

Фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в океане со сдвигом скорости течений

В. В. Булатов ^{1, ✉}, Ю. В. Владимиров ¹, И. Ю. Владимиров ²

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

² Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

✉ internalwave@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2020 г., после доработки – 06.04.2021 г.

Цель. Описание динамики внутренних гравитационных волн в океане с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной проблемой уже в линейном приближении. Математическая задача, описывающая волновую динамику, сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения, можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых океанических течений. Целью работы является изучение динамики внутренних гравитационных волн в океане с произвольными и модельными распределениями плотности и фоновых сдвиговых течений.

Методы и результаты. В работе представлены численные и аналитические решения, описывающие основные фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в стратифицированном океане конечной глубины, как для произвольных, так и для модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений. Течения рассматриваются как стационарные и горизонтально однородные в предположении, что масштаб изменчивости течений по горизонтали и по времени много больше характерных длин и периодов внутренних гравитационных волн. С помощью метода Фурье получены интегральные представления решений при выполнении условия устойчивости Майлса – Ховарда. Для решения вертикальной спектральной задачи предложен алгоритм расчета основных дисперсионных зависимостей, определяющих фазовые характеристики генерируемых волновых полей. В работе представлены расчеты для одного реального распределения частоты плавучести и профиля сдвигового течения. Изучена трансформация дисперсионных поверхностей и фазовых структур полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации. Для аналитического решения задачи использованы постоянное распределение частоты плавучести и линейные зависимости фоновое сдвиговое течение от глубины. Для модельного распределения частоты плавучести и сдвигового течения выведены явные аналитические выражения, описывающие решения вертикальной спектральной задачи. Проведено сравнение численных и асимптотических решений для характерных океанических параметров.

Выводы. Полученные в работе результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные зависимости частоты плавучести и распределения фоновых сдвиговых скоростей, с хорошей степенью точности описывают численные решения вертикальной спектральной задачи. Использование модельных представлений для гидрологических параметров позволяет качественно верно описывать основные характеристики внутренних гравитационных волн в океане с произвольными фоновыми сдвиговыми течениями.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, сдвиговые течения, спектральная задача, дисперсионные зависимости, фазовые картины

Благодарности: работа выполнена по темам государственного задания: В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров (№ АААА-А20-120011690131-7), И. Ю. Владимиров (№ 0128-2021-0002) и при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00111А.

Для цитирования: Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в океане со сдвигом скорости течений // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 4. С. 473–489. doi:10.22449/0233-7584-2021-4-473-489

Phase Structure of Internal Gravity Waves in the Ocean with Shear Flows

V. V. Bulatov ¹, ✉, Yu. V. Vladimirov ¹, I. Yu. Vladimirov ²

¹ *Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

² *P. P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
✉ *internalwave@mail.ru*

Purpose. The description of the internal gravity waves dynamics in the ocean with background fields of shear currents is a very difficult problem even in the linear approximation. The mathematical problem describing wave dynamics is reduced to the analysis of a system of partial differential equations; and while taking into account the vertical and horizontal inhomogeneity, this system of equations does not allow separation of the variables. Application of various approximations makes it possible to construct analytical solutions for the model distributions of buoyancy frequency and background shear ocean currents. The work is aimed at studying dynamics of internal gravity waves in the ocean with the arbitrary and model distributions of density and background shear currents.

Methods and Results. The paper represents the numerical and analytical solutions describing the main phase characteristics of the internal gravity wave fields in the stratified ocean of finite depth, both for arbitrary and model distributions of the buoyancy frequency and the background shear currents. The currents are considered to be stationary and horizontally homogeneous on the assumption that the scale of the currents' horizontal and temporal variability is much larger than the characteristic lengths and periods of internal gravity waves. Having been used, the Fourier method permitted to obtain integral representations of the solutions under the Miles – Howard stability condition is fulfilled. To solve the vertical spectral problem, proposed is the algorithm for calculating the main dispersion dependences that determine the phase characteristics of the generated wave fields. The calculations for one real distribution of buoyancy frequency and shear flow profile are represented. Transformation of the dispersion surfaces and phase structures of the internal gravitational waves' fields is studied depending on the generation parameters. To solve the problem analytically, constant distribution of the buoyancy frequency and linear dependences of the background shear current on depth were used. For the model distribution of the buoyancy and shear flow frequencies, the explicit analytical expressions describing the solutions of the vertical spectral problem were derived. The numerical and asymptotic solutions for the characteristic oceanic parameters were compared.

Conclusions. The obtained results show that the asymptotic constructions using the model dependences of the buoyancy frequency and the background shear velocities' distribution, describe the numerical solutions of the vertical spectral problem to a good degree of accuracy. The model representations, having been applied for hydrological parameters, make it possible to describe qualitatively correctly the main characteristics of internal gravity waves in the ocean with the arbitrary background shear currents.

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, shear flows, vertical spectral problem, dispersion relations, phase patterns

Acknowledgments: the work was done on the following topics of the state task: V.V. Bulatov, Yu.V. Vladimirov (No. AAAA-A20-120011690131-7), I.Yu. Vladimirov (No. 0128-2021-0002), and at partial financial support of the RFBR project No. 20-01-00111A.

For citation: Bulatov, V.V., Vladimirov, Yu.V. and Vladimirov, I.Yu, 2021. Phase Structure of Internal Gravity Waves in the Ocean with Shear Flows. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(4), pp. 438-453. doi:10.22449/1573-160X-2021-4-438-453

Введение. В реальном океане внутренние гравитационные волны (ВГВ) распространяются на фоне сдвиговых океанических течений. Поэтому в связи с прогрессом в изучении крупномасштабных океанических волновых процессов изучение динамики и распространения ВГВ в океане с учетом наличия течений является актуальной задачей [1–3]. В океане вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними волнами. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ [4, 5]. В первом приближении можно считать, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные [1, 3].

В общей постановке описание динамики ВГВ в океане с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения, в том числе метод ВКБ, основанный на реалистичном предположении о плавности изменения параметров океанической среды по сравнению с длинами ВГВ, можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений [3, 5, 6]. Поэтому представляет несомненный интерес изучение ВГВ в океане с произвольным распределением по вертикали как плотности, так и наблюдаемых в морских условиях фоновых сдвиговых течений [4, 7–9]. Тем самым появляется возможность изучения амплитудно-фазовых характеристик волновых полей реальных океанологических параметров.

Одним из основных методов решения задач волновой динамики ВГВ в океане с произвольными фоновыми сдвиговыми течениями является метод Фурье, который дает возможность построить интегральные представления решений, требующие численного и асимптотического анализа [10–15]. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ произвольными нелокальными и нестационарными источниками возмущений, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с решениями модельных задач [5, 16]. Поэтому при анализе динамики ВГВ в реальном океане полезны различные асимптотические и аналитические модели [3, 6, 14, 17–20].

Для исследования механизма влияния течений на ВГВ необходимо рассматривать достаточно простые модельные представления для стратификации и сдвиговых течений. Синтез различных аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальное качественное и количественное представления о волновых океанических процессах [1, 3, 5]. Можно ожидать также, что учет реальных свойств параметров морской среды позволит исследовать качественно новые эффекты волновой генерации. Асимптотические решения

требуют верификации полученных с их помощью результатов, поэтому сравнение численных и асимптотических результатов представляет особый интерес для исследования динамики ВГВ в океане с течениями [3, 5, 16].

Целью настоящей работы является исследование динамики ВГВ в океане со сдвигом скорости течений с помощью численных и аналитических решений, которые описывают основные особенности дисперсионных зависимостей и фазовых характеристик полей ВГВ в стратифицированном океане конечной глубины для произвольных и модельных вертикальных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений.

Постановка задачи, интегральные формы решений. Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины H . Линеаризованная система уравнений гидродинамики относительно невозмущенного состояния имеет вид [1–3]

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{DU_1}{Dt} + \frac{dV}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \left(\frac{DU_2}{Dt} + \frac{dU}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q, \quad \frac{D\rho}{Dt} + W \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V(z) \frac{\partial}{\partial x} + U(z) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

где $V(z)$, $U(z)$ – компоненты вектора фонового сдвигового течения на горизонте z ; U_1 , U_2 , W – компоненты возмущенной скорости; p , ρ – возмущения давления и плотности; $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность морской среды; $Q(t, x, y, z)$ – плотность распределения источников массы. Перекрестным дифференцированием из этой системы уравнений с использованием приближения Буссинеска можно получить одно уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты скорости [1–3, 5, 6, 19]:

$$\begin{aligned} LW = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{DQ}{Dt} \right) \right), \quad (1) \\ L \equiv \frac{D^2}{Dt^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = - \frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned}$$

где $N^2(z)$ – квадрат частоты Брента – Ваясяля (частоты плавучести); g – ускорение свободного падения. Граничные условия берутся в виде (вертикальная ось z направлена вверх): $W = 0$ при $z = 0, -H$. Далее рассматривается функция Грина уравнения (1), т. е. решение задачи [6, 19]:

$$L \Gamma(t, x, y, z, z') = \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z'), \quad (2)$$

$$\Gamma = 0 \quad \text{при } z = 0, -H; \quad \Gamma \equiv 0 \quad \text{при } t < 0,$$

где z' – глубина точечного источника возмущений и предполагается, что точечный источник включается в момент времени $t = 0$ и при $t < 0$ среда находится в состоянии покоя [6, 19]. Волновые возмущения от произвольного нестационарного нелокального источника возмущений определяются соответствующей сверткой [1, 6, 19]. При наличии в океане фоновых сдвиговых течений ВГВ могут

взаимодействовать с этими течениями и обмениваться с ними энергией, поэтому собственные волновые колебания могут быть экспоненциально растущими. Далее предполагается выполненным условие устойчивости Майлса – Ховарда для

числа Ричардсона [3, 10–12]: $\text{Ri}(z) = N^2(z) \left(\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right)^{-1/2} > 1/4$. Если

выполнено условие Майлса – Ховарда, то соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений [3, 14]. Характерные значения чисел Ричардсона в различных акваториях Мирового океана при отсутствии динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервалах 2–20 [4, 7–9].

Решение задачи (2) ищется в виде интегралов Фурье

$$\Gamma(t, x, y, z, z') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \mu, v, z, z') \exp(-i(\mu x + v y - \omega t)) d\omega.$$

Тогда из условия $\Gamma \equiv 0$ при $t < 0$ следует, что полюсы и разрезы при интегрировании по переменной ω нужно обходить в верхней полуплоскости [3, 6, 19]. Функция $G(\omega, \mu, v, z, z')$ является решением следующей задачи [3, 12, 19]:

$$\Pi G(\omega, \mu, v, z, z') = \delta(z - z'), \quad (3)$$

$$\Pi \equiv (\omega - f(z))^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 (N^2(z) - (\omega - f(z))^2) + \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} (\omega - f);$$

$$G = 0 \text{ при } z = 0, -H; \quad k^2 = \mu^2 + v^2; \quad f(z) = \mu V(z) + v U(z).$$

Численный алгоритм и результаты расчетов. Спектральная задача (3) для произвольных распределений функций $N(z)$, $V(z)$, $U(z)$ допускает только численное решение. Для решения этой задачи можно использовать численный алгоритм, основанный на аппроксимации основных коэффициентов (3) кусочно-линейными и кусочно-постоянными функциями. Будем считать $\omega = \omega_n(\mu, v)$ спектральным параметром, требующим определения, μ, v – независимыми переменными.

Собственная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Pi \varphi(z) = 0,$$

$\varphi = 0$ при $z = 0, -H$.

Далее введем новую функцию $F(z) = \varphi(z)/(\omega - f(z))$, которая определяется из задачи

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((\omega - f(z))^2 \frac{\partial F}{\partial z} \right) + k^2 (N^2(z) - (\omega - f(z))^2) F = 0, \quad (4)$$

$F(z) = 0$ при $z = 0, -H$.

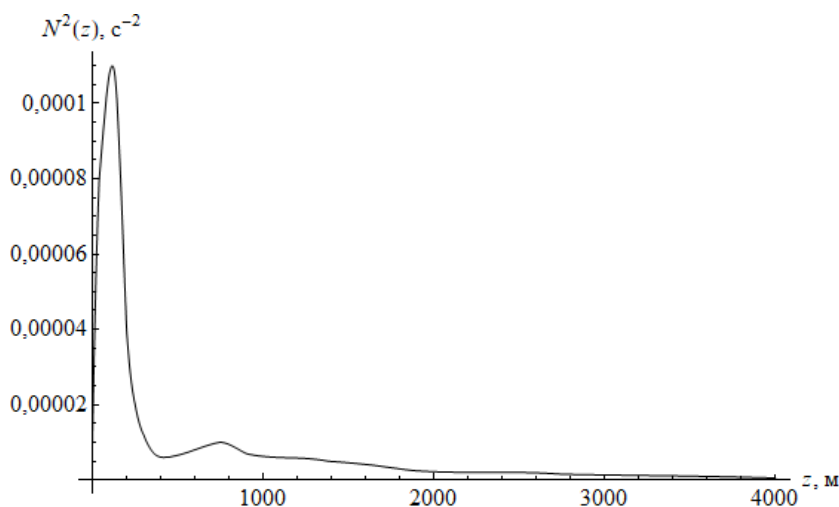
Для численного решения задачи (4) интервал изменения $-H < z < 0$ разбивается на J отрезков (слоев): $I_j = [z_{j-1}, z_j]$, $j = 1, 2, \dots, J$, где $z_0 = 0$, $z_J = -H$. Ап-

проксимируем коэффициент $\omega - f(z)$ перед функцией $\frac{\partial F(z)}{dz}$ кусочно-линейной непрерывной функцией, коэффициент перед функцией $F(z)$ – кусочно-постоянной функцией, т. е. будем полагать, что $\omega - f(z) = A_j + B_j(z - z_j) = D_j + B_j z$; $N^2(z) - (\omega - f(z))^2 = C_j^2$; $z_{j-1} < z < z_j$. Тогда в каждом слое для определения функции $F(z)$ получается дифференциальное уравнение Эйлера.

Известно, что собственные значения спектральной задачи (4) образуют две серии [3, 6, 12–15, 19]. В первой серии $\omega_n(\mu, \nu)$ убывает с ростом n и стремится к f_+ при $n \rightarrow \infty$ (f_+ – максимальное значение $f(z)$ на интервале изменения переменной z). Во второй серии $\omega_n(\mu, \nu)$ возрастает с ростом n и стремится к f_- при $n \rightarrow \infty$ (f_- – минимальное значение $f(z)$ на интервале изменения переменной z). Эта особенность поведения дисперсионных соотношений использована при нахождении собственных чисел. Выбрав какое-либо начальное приближение θ так, чтобы $\theta > f_+$, необходимо проинтегрировать уравнение

(4), используя в качестве начальных значений следующие: $F(z) = 0$, $\frac{\partial F(z)}{dz} = 1$

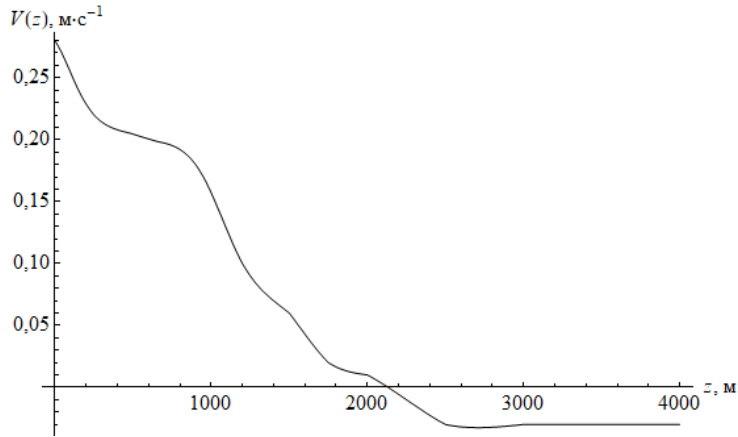
при $z = 0$. Если найденное решение имеет m корней внутри интервала $-H < z < 0$ и $m < n$, то значение θ уменьшается; если $m > n$, то θ увеличивается. Подбором значения θ можно добиться того, чтобы решение обращалось в ноль при $z = -H$ и имело внутри интервала $-H < z < 0$ ровно n корней. Полученное таким образом значение ω является собственным числом и соответствующее решение $F(z)$ – собственной функцией. Тогда собственная функция $\varphi(z)$ определяется из соотношения $\varphi(z) = F(z) / (\omega - f(z))$. Проведенные тестовые численные расчеты продемонстрировали хорошую сходимость предложенного численного алгоритма при увеличении числа слоев J .



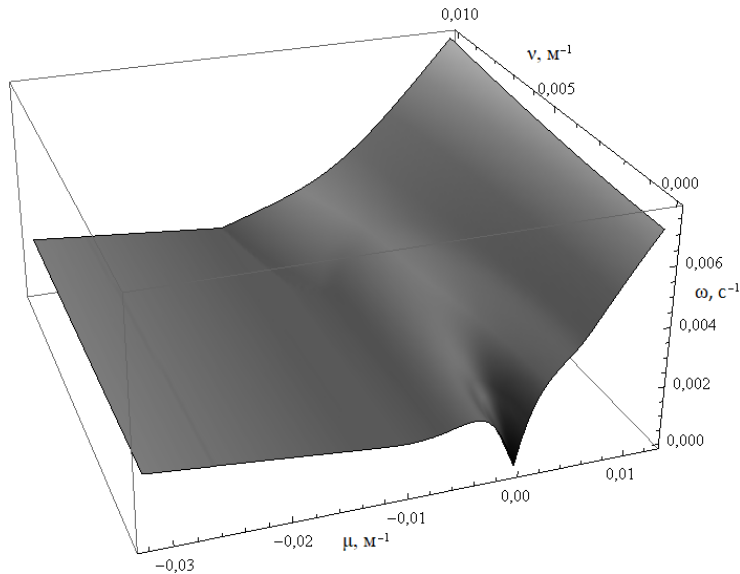
Р и с. 1. Распределение квадрата частоты плавучести по глубине

Fig. 1. Buoyancy frequency distribution

Для численных расчетов были использованы типичные распределения квадрата частоты плавучести $N^2(z)$, а также компоненты сдвигового течения $V(z)$ (рис. 1, 2), которые характерны для многих районов Мирового океана, в частности для акватории Северной Атлантики (проходы Восточно-Азорского хребта) [4, 7–9]. Компонента сдвигового течения $U(z)$ предполагается равной нулю: $U(z) = 0$.



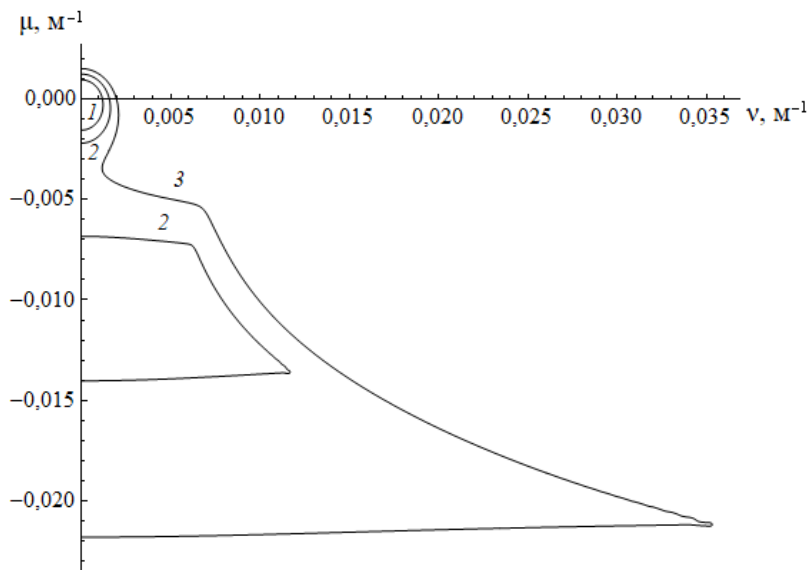
Р и с. 2. Распределение компоненты сдвигового течения по глубине
Fig. 2. Shear flow distribution



Р и с. 3. Дисперсионная поверхность
Fig. 3. Dispersion surface

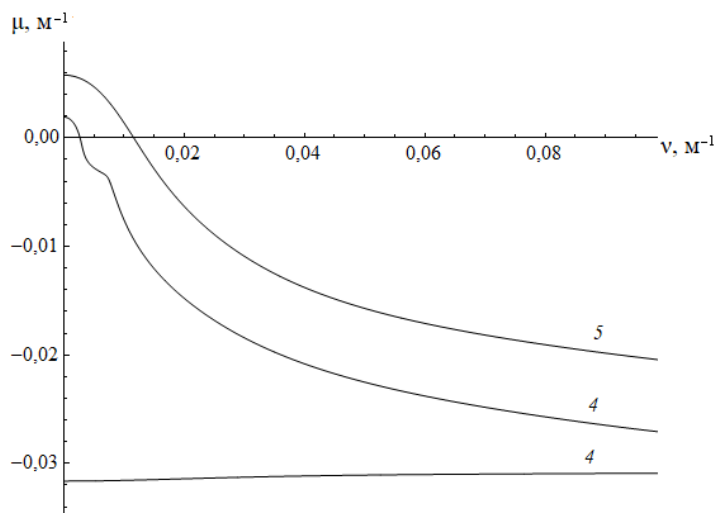
Без ограничения общности и для большей наглядности получаемых результатов все численные расчеты приведены для второй волновой моды. На рис. 3 представлены результаты расчетов дисперсионной поверхности $\omega_2(\mu, \nu)$.

Структура локальных экстремумов и других особых точек в пространстве компонент волнового вектора (ν, μ) определяет соответствующие особенности фазовых структур возбуждаемых волновых полей ВГВ в декартовых координатах (x, y) [21, 22]. Как видно из представленных численных результатов, дисперсионная поверхность имеет достаточно сложную пространственную структуру. Численно рассчитанные дисперсионные поверхности могут иметь несколько локальных экстремумов, что соответствует генерации различных типов волновых структур [17, 18, 20, 21]. На рис. 4, 5 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu_2(\nu, \omega)$ для различных значений частоты ω . На рис. 4 $\omega = 0,0013 \text{ с}^{-1}$ (кривая 1), $\omega = 0,0016 \text{ с}^{-1}$ (кривые 2), $\omega = 0,00185 \text{ с}^{-1}$ (кривая 3); на рис. 5 $\omega = 0,00215 \text{ с}^{-1}$ (кривые 4), $\omega = 0,0038 \text{ с}^{-1}$ (кривая 5).



Р и с. 4. Дисперсионные зависимости для различных значений ω : линия 1 – одна замкнутая дуга; линии 2 – две замкнутые дуги; линия 3 – одна замкнутая кривая с тремя точками перегиба
Fig. 4. Dispersion dependences for different values of ω : line 1 – one closed arc; lines 2 – two closed arcs; line 3 – one closed curve with three inflection points

Опишем далее качественную эволюцию дисперсионных соотношений в зависимости от изменения параметра ω . При малых значениях ω дисперсионная кривая имеет вид одной замкнутой кривой (рис. 4). По мере увеличения ω и в зависимости от параметров стратифицированной среды (частоты плавуности и сдвигового течения) дисперсионные кривые могут состоять из нескольких замкнутых кривых (рис. 5). Численные расчеты показывают, что при увеличении номера моды количество таких замкнутых кривых, как правило, возрастает. Часть разомкнутых кривых могут объединяться (рис. 4, 5) и сливаться в одну кривую, имеющую неоднозначную ω -образную структуру с несколькими точками перегиба. При достаточно больших значениях ω все дисперсионные зависимости имеют вид нескольких разомкнутых однозначных кривых (рис. 5). Наличие точек перегиба дисперсионных кривых определяет геометрическое место точек (каустик, волновых фронтов), где волновое поле может менять свое качественное поведение [6, 17, 18, 20–22].



Р и с. 5. Дисперсионные зависимости для различных значений ω : линии 4 – две разомкнутые кривые, верхняя кривая 4 – с тремя точками перегиба; линия 5 – верхняя кривая с одной точкой перегиба

F i g. 5. Dispersion dependences for different values of ω : lines 4 – two open curves, upper curve 4 – with three inflection points; line 5 – upper curve with one inflection point

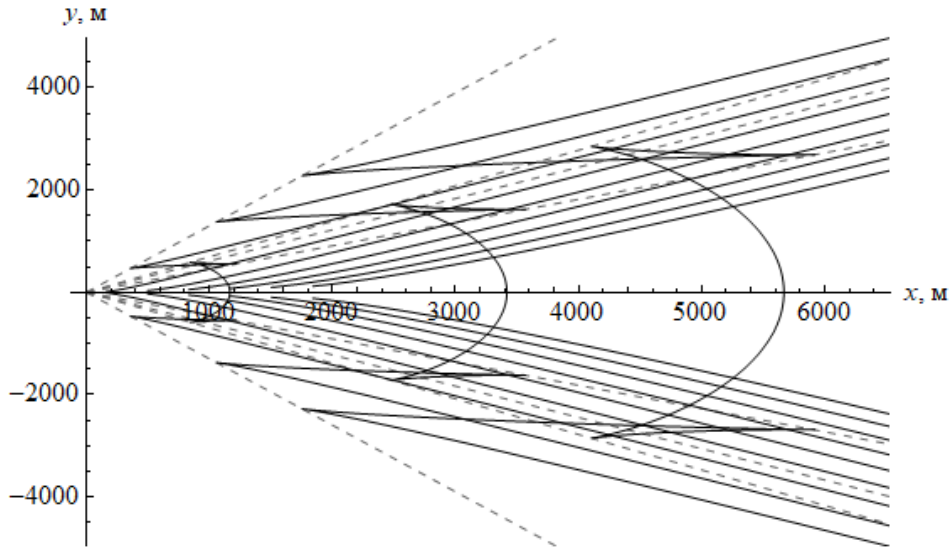
Эти особенности дисперсионных соотношений означают, что полное волновое поле возбуждаемых ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми течениями есть сумма нескольких типов волновых структур. Замкнутые дисперсионные кривые описывают генерацию кольцевых (поперечных) волн, причем каждой ветви будет соответствовать отдельная волновая система. Простые дуги дисперсионных кривых описывают генерацию клиновидных (продольных) волн, каждой дуге соответствует отдельная волновая система [17, 18, 20]. Численные расчеты для различных океанических распределений компонент фонового сдвигового течения показывают, что знакопеременность течения, как правило, приводит к появлению замкнутых кривых дисперсионных соотношений и соответственно – к генерации кольцевых (поперечных) волн. Если течение по всей глубине океана не изменяет своего знака, то дисперсионные кривые представляют собой совокупность только простых дуг и все возбуждаемые волны – клиновидные (продольные).

На рис. 6, 7 приведены результаты численных расчетов фазовой структуры ВГВ для различных значений частоты ω . Линии равной фазы Ω каждой волновой моды задаются параметрически (с параметром ν) [17, 18]:

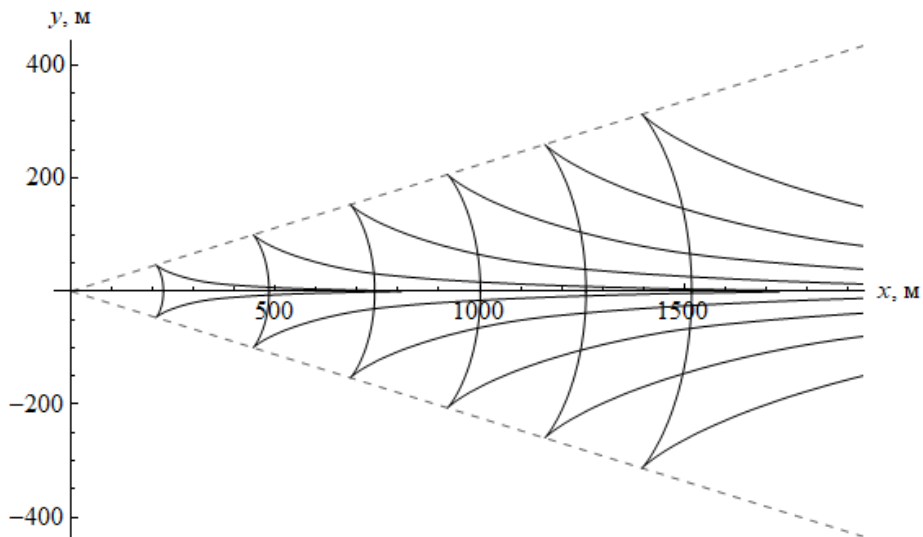
$$x(\nu) = (\omega t - \Omega) / (\mu_n(\nu) - \nu \mu'_n(\nu)), \quad y(\nu) = -\mu'_n(\nu) (\omega t - \Omega) / (\mu_n(\nu) - \nu \mu'_n(\nu)).$$

Линии равной фазы Ω на рисунках – сплошные кривые, штриховые линии – соответствующие волновые фронты (каустики). На рис. 6 значения параметров были следующие: $\omega = 0,0026 \text{ с}^{-1}$, $t = 3600 \text{ с}$. Угол полураствора волнового клина (внешнего) $\alpha_1 = 52,44^\circ$, угол полураствора внутреннего клина $\alpha_0 = 31,46^\circ$ (направление α_0 задается третьим слева пунктирным лучом). Величина α_0 определяется равенством $\alpha_0 = -\arctg \nu_0$, где ν_0 – положительный корень уравнения $\mu'_2(\nu) = \mu_2(\nu)/\nu$. Значения углов полураствора других трех волновых

фронтов α_k ($k = 1, 2, 3$) определяются локальными экстремумами функции $\mu'_2(v)$: $\alpha_k = -\text{arctg}(\mu'_2(v_k^*))$, где v_k^* – корни уравнения $\mu''_2(v_k^*) = 0$. Волны во внутреннем клине (волны первого типа) бегут влево (к началу координат), волны во внешнем клине (волны второго типа) бегут вправо (от начала координат). Фаза вдоль гребней волн первого типа (слева направо): $\Omega = \{4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, 14\pi\}$, фаза вдоль гребней волн второго типа (справа налево): $\Omega = \{-2\pi, 0, 2\pi\}$.



Р и с. 6. Линии равной фазы для двух волновых систем
F i g. 6. Equal phase lines for two wave systems



Р и с. 7. Линии равной фазы для одной волновой системы
F i g. 7. Equal phase lines for one wave system

В определенный момент времени $\tau = \Omega/\omega$ происходит превращение волны первого типа в волну второго типа. Две другие пары волновых фронтов образуют с осью x углы $\alpha_2 = 34,79^\circ$ и $\alpha_3 = 24,46^\circ$ соответственно. На рис. 7 значения параметров следующие: $\omega = 0,0012 \text{ с}^{-1}$, $t = 3600 \text{ с}$. Волны ограничены волновым фронтом с углом полураствора α_1 , где $\alpha_1 = \arctg(\mu'_2(v^*))$, v^* – корень уравнения $\mu''_2(v^*) = 0$. Угол полураствора волнового клина $\alpha_1 = 12,63^\circ$. Волны внутри клина бегут вправо (от начала координат), фаза вдоль гребней волн (справа налево): $\Omega = \{4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi\}$.

Таким образом, численные расчеты для различных режимов волновой генерации демонстрируют большое разнообразие возбуждаемых ВГВ в океане с произвольными вертикальными распределениями частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений. Для детального анализа дисперсионных соотношений можно использовать модельные представления гидрологических параметров, качественно верно описывающие как характер, так и масштабы пространственной изменчивости сдвиговых океанических течений по глубине.

Асимптотические решения. Модельные представления для частоты плавучести и сдвигового течения позволяют построить асимптотические решения. Используются следующие предположения: частота Брента – Вейселя – постоянная ($N(z) = N = \text{const}$); фоновое сдвиговое течение – одномерное ($U(z) \equiv 0$); $V(z) = V_0 + (V_0 - V_H)z/H$, $V_0 = V(0)$, $V_H = V(-H)$ – линейная функция глубины.

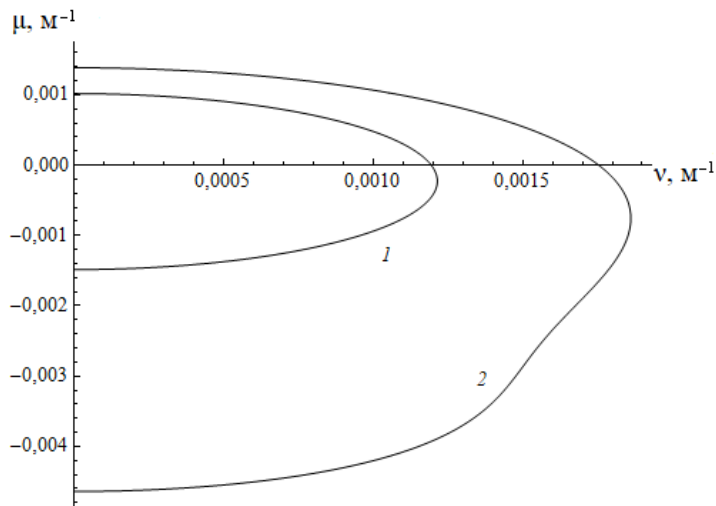


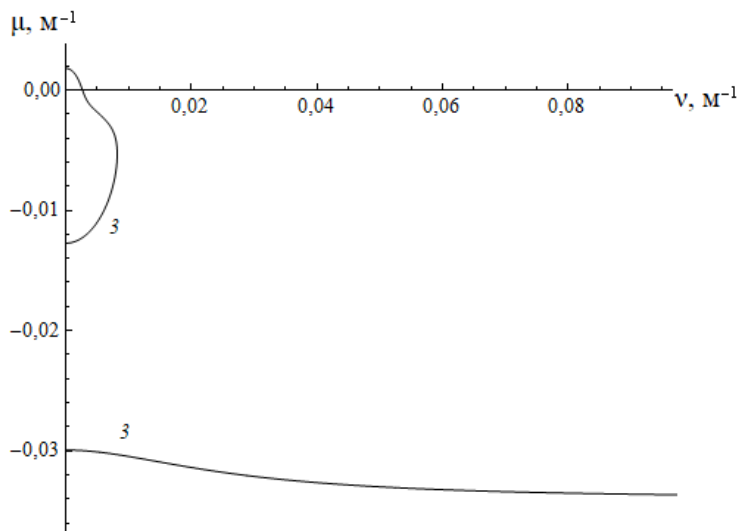
Рис. 8. Дисперсионные зависимости для различных значений ω : линия 1 – одна замкнутая дуга; линия 2 – одна замкнутая дуга

Fig. 8. Dispersion dependences for different values of ω : line 1 – one closed arc; line 2 – one closed arc

На рис. 8–10 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu_2(v, \omega)$ для осредненных реальных условий и тех же значений частоты ω . На рис. 8 $\omega = 0,0013 \text{ с}^{-1}$ (кривая 1), $\omega = 0,0016 \text{ с}^{-1}$ (кривая 2); на рис. 9 $\omega = 0,00185 \text{ с}^{-1}$ (кривые 3); на рис. 10 $\omega = 0,00215 \text{ с}^{-1}$ (кривая 4), $\omega = 0,0038 \text{ с}^{-1}$ (кривая 5). Постоянная осредненная частота плавучести равна

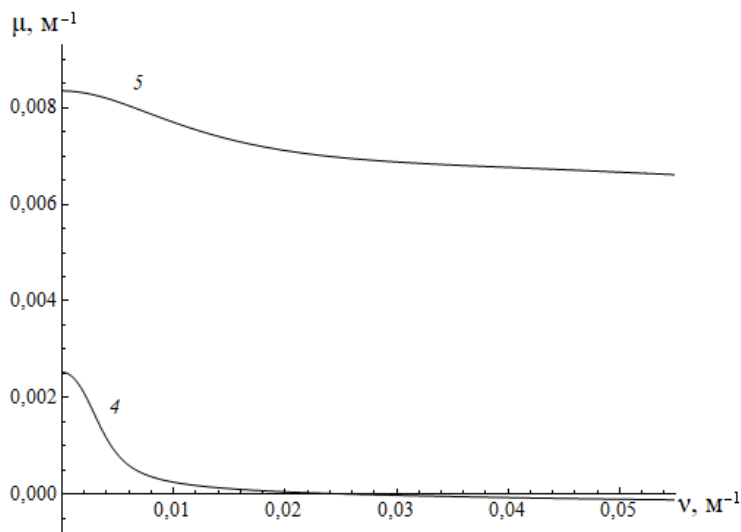
$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 N(z) dz = 0,00295 \text{ с}^{-1}, \quad V_0 = 0,28 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad V_H = -0,03 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$H = 4000 \text{ м}.$$



Р и с. 9. Дисперсионные зависимости для различных значений ω : линии 3 – одна замкнутая дуга, одна разомкнутая кривая с одной точкой перегиба

F i g. 9. Dispersion dependences for different values of ω : lines 3 – one closed arc, one open curve with one inflection point



Р и с. 10. Дисперсионные зависимости для различных значений ω : линия 4 – одна разомкнутая кривая с одной точкой перегиба; линия 5 – верхняя кривая с одной точкой перегиба

F i g. 10. Dispersion dependences for different values of ω : line 4 – one open curve with one inflection point; line 5 – upper curve with one inflection point

Анализ численных результатов показывает, что модельные представления гидрологических параметров позволяют описать основные качественные особенности дисперсионных соотношений, в частности получить при малых значениях ω замкнутые дисперсионные кривые, описывающие генерацию кольцевых (поперечных) волн. При больших значениях ω дисперсионные зависимости как для реальных, так и для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений имеют вид двух разомкнутых кривых. Численные расчеты с использованием реального распределения частоты плавучести и сдвигового течения показывают, что может наблюдаться (в зависимости от частоты ω) дисперсионная картина, при которой имеются более двух точек перегиба, это означает, что вклад в дальнее поле ВГВ вносят несколько волновых пучков. Более сложную структуру дисперсионных соотношений, в том числе наличие более чем двух точек перегиба, можно исследовать только численными методами, используя реальные океанологические данные.

Однако, используя модельные представления, задачу (4) можно решить аналитически. В этом случае дисперсионное соотношение имеет вид [17, 18, 20]

$$\text{Im}(I_{i\lambda}(\beta r(0))I_{-i\lambda}(\beta r(-\pi)))=0, \quad (5)$$

где $I_{\pm i\lambda}$ – модифицированная функция Бесселя мнимого индекса $i\lambda$; $(z) = (\omega - \mu V(z)) / N$; $\lambda = \sqrt{\beta^2 - 1/4}$; $\beta = k/b\mu$ $b = (V_0 - V_H) / NH$ [17, 18, 20, 23]. Решение уравнения (6) $\varphi(z, \mu)$ имеет вид [17, 18, 20]

$$\begin{aligned} \varphi(z, \mu) &= i(\Psi_+(0, \mu)\Psi_-(z, \mu) - \Psi_-(0, \mu)\Psi_+(z, \mu)), \quad (6) \\ \Psi_{\pm}(z, \mu) &= \sqrt{2\beta r(z)} I_{\pm i\lambda}(\beta r(z)). \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение (5) не имеет точных аналитических решений, однако можно найти их асимптотику при больших числах Ричарсона. Используемое в данной модели число Ричардсона $Ri = 767 \gg 1/4$. Решением уравнения (5) являются два семейства дисперсионных кривых: $\mu_{n1}(v)$, $\mu_{n2}(v)$. Рассмотрим вначале семейство $\mu_{n1}(v)$. Все кривые этого семейства находятся в интервале (μ_d, μ_a) , который разбивается точкой поворота на два интервала. В интервале (μ_c, μ_a) обе функции из (6) осциллируют. Заменяя каждую из них асимптотикой, можно получить [17, 18, 20, 23]: $\beta(\Theta(r(-\pi)) - \Theta(r(0))) = \pi n$. Решение этого уравнения имеет вид

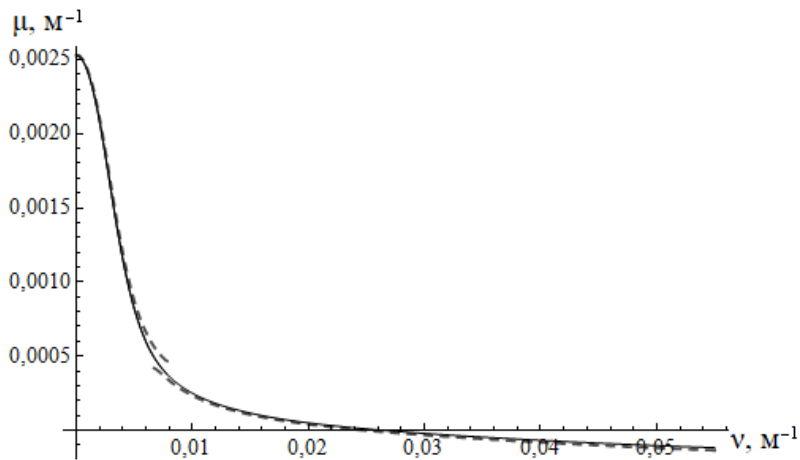
$$v_n(\mu) = \pm ((\pi bn / (\Theta(r(-\pi)) - \Theta(r(0))))^2 - 1) \mu^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Получить из уравнения (7) обратную зависимость $\mu_{n1}(v)$ можно, используя стандартную вычислительную систему типа «Математика». В интервале (μ_d, μ_c) вторая функция в (6) осциллирует, первая уже нет. Поэтому заменяя эти функции соответствующими асимптотиками [17, 18, 20, 23], можно получить

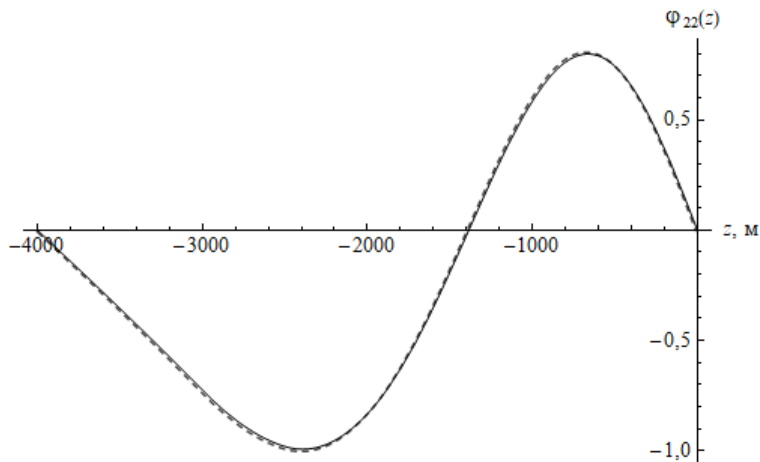
$$|\beta|\Theta(r(-\pi)) - \pi/4 + \text{arctg}(\exp(-2|\beta|\Phi(r(0))))/2 = -\pi n. \quad (8)$$

В отличие от (5) уравнение (8) легко решается численно, так как левая часть (асимптотическое приближение фазы) – строго монотонная функция. На рис. 11 изображены дисперсионные кривые второй моды $\mu_{21}(v)$, рассчитанные

численно из уравнения (4) (сплошная линия), и их асимптотические приближения, рассчитанные по формулам (7), (8) (штриховые линии). Второе семейство дисперсионных кривых $\mu_{n2}(\nu)$ заключено в интервале (μ_b, μ_e) . В этом случае необходимо учитывать вклад в фазу второй функции из (8), и в результате можно получить асимптотику уравнения (5): $|\beta|\Theta(r(-\pi)) = \pi/4 - \pi n$. Решение этого уравнения описывается выражением (8), используя которое можно получить зависимость $\mu_{n2}(\nu)$. На рис. 12 приведены результаты расчетов $\varphi_{22}(z)$ – собственной функции второй моды, нормированной на ее максимальное значение.



Р и с. 11. Дисперсионные кривые второй моды
F i g. 11. Dispersion curves of the second mode



Р и с. 12. Собственная функция второй моды при $\nu = 0,01 \text{ м}^{-1}$, $\mu = 0,00025 \text{ м}^{-1}$, $\omega = 0,002 \text{ с}^{-1}$
 Сплошная линия – численное решение (4), штриховая – асимптотическое приближение (7)
F i g. 12. Eigenfunction of the second mode at $\nu = 0,01 \text{ м}^{-1}$, $\mu = 0,00025 \text{ м}^{-1}$, $\omega = 0,002 \text{ с}^{-1}$. Solid line – numerical result (4), dashed line – asymptotics (7)

Полученные результаты показывают хорошее совпадение асимптотик и численных расчетов, поэтому использование модельных представлений для гидрологических параметров позволяет качественно верно описывать основные характеристики ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми течениями. Можно отметить, в частности, что с использованием гидрологических параметров течение не изменяет свой знак на всей глубине океана, дисперсионные кривые состоят из полностью разомкнутых ветвей и поэтому могут возбуждаться только клиновидные (продольные) волны [17, 18, 20].

Проведенный анализ численных расчетов показал, что учет реальных распределений основных гидрологических параметров океана дает возможность изучить все многообразие генерируемых волновых систем. Изменение основных параметров волновой генерации вызывает заметную качественную перестройку фазовых картин возбуждаемых полей ВГВ, связанную с трансформацией дисперсионных зависимостей. Использование аналитических и асимптотических методов позволяет определять основные характеристики ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми течениями. Поэтому для исследования ВГВ в реальном океане необходимо сочетание как точных численных методов изучения волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих исследовать основные качественные особенности возбуждаемых волн. В общем случае решение дисперсионного уравнения и качественный анализ дисперсионных соотношений представляет значительную математическую трудность [3, 12–15, 19].

Полученные аналитические приближения дисперсионных кривых дают возможность решать более сложные задачи волновой динамики стратифицированных сред. В частности, построенные асимптотики дисперсионных соотношений в дальнейшем позволяют исследовать задачу изучения динамики ВГВ в океане медленноменяющимися и нестационарными параметрами. В этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей. Фазовые функции (модельные интегралы) этих асимптотических решений выражаются через различные специальные функции: интегралы Френеля, функции Эйри, интегралы Пирси [21, 22, 24]. Конкретный выбор фазовых функций (модельных интегралов) полностью определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений.

Заключение. В работе изучены численные и аналитические решения, которые описывают основные фазовые характеристики полей ВГВ в стратифицированном океане конечной глубины, как для произвольных, так и для модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений. Для аналитического решения задачи использованы постоянное распределение частоты плавучести и линейные зависимости фонового сдвигового течения от глубины. Модельные представления для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволяют редуцировать основную спектральную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную спектральную задачу асимптотически. Полученные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и распределения фоновых сдвиговых

скоростей, с хорошей степенью точности описывают решения спектральной задачи. Предложенные асимптотические методы позволяют исследовать волновую динамику аналитически и качественно, что важно для оперативного анализа натурных измерений ВГВ в океане. Аналитические выражения дисперсионных кривых могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки эффективных алгоритмов обнаружения ВГВ методами радиолокации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'sky Yu. Z.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean // Ed. O. D. Shishkina. Netherlands, Dordrecht : Springer, 2001. 406 p. (Atmospheric and Oceanographic Sciences Library Series, vol. 24). doi:10.1007/978-94-017-1325-2
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics // Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2003. 264 p. doi:10.1007/978-3-662-05131-3
3. *Fabrikant A. L., Stepanyants Yu. A.* Propagation of Waves in Shear Flows // Singapore : World Scientific Publishing, 1998. 304 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 18). <https://doi.org/10.1142/2557>
4. *Morozov E. G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling // Cham : Springer International Publishing, 2018. 317 p. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-73159-9>
5. *Velarde M. G., Tarakanov R. Yu., Marchenko A. V.* The Ocean in Motion. Circulation, Waves, Polar Oceanography // Eds. M. G. Velarde, R. Yu. Tarakanov, A. V. Marchenko. Cham : Springer International Publishing AG, 2018. 625 p. (Springer Oceanography Series). doi:10.1007/978-3-319-71934-4
6. *Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.* A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. М. : Издательство “ОнтоПринт”, 2019. 587р.
7. Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge / E. G. Morozov [et al.] // Journal of Oceanography. 2018. Vol. 74. P. 147–167. <https://doi.org/10.1007/s10872-017-0445-x>
8. Water structure and currents in the Bear Island Trough in July–August 2017 / D. I. Frey [et al.] // Russian Journal of Earth Sciences. 2017. Vol. 17. ES3003. doi:10.2205/2017ES000602
9. *Khimchenko E. E., Frey D. I., Morozov E. G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // Russian Journal of Earth Sciences. 2020. Vol. 20. ES2006. doi:10.2205/2020ES000711
10. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flow // Journal of Fluid Mechanics. 1961. Vol. 10, iss. 4. P. 496–508. doi:10.1017/S0022112061000305
11. Internal waves in sheared flows: Lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space / F. Fraternali [et al.] // Physical Review E. 2018. Vol. 97, iss. 6–1. 063102. doi:10.1103/PhysRevE.97.063102
12. *Гаврильева А. А., Губарев Ю. Г., Лебедев М. П.* Теорема Майлса и первая краевая задача для уравнения Тейлора – Гольдстейна // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. XXII, № 3. С. 24–38. doi:10.33048/SIBJIM.2019.22.303
13. *Khusnutdinova K. R., Zhang X.* Long ring waves in a stratified fluid over a shear flow // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 794. P.17–44. doi:10.1017/jfm.2016.147
14. *Hirota M., Morrison P. J.* Stability boundaries and sufficient stability conditions for stably stratified, monotonic shear flows // Physics Letters A. 2016. Vol. 380, iss. 21. P. 1856–1860. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.03.044>
15. *Churilov S.* On the stability analysis of sharply stratified shear flows // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68. P.867–884. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1161-9>

16. Повышение производительности программного комплекса для моделирования внутренних гравитационных волн IGW Research с помощью Intel® Parallel Studio XE 2013 / Д. Ю. Тюгин [и др.] // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2012. Т. 5, № 3. С. 89–95.
17. *Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2020. Vol. 20. ES4004. doi:10.2205/2020ES000732
18. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Analytical Approximations of Dispersion Relations for Internal Gravity Waves Equation with Shear Flows // *Symmetry*. 2020. Vol. 12, iss. 11. 1865. <https://doi.org/10.3390/sym12111865>
19. *Боровиков В. А., Левченко Е. С.* Функция Грина уравнения внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средним сдвиговым течением // *Морской гидрофизический журнал*. 1987. № 1. С. 24–32.
20. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Внутренние гравитационные волны в океане с разнонаправленными сдвиговыми течениями // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2020. Т. 56, № 1. С. 104–111. doi:10.31857/S0002351520010022
21. *Fröman N., Fröman P. O.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. 214 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511535086>
22. *Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I.* Caustics, Catastrophes and Wave Fields / Eds. L. M. Brekhovskikh, L. B. Felsen, H. A. Haus. Heidelberg : Springer-Verlag, 1993. 228 p. (Wave Phenomena Series, vol. 15) doi: 10.1007/978-3-642-97491-5
23. *Watson G. N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2^d ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1945. 804 p. doi:10.2307/3609752
24. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Распространение внутренних волн Эйри и Френеля в неоднородной по горизонтали среде // *Морской гидрофизический журнал*. 1989. № 6. С. 14–19.

Об авторах:

Булатов Виталий Васильевич, ведущий научный сотрудник, ИПМЭХ РАН (119526, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101-1), доктор физико-математических наук, доктор экономических наук, профессор, **ResearcherID: M-5633-2015**, **Scopus Author ID: 35615830800**, **ORCID ID: 0000-0002-4390-4013**, internalwave@mail.ru

Владимиров Юрий Владимирович, старший научный сотрудник ИПМЭХ РАН (119526, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101-1), кандидат физико-математических наук, **ResearcherID: M-5806-2015**, **Scopus Author ID: 7007066501**, **ORCID ID: 0000-0002-2139-5078**, vladimyura@yandex.ru

Владимиров Игорь Юрьевич, старший научный сотрудник ИО РАН (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36), кандидат физико-математических наук, **ResearcherID: AAY-4825-2020**, **Scopus Author ID: 54790327700**, iyuvladimirov@rambler.ru