi y}{y_0}, \quad \tau_0 = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}.$$

В результате интегрирования система выходит на квазистационарный режим, характеризующийся пренебрежимо малыми осцилляциями поля функции то-

ка Ψ (рис 2). Квазистационарная касательная скорость V на границе Γ равна $1,09 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и имеет циклоническую направленность. Интегрирование уравнений (7) и (10) проводилось по схеме центральных разностей. Ротор поля ветра имеет антициклоническую направленность в центре области интегрирования и циклоническую — на периферии. В соответствии с этим получаем расчет квазигеострофической функции тока. Все вычисления выполнены на сетке 128×128 .



Р и с. 2. Квазистационарная функция тока в численном эксперименте с ветровым воздействием

Выводы. В работе рассмотрена квазигеострофическая спектральная баротропная модель для прогноза течений в открытой области океана. Предложенный метод спектрального разложения функции тока в двойной ряд по косинусам допускает реализацию быстрого алгоритма вычислений. Введение касательной скорости на границе области интегрирования дает более точный расчет течений в пограничной зоне. Выполненный численный эксперимент показывает надежность модели для расчета течений по касательному напряжению трения ветра в открытой области океана.

Приложение 1

Непрерывная система функций

$$1, \cos \frac{\pi x}{x_0}, \cos \frac{2 \pi x}{x_0}, \dots, \cos \frac{k \pi x}{x_0}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (1.1)$$

ортогональна на отрезке $[0, x_0]$, так как

$$\int_0^{x_0} \cos \frac{k_1 \pi x}{x_0} \cos \frac{k \pi x}{x_0} dx = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k \\ x_0, & k_1 = k = 0 \\ x_0/2, & k_1 = k \neq 0 \end{cases}.$$

Покажем, что соответствующая (1.1) дискретная система функций

$$\varphi_{k,i} = \cos \frac{k \pi x_i}{x_0}, \quad 0 \leq k, i \leq N, \quad x_i = i \frac{x_0}{N} \quad (1.2)$$

также ортогональна на отрезке $[0, x_0]$ в $N+1$ -мерном гильбертовом пространстве, если определить скалярное произведение двух функций по квадратной формуле трапеции:

$$(\varphi_{k,i}, \varphi_{k_1,i}) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_{k,i} \varphi_{k_1,i}.$$

Действительно, используя формулу суммирования

$$\sum_{i=0}^N \cos i \cdot \alpha = 1 + \frac{\cos[(N+1)/2] \alpha \sin[(N/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)},$$

получим

$$\sum_{i=0}^N a_i \cos \frac{\pi k i}{N} \cos \frac{\pi k_1 i}{N} = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k \\ N, & k_1 = k = 0, N \\ N/2, & k_1 = k \neq 0, N \end{cases} \quad (1.3)$$

Любая дискретная функция $f(x_i)$ на отрезке $[0, x_0]$ может быть разложена в ряд по функциям (1.2):

$$f_i = \sum_{k=0}^N f_k \cos \frac{\pi k i}{N}. \quad (1.4)$$

Коэффициенты разложения f_k найдем, умножая (1.4) на $a_i \cos \frac{\pi k_1 i}{N}$ и суммируя по i . С учетом (1.3) получим

$$\sum_{i=0}^N a_i f_i \cos \frac{\pi k_1 i}{N} = \sum_{i=0}^N a_i \sum_{k=0}^N f_k \cos \frac{\pi k i}{N} \cos \frac{\pi k_1 i}{N} = \begin{cases} f_{k_1} N, & k_1 = 0, N, \\ f_{k_1} N/2, & k_1 \neq 0, N. \end{cases}$$

Таким образом, в $N+1$ -мерном гильбертовом пространстве мы получим $N+1$ ортогональных функций. Эта система будет полной, так как размерность пространства равна числу независимых функций разложения.

Приложение 2

На каждом временном шаге необходимо вычислять нелинейное слагаемое $\overline{J_{cc}}$ и β -слагаемое, которые мы будем находить методом преобразования [5]:

$$J(\Psi, \Delta\Psi) = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Введем смешанные трансформанты по формулам

$$\overline{\Psi}_{sc}(k, l) = \frac{2}{N M_l} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M b_j \Psi_{i,j} \sin \frac{\pi k i}{N} \cos \frac{\pi l j}{M}, \quad (2.2)$$

$$\overline{\Psi}_{cs}(k, l) = \frac{2}{N_k M} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i \Psi_{i,j} \cos \frac{\pi k i}{N} \sin \frac{\pi l j}{M}. \quad (2.3)$$

Идея метода преобразования состоит в том, что сначала вычисляются спектральные коэффициенты пространственных производных, входящих в (2.1). После обращения спектральных коэффициентов выполняется перемножение в узлах сетки и по формуле (8) находится спектральное представление нелинейного слагаемого. Существенным моментом метода преобразования является поиск алгоритма вычисления спектральных коэффициентов, при котором удастся избежать ложного представления (*aliasing effect*). Непосредственные вычисления показывают, что при использовании смешанных трансформант (2.2) и (2.3) при вычислении спектральных коэффициентов удастся избежать ложного представления. Вычисление спектральных коэффициентов пространственных производных дает

$$\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} \right)_{sc} = \frac{2}{x_0 Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy = -\frac{2 \pi k X_k}{x_0^2} \overline{\Psi}_{cc}, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial y} \right)_{cs} = \frac{2}{X_k y_0} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \frac{\pi k x}{x_0} \sin \frac{\pi l y}{y_0} dx dy = -\frac{2 \pi l Y_l}{y_0^2} \overline{\Psi}_{cc}, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \overline{\Psi}}{\partial x} \right)_{sc} = \frac{2}{x_0 Y_l} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} \sin \frac{\pi k x}{x_0} \cos \frac{\pi l y}{y_0} dx dy = \frac{2 \pi k X_k}{x_0^2} (\overline{\Psi}_{cc} K^2 + V C), \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \overline{\Psi}}{\partial y} \right)_{cs} = \frac{2}{X_k y_0} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} \cos \frac{\pi k x}{x_0} \sin \frac{\pi l y}{y_0} dx dy = \frac{2 \pi l Y_l}{y_0^2} (\overline{\Psi}_{cc} K^2 + V C). \quad (2.7)$$

После обращения коэффициентов (2.4) – (2.7) из спектральной области выполним перемножения в узлах сетки и, наконец, подставляя (2.1) в формулу (8), найдем спектральные коэффициенты \overline{J}_{cc} . β -слагаемое находим, обрабатывая (2.4), и затем по формуле (9) вычисляем $\beta \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} \right)$. Все вычисления из спектральной области в сеточную и обратно по формулам (4), (6), (2.2), (2.3) могут быть выполнены по алгоритму быстрого преобразования Фурье [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haugen J., Machenhauer B.* A spectral limited-area model formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow water equation//*Mont. Wea. Rev.*– 1993.– 121, №9.– P. 2618–2630.
2. *Fulton S., Schubert W.* Chebyshev spectral methods for limited area models//*ibid.*– 1987.– 115, №9.– P. 1940–1965.
3. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. Т.1.– М.: Мир, 1984.– 282 с.

4. *Махенхауэр Б.* Спектральный метод // Численные методы, используемые в атмосферных моделях.– Л.: Гидрометеониздат, 1982.– С. 88–192.
5. *Orszag S.A.* Transform method for calculation of vector-coupled sums: Application to the spectral form of the vorticity equation// J. Atmos. Sci.– 1970.– 27, №6.– P. 890 895.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1989.– 265 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 08.09.03
После доработки 21.04.05

ABSTRACT Quasi-geostrophic spectral model for the forecast of synoptic currents in the barotropic ocean is considered. Spectral technique is based on decomposition of the stream functions into a double row according to the cosines. The algorithm for calculating a non-linear component in the equation of a potential vortex is described in details.