

Математическое моделирование генерации топографических внутренних волн нестационарным течением

В линейной постановке с использованием длинноволнового приближения разработана математическая модель, позволяющая рассчитывать поля внутренних волн, генерируемых локальной неровностью дна в нестационарном пространственно однородном потоке. Получено пригодное для вычислений решение соответствующей задачи. Изучены эффекты, связанные с изменением направления течения периодического характера. Проведен анализ распределения по горизонтали амплитуд одной внутренней моды и зависимости этого распределения от параметра Кориолиса.

Введение. Образующиеся за препятствиями под действием набегающего потока волны являются одними из наиболее распространенных в природе. Моделированию подветренных волн, генерируемых стационарными течениями, посвящено большое число работ (см., например, обзор в [1, 2]). Учет изменений со временем параметров течений, характерных для природных явлений, значительно усложняет решение соответствующих гидродинамических задач, поэтому сопутствующие эффекты изучены мало. Определенное представление о волновых полях такого рода дают фазовые портреты поверхностных волн, образуемых при движении импульса давлений по круговому пути [3], а также гравитационно-упругих волн, генерируемых сосредоточенной нагрузкой при составном (поступательном и вращательном) движении [4, 5]. Общий подход описания кинематики волнового следа при круговом движении источника в диспергирующей среде применен в статье [6].

В настоящей работе на основе простой гидродинамической модели [7] получено пригодное для вычислений решение соответствующей задачи о длинных волнах, генерируемых локальной неровностью дна в однородном нестационарном потоке стратифицированной жидкости. Выполнен анализ особенностей формирования поля вынужденных внутренних волн при изменении направления течения. Использованы линейное приближение квазистатики и граничное условие «твердой крышки» на поверхности жидкости, отфильтровывающее поверхностные волны. Предполагается, что горизонтальный масштаб изменчивости потока во много раз больше длин генерируемых волн. В развитие модели из работы [7] учитывается вращение Земли в приближении f -плоскости. Проведен анализ особенностей распределения по горизонтали амплитуд одной внутренней моды и зависимости этого распределения от параметра Кориолиса.

Гидродинамическая модель. Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях $-\infty < x, y < +\infty$, $-H + hf(x, y) < z < 0$ слой невязкой несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости глубины $H - hf(x, y)$. Невозмущенная плотность жидкости $\rho_0(z)$ зависит только от одной верти-

кальной координаты z . Генератором внутренних волн является локальная неровность дна в однородном по пространству и нестационарном поле течения $\mathbf{v}_0 = (u_0(t), v_0(t), 0)$.

В линейной постановке с использованием приближения квазистатики возмущения жидкости описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1(Du - lv) = -p_x, \quad \rho_1(Dv + lu) = -p_y, \quad p_z + g\rho = 0, \\ u_x + v_y + w_z = 0, \quad D\rho = \rho_1 g^{-1} N^2 w, \quad D = \partial / \partial t + u_0(t) \partial / \partial x + v_0(t) \partial / \partial y \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$w = 0 \quad (z = 0), \quad w = u_0(t) \partial h / \partial x + v_0(t) \partial h / \partial y \quad (z = -H). \quad (2)$$

Здесь (u, v, w) , p , ρ – волновые возмущения скорости, давления, плотности жидкости; $N(z) = \sqrt{-g\rho_1^{-1} d\rho_0 / dz}$ – частота Вайселя – Брента; ρ_1 – среднее по глубине значение $\rho_0(z)$, l – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения.

Задача (1), (2), к которой еще необходимо добавить начальные условия, сводится к определению одной функции $\zeta(x, y, z, t)$ – поля вертикальных смещений жидких частиц ($D\zeta = w$):

$$\begin{aligned} (D^2 + l^2) \partial^2 \zeta / \partial z^2 + N^2 \Delta_2 \zeta = 0, \quad \Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \\ \zeta = 0 \quad (z = 0), \quad \zeta = hf(x, y) \quad (z = -H). \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве начальных условий выберем отсутствие волновых возмущений $\zeta(x, y, z, t)$ при $t = 0$, т. е. $\zeta(x, y, z, 0) = -hf(x, y)z/H$, $\partial \zeta(x, y, z, 0) / \partial t = 0$.

Применив к (3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам с параметрами μ и ν , получим следующую краевую задачу для $Z(\mu, \nu, z, t)$ – трансформанты функции $\zeta(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} (d^2 + l^2) Z_{zz} - k^2 N^2 Z = 0 \quad (-H < z < 0), \quad Z = 0 \quad (z = 0), \\ Z = hF(\mu, \nu) \quad (z = -H), \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(\mu, \nu)$ – трансформанта функции $f(x, y)$, $d = \partial / \partial t + i \mathbf{k} \mathbf{v}_0$, $\mathbf{k} = (\mu, \nu)$, $k = |\mathbf{k}|$.

Будем искать решение (4) в виде разложения по модам внутренних волн

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\mu, \nu, t) Z_n(z), \quad (5)$$

где $Z_n(z)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$d^2 Z_n / dz^2 + \lambda_n^2 N^2 Z_n = 0, \quad Z_n(-H) = Z_n(0) = 0, \quad (6)$$

λ_n^2 – собственные значения задачи,

$$\int_{-H}^0 N^2 Z_n Z_m dz = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-H}^0 N^2 Z_n^2 dz = 1.$$

Коэффициенты b_n в разложении (5) вычисляются как коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$b_n(\mu, \nu, t) = \int_{-H}^0 N^2(z) Z(\mu, \nu, z, t) Z_n(z) dz. \quad (7)$$

Умножив уравнение (4) на собственную функцию $Z_n(z)$ и затем проинтегрировав его по z от $-H$ до 0 , получим следующую задачу для определения коэффициентов $b_n(\mu, \nu, t)$:

$$b_n = Z_{nz}(-H) h F(\mu, \nu) (\lambda_n^{-2} - k^2 \lambda_n^{-4} b_{n1}), \quad d^2 b_{n1} + (k^2 \lambda_n^{-2} + l^2) b_{n1} = 1. \quad (8)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (8) с учетом начальных условий можно записать в виде

$$b_{n1} = \omega_n^{-1} \int_0^t \sin(\omega_n \alpha) \exp\{-i[\Phi(t) - \Phi(\tau)]\} d\tau, \quad (9)$$

$$\omega_n^2 = k^2 \lambda_n^{-2} + l^2, \quad \alpha = t - \tau, \quad \Phi(t) = \int_0^t [\mu u_0(\xi) + \nu v_0(\xi)] d\xi.$$

Подставив (9) в (8), а затем получающееся при этом выражение для b_n в (5), найдем

$$Z = h \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) F(\mu, \nu) (1 - k^2 \lambda_n^{-2} b_{n1}), \quad \varphi_n(z) = \lambda_n^{-2} Z_n(z) Z_{nz}(-H). \quad (10)$$

Применив к (10) обратное преобразование Фурье, получим

$$\zeta(x, y, z, t) = h \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) [f(x, y) + J_n(x, y, t)], \quad (11)$$

$$J_n = \lambda_n^{-2} \int_0^t I_n d\tau, \quad I_n = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 F(\mu, \nu) \frac{\sin \omega_n \alpha}{\omega_n} \exp[i(\mu \Delta x + \nu \Delta y)] d\mu d\nu,$$

$$\Delta x = x - \Delta x_0, \quad \Delta y = y - \Delta y_0, \quad \Delta x_0 = \int_{\tau}^t u_0(\xi) d\xi, \quad \Delta y_0 = \int_{\tau}^t v_0(\xi) d\xi.$$

С помощью формулы свертки двойной интеграл I_n преобразуется к виду

$$I_n = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_2 f(\Delta x - x_1, \Delta y - y_1) G(R_1) dx_1 dy_1, \quad (12)$$

$$G(R_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_n \alpha)}{\omega_n} \exp[i(\mu x_1 + \nu y_1)] d\mu d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega_n \alpha)}{\omega_n} J_0(kR_1) k dk =$$

$$= \frac{\lambda_n^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{k_1^2 + l^2} \alpha\right)}{\sqrt{k_1^2 + l^2}} J_0(\lambda_n k_1 R_1) k_1 dk_1; \quad k = k_1 \lambda_n, \quad R_1^2 = x_1^2 + y_1^2. \quad (13)$$

Здесь сначала был сделан переход в полярную систему координат $\mu = k \cos \theta$, $\nu = k \sin \theta$, затем интеграл по углу θ выражен через функцию Бесселя нулевого порядка. Используя далее формулу (2.12.23.8) из работы [8], для функции $G(R_1)$ найдем простое выражение

$$G(R_1) = \frac{\lambda_n^2}{2\pi \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n^2 R_1^2}} \cos\left(f \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n^2 R_1^2}\right) \quad (\alpha > \lambda_n R_1),$$

$$G(R_1) = 0 \quad (\alpha < \lambda_n R_1). \quad (14)$$

Заметим, что с учетом (14) область интегрирования в (12) является кругом $R_1 < \alpha / \lambda_n$.

Модельное распределение неровности дна. Для упрощения полученного решения (11) – (14), содержащего тройные интегралы, рассмотрим модельное распределение неровности дна вида

$$f(x, y) = (R^2 / L^2 + 1)^{-m}, \quad R^2 = x^2 + y^2. \quad (15)$$

Параметр L характеризует горизонтальный масштаб неровности дна, параметр m – крутизну склона. Для функций такого вида двойной интеграл (12) может быть преобразован в однократный.

Для распределения (15) в соответствии с формулой (12) сначала вычисляется оператор Лапласа

$$\Delta_2 f(x, y) = F_m, \quad F_m = 4m^2 L^{-2} E^{-m-1} - 4m(m+1)L^{-2} E^{-m-2}, \quad E = R^2 L^{-2} + 1.$$

Затем аргумент функции $f(\Delta x - x_1, \Delta y - y_1)$ в (12) преобразуется к виду

$$E = [(\Delta x - x_1)^2 + (\Delta y - y_1)^2] L^{-2} + 1 = A - B \cos \varphi,$$

$$A = [(\Delta R)^2 + R_1^2] L^{-2} + 1, \quad B = 2\Delta R R_1 L^{-2}, \quad (16)$$

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Потом вычисляются вспомогательные интегралы

$$K_m = \int_0^{2\pi} E^{-m} d\varphi, \quad K_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}}, \quad K_{m+1} = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial A} K_m.$$

Таким образом, выводится следующее выражение:

$$I_n = - \int_0^{\alpha/\lambda_n} \left(\int_0^{2\pi} F_m d\varphi \right) G(R_1) R_1 dR_1 = -2\pi \int_0^{\alpha/\lambda_n} M_m G(R_1) R_1 dR_1, \quad (17)$$

$$M_m = (2\pi)^{-1} [4m^2 L^2 K_{m+1} - 4m(m+1)L^2 K_{m+2}].$$

Замена $\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n^2 R_1^2} = \eta$ позволяет устранить особенность подынтегральной функции (14) в (17) и получить формулу для распределения амплитуды n -й моды $J_n(x, y, t)$ в виде уже двойного интеграла

$$J_n = -\lambda_n^{-2} \int_0^t \int_0^\alpha M_m \cos(l\eta) d\eta d\tau, \quad (18)$$

который представляется относительно простым и удобным для численных расчетов. Явные выражения для множителя M_m в случае $m = 1$ и 2 имеют вид

$$M_1 = 8L^{-2} [A(A^2 - B^2)^{-3/2} - (2A^2 + B^2)(A^2 - B^2)^{-5/2}], \quad (19)$$

$$M_2 = 8L^{-2} [(4A^2 + 2B^2)(A^2 - B^2)^{-5/2} - 3A(2A^2 + 3B^2)(A^2 - B^2)^{-7/2}].$$

Параметры A и B определены в (16), где после замены $R_1 = \lambda_n^{-1} \sqrt{\alpha^2 - \eta^2}$.

Итак, ряд (11) вместе с (18) представляет собой окончательное решение задачи для модельной формы неровности дна вида (15). Формула (11) представляет собой разложение поля вертикальных смещений жидкости по модам внутренних волн. Множитель $\varphi_n(z)$ определяется стратификацией и описывает распределение возмущений n -й моды по вертикали, выражение $A_n(x, y, t) = f(x, y) + J_n(x, y, t)$ описывает эволюцию распределений возмущений среды по горизонтали. Выражение для $J_n(x, y, t)$ представляет собой двойной интеграл (18) по ограниченной области с относительно простой подынтегральной функцией.

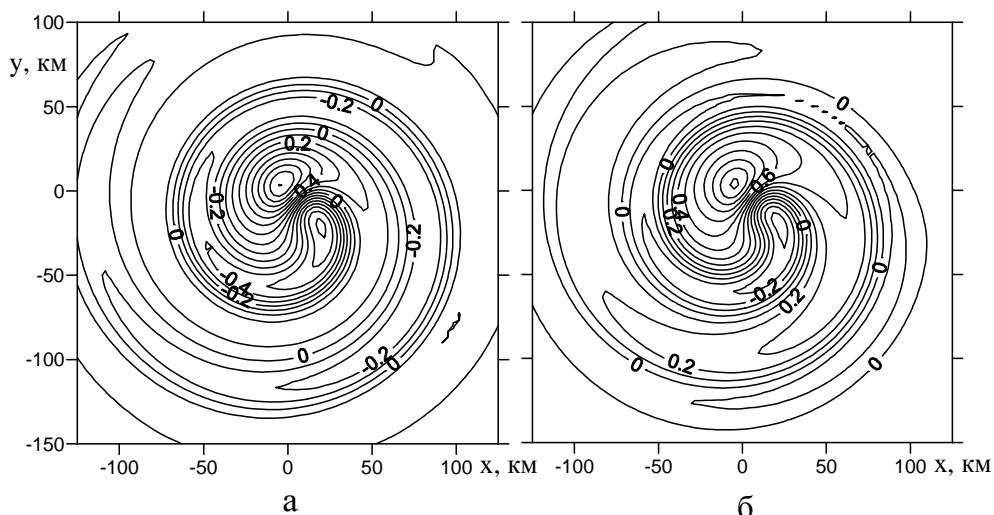
Характер распределения интенсивности волновых возмущений при изменении направления скорости течения. Известно, что при постоянной скорости течения волновой след за генератором имеет симметричную V-образную форму с прямолинейными границами. При движении генератора по круговому пути [3, 6] границы следа – криволинейные, причем внутренняя граница (ближняя к центру траектории) имеет конечную длину [6]. Опираясь на результаты работы [7], можно предположить, что при изменении направления течения с внешней стороны от траектории генератора относительно потока имеет место дивергенция волновых лучей, приводящая к уменьшению амплитуд волн, а с внутренней стороны – к увеличению амплитуд.

Пусть скорость течения изменяет направление по закону

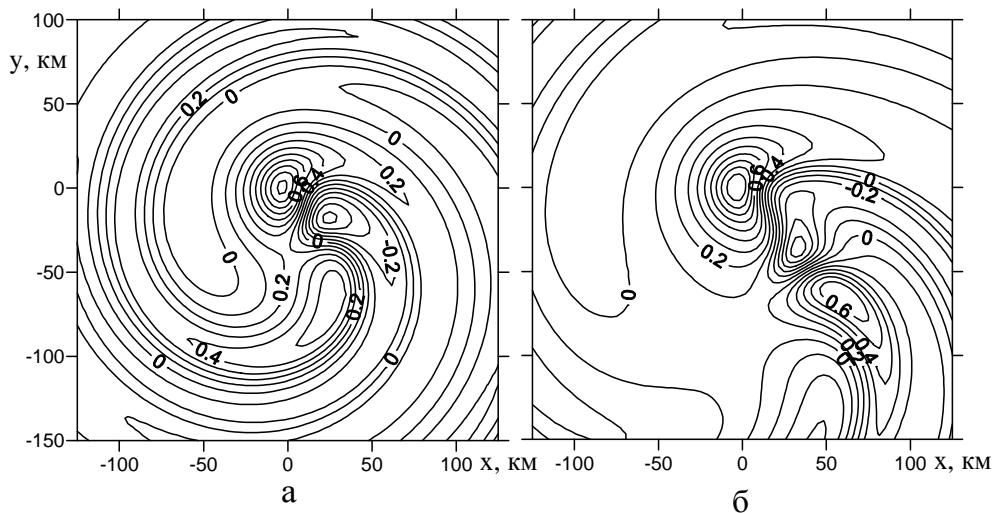
$$u_0(t) = c_0 \cos \sigma t, \quad v_0(t) = c_0 \sin \sigma t.$$

Общее представление о характере волнового поля в ближней области дано рис. 1. В целом распределение $A_n(x, y, t)$ представляет собой спиральную

волну. При выбранных значениях параметров наиболее значительные возмущения волнового поля сосредоточены в области вершины неровности дна и представляют собой два локальных экстремума – максимум и минимум. Первый из них – гидростатический, второй – волновой. В отсутствие вращения жидкости (рис. 1, а) наибольшую амплитуду спиральная волна имеет на внешнем фронте. С увеличением широты амплитуда на внешнем фронте убывает и растет на внутреннем фронте. Кроме того, как показывают расчеты, с увеличением параметра Кориолиса амплитудное распределение становится более изменчивым. Этот эффект, очевидно, является следствием дисперсии.



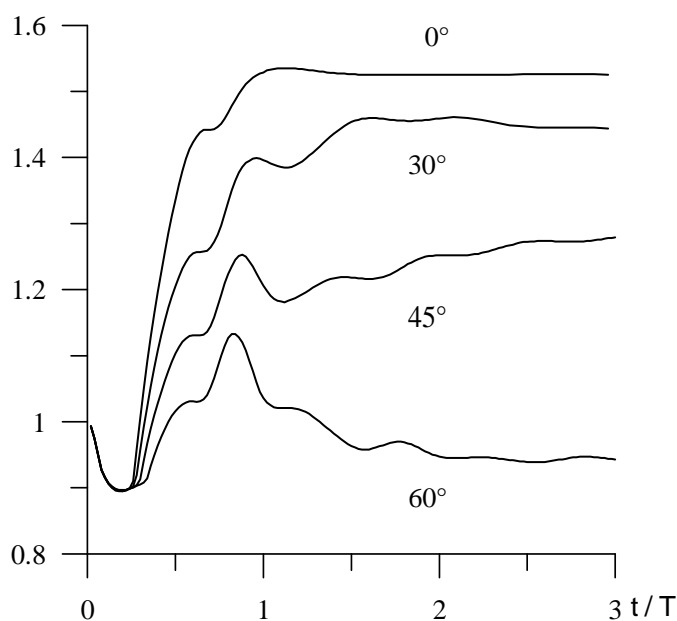
Р и с. 1. Распределение $A_n(x, y, t)$ – интенсивности волновых возмущений по горизонтали на широте 0° (а) и 30° (б) ($L = 20 \text{ км}$, $m = 1$, $T = 2\pi/\sigma = 12 \text{ ч}$), $c_0 = 1 \text{ м/с}$, $c_n = \lambda_n^{-1} = 0.5 \text{ м/с}$, $t = = 2T) L = 20 \text{ км}$, $m = 1$,



Р и с. 2. Распределение $A_n(x, y, t)$ при $T = 24 \text{ ч}$ (а) и $T = 48 \text{ ч}$ (б) ($t = 2T$, широта -30°)

Проведенные расчеты показали, что при увеличении периода изменения направления течения ($T = 2\pi/\sigma$) трансформируется форма головной части спиральной волны (рис. 2). Как видно, она приобретает П-образную форму, угловыми точками которой являются вершина над центром неровности дна и ближайшая к нему впадина. Этот результат отчасти согласуется с описанным в работе [6] обрывом гребня волны. Действительно, протяженность внутреннего гребня волны относительно небольшая, но, как видно, он не обрывается с удалением от вершины неровности дна, а продолжается внутренним фронтом волны.

Рассматриваемая модель – нестационарная. С течением времени в неподвижной системе координат волновой след развивается и вращается. Некоторое представление об эволюции и интенсивности возмущений в ближней области дает рис. 3. Отметим, что установление экстремальных значений происходит примерно за полтора – два периода изменения направления потока, с увеличением значения широты высота волны убывает.



Р и с. 3. Зависимость высоты волны от времени для значений широты 0, 30, 45 и 60° (значения остальных параметров те же, что и для рис. 1)

Заключение. Построена математическая модель генерации внутренних топографических волн нестационарным течением. Решение задачи (1), (2) представлено в виде разложения по модам внутренних волн (11). Вклад отдельной моды разделен по пространственным переменным. Множитель $\varphi_n(z)$ определяется только стратификацией, не зависит от параметров потока и характеризует распределение возмущений среды по вертикали. Амплитудный множитель $J_n(x, y, t)$ определяется видом внешних давлений, параметрами их движения и характеризует зависимость возмущений среды от времени и их распределение по горизонтали. Для модельной формы неровности дна (15) по-

лучено удобное для проведения численных расчетов выражение (18), позволяющее учитывать изменение скорости течения по величине и направлению.

В работе проведен анализ эффектов, связанных только с изменением направления течения. Установлено, что во вращающемся потоке постоянной интенсивности волновой след за неровностью дна представляет собой спиральную волну. Головная часть волны при периоде изменения потока порядка суток имеет П-образную форму. Угловыми точками следа являются центр неровности дна и точка возврата внутренней ветви переднего фронта, в окрестности которой волновые возмущения потока наиболее значительны.

Проведенный анализ показал, что с увеличением значения широты от 0 до 60° высота волны уменьшается примерно в полтора раза и волновое поле становится более изменчивым в области внутреннего фронта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стацук Н.М и др. Гидродинамика морских волн. – Киев: Наук. думка, 1992. – 162 с.
2. Sharman R.D. Three-dimensional structure of forced gravity waves and lee waves // J. Atmos. Sci. – 2004. – 61. – P. 664 – 681.
3. Сретенский Л.Н. О волнах, поднимаемых кораблем при движении по круговому пути // Изв. АН СССР. ОТН. – 1946. – 1. – С. 13 – 22.
4. Букатов А.Е., Жарков В.В. Генерация трехмерных изгибных колебаний плавающей упругой пластинки при движении сосредоточенной нагрузки по сложной траектории // ПМТФ. – 1997. – 38, № 3. – С. 164 – 173.
5. Bukatov A.E., Zharkov V.V. The floating continuous ice cover flexural oscillations when a load is moving along a complicated trajectory // Int. J. Offshor. Pol. engineer. – 2001. – 11, № 1. – P. 1 – 8.
6. Алексеенко С.В., Череп А.А. Образование спиральных волн при круговом движении источника в диспергирующей среде // Докл. РАН. – 1992. – 327, № 3. – С. 306 – 310.
7. Санников В.Ф. Фокусировка внутренних волн, генерируемых при неравномерном движении области атмосферных давлений // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – № 5. – С. 22 – 29.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
E-mail: vf_sannikov@mail.ru

Материал поступил
в редакцию 01.06.09

АНОТАЦІЯ У лінійній постановці з використанням довгохвильового наближення розроблена математична модель, що дозволяє розраховувати поля внутрішніх хвиль, які генеруються локальною нерівністю дна в нестационарному просторово однорідному потоці. Одержане додатне для обчислень рішення відповідної задачі. Вивчені ефекти, пов'язані зі зміною напрямку течії періодичного характеру. Проведений аналіз розподілу по горизонталі амплітуд однієї внутрішньої моди і залежності цього розподілу від параметра Коріоліса.

ABSTRACT Mathematical model permitting to calculate the fields of internal waves generated by the bottom local roughness in nonstationary spatially uniform flow is developed in the linear statement using long-wave approximation. Suitable for the calculations solution of the corresponding problem is obtained. The effects connected with periodical changes of the current direction are studied. Horizontal distribution of the amplitudes of one internal mode and dependence of this distribution upon the Coriolis parameter are analyzed.