

*Посвящается светлой памяти  
Александра Исаевича Фельзенбаума –  
учителя, наставника и друга*

С.В. Музылев, Т.Б. Цыбанева

## **Внутренние волны Кельвина в море под ледяным покровом**

Приводятся теоретические основы линейной теории внутренних волн Кельвина в стратифицированном море под ледяным покровом. Лед полагается тонкой упругой пластиной постоянной толщины с постоянными значениями модуля Юнга, коэффициентов Пуассона и сжатия. Считается, что нормальная скорость на дне равна нулю, на нижней границе льда выполнены линеаризованные кинематическое и динамическое условия. Найдены явные решения для внутренних волн Кельвина, а также соответствующие им дисперсионные уравнения. Задача рассматривается в рамках единой теории волн под ледяным покровом без использования приближения гидростатики.

**Ключевые слова:** волны Кельвина, внутренние волны, ледяной покров, параметр Кориолиса.

**Введение.** Теоретическое описание волновых движений в океане с учетом рельефа дна, береговых границ, вращения Земли и стратификации вод является классической проблемой геофизической гидродинамики. Среди таких движений важную роль в динамике атмосферы и океана играют крупномасштабные береговые волны Кельвина. Специфика таких гравитационных волн состоит в том, что они возникают из-за влияния вращения Земли на волны, захваченные береговой границей. Эти волны, движущиеся в одном направлении, в Северном полушарии обтекают контур бассейна против часовой стрелки, нормальная к берегу составляющая их скорости тождественно равна нулю, амплитуда волн максимальна на береговой границе и экспоненциально убывает в сторону открытого моря. Волны Кельвина подразделяются на поверхностные, или баротропные, и внутренние, или бароклинные. Поверхностные волны Кельвина охватывают всю толщу жидкости от свободной поверхности моря до дна, а внутренние волны Кельвина обычно наблюдаются в слоях морской воды с большими градиентами плотности (например в окрестности океанического термоклина).

В большинстве широко известных монографий по волнам в океане [1 – 4] нет никакого упоминания о возможном влиянии ледяного покрова на волны в океане, и волны Кельвина в частности. Вероятно, это связано с тем, что для корректного учета ледяного покрова требуется привлечение не только гидродинамических подходов, но и методов теории упругости, что существенно затрудняет исследования.

**Постановка задачи и основные уравнения теории.** Сплошной ледяной покров при достаточно естественных условиях можно рассматривать как тонкую упругую пластину, плавающую на поверхности моря. Если не интересоваться процессами, происходящими в толще льда, то основные уравне-

ния и граничные условия при учете ледяного покрова не должны отличаться от аналогичных уравнений и условий в случае отсутствия льда на поверхности моря. Исключением является динамическое условие на границе вода – лед, в котором появляются дополнительные слагаемые, обусловленные упругими свойствами льда, силами инерции и сжатия – растяжения, действующими на ледяной покров.

Пусть в состоянии гидростатического равновесия при отсутствии фоновых течений жидкость характеризуется плотностью  $\rho_0(z)$  и давлением

$$P_0(z) \equiv -g \int_0^z \rho_0(z) dz \quad (\text{ось } z \text{ направлена вертикально вверх}).$$

Рассмотрим волновые движения, представляющие собой малые отклонения от такого состояния равновесия с плотностью  $\rho_0(z) + \rho_w(x, y, z, t)$  ( $\rho_w(x, y, z, t) \ll \rho_0(z)$ ) и давлением  $P_0(z) + P(x, y, z, t)$  ( $P(x, y, z, t) \ll P_0(z)$ ). Отклонение давления от гидростатического  $P(x, y, z, t)$  будем называть возмущением давления. Когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем говорить о давлении, подразумеваемая возмущенное давление  $P$ .

Рассмотрим на вращающейся Земле заполненный стратифицированной жидкостью бассейн постоянной глубины  $z = -H = \text{const}$ , ограниченный прямолинейным берегом. Будем считать, что сверху бассейн покрыт ледяным покровом постоянной толщины  $h$ . Ось  $z$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  совпадает с линией берега ( $y = 0$ ), ось  $y$  направлена по нормали к берегу в сторону открытого моря.

Исходная линеаризованная система уравнений в приближении идеальной жидкости имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P}{\partial z} + g \rho_w \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} - \frac{N^2}{g} w = 0. \quad (4)$$

Здесь  $u, v$  – компоненты горизонтальной скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $w$  – вертикальная скорость;  $t$  – время;  $g$  – ускорение свободного па-

дения;  $f = \text{const}$  – параметр Кориолиса;  $N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}}$  – частота

Брента – Вайсяля.

Уравнения (1) – (4) стандартной процедурой [5, 6] в приближении Буссинеска и в предположении постоянства частоты Брента – Вайсяля сводятся к одному уравнению для возмущенного давления  $P$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)\Delta P + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Поставленную задачу следует дополнить граничными условиями на берегах (которые будем полагать отвесными), дне и нижней поверхности ледяного покрова. На берегах нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$v|_{y=0} = 0. \quad (6)$$

На дне выполняется условие непротекания жидкости, которое в рассматриваемом случае постоянной глубины океана имеет вид

$$w|_{z=-H} = 0. \quad (7)$$

На нижней кромке льда ( $z = 0$ ) выполняются линеаризованные кинематическое

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad (8)$$

и динамическое

$$P - g\rho_0\eta = P_a \quad (9)$$

условия, где  $\eta = \eta(x, y, t)$  – прогиб ледяной поверхности,  $P_a = P_a(x, y, t)$  – давление непосредственно на границе вода – лед.

Выражение для прогиба  $\eta(x, y, t)$  через давление  $P|_{z=0}$  на нижней границе льда найдем из уравнения (3) и кинематического условия (8):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)\eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Будем моделировать лед лежащей в горизонтальной плоскости тонкой упругой пластиной постоянной толщины  $h$ . Это предположение хорошо подтверждается экспериментальными данными [7, 8]. Из уравнений для свободных колебаний такой пластины находим давление  $P_a$  на нижней границе льда [9, 10]:

$$\frac{1}{\rho_w} P_a = \mathcal{P}\eta, \quad (11)$$

где  $\mathcal{P} = B\Delta^2 + Q\Delta + M \partial^2 / \partial t^2$ ,  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  и

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-s^2)\rho_0}, \quad Q = \frac{Kh}{\rho_0}, \quad M = \frac{\rho_I h}{\rho_0}. \quad (12)$$

Здесь  $B$  – коэффициент цилиндрической жесткости (или жесткости при изгибе) льда,  $E$  – модуль Юнга,  $s$  – коэффициент Пуассона,  $K$  – коэффициент сжатия льда,  $\rho_I = \text{const}$  – плотность льда. Слагаемые, пропорциональные  $B$ ,  $M$  и  $Q$ , возникают соответственно из-за упругих свойств льда, сил инерции и сжатия – растяжения, действующих на ледяной покров.

Нужно отметить, что числовые значения механических характеристик морского льда – модуля упругости льда\* (модуля Юнга)  $E$  и коэффициента сжатия  $K$  – известны с очень небольшой точностью. Приведем характерные значения этих величин для льда. Так, средний многолетний динамический модуль упругости для однолетнего льда средней толщины в Баренцевом море в декабре – апреле составляет около 8 ГПа [11]. Согласно работе [10],  $E = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2 = 6 \text{ ГПа}$ ;  $s = 0,3$ ;  $K = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ ГПа}$ ;  $\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_I = 0,9\rho_0$ . При толщине льда  $h = 1 \text{ м}$  для коэффициентов (12) получаем:  $B \approx 5 \cdot 10^5 \text{ м}^5/\text{с}^2$ ,  $Q \approx 10^3 \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $M = 0,9 \text{ м}$ .

Из уравнения (11) и динамического условия (9) имеем

$$P|_{z=0} = \rho_0 (g + \mathcal{P})\eta. \quad (13)$$

Отсюда в силу соотношения (10) находим граничное условие на нижней поверхности льда

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) P + (g + \mathcal{P}) \frac{\partial P}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Условия на берегах (6) и дне (7) следующим образом выражаются через отклонение  $P$  давления от гидростатического:

---

\* В дальнейшем под модулем упругости льда будем понимать его динамическое (а не статическое) значение, определяемое, например, по данным о скоростях продольных и поперечных изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове. Динамический модуль упругости является фундаментальной физической характеристикой льда, он необходим для численной оценки механического поведения морского ледяного покрова при динамических нагрузках, время воздействия которых значительно меньше 1 с.

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y=0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, нужно решить уравнение (5) при граничных условиях (14) – (16).

Будем искать решение задачи (5), (14) – (16) в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$P(x, y, z, t) = e^{i(kx - \omega t)} p(y, z),$$

где  $k$  – волновое число,  $\omega$  – частота волны,  $p(y, z)$  – амплитудная функция.

Тогда для  $p(y, z)$  получим уравнение

$$(\omega^2 - f^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + (\omega^2 - N^2) \left( \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k^2 p \right) = 0 \quad (17)$$

и следующие граничные условия:

$$\left\{ \left[ g + B \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right)^2 + Q \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) - M \omega^2 \right] \frac{\partial p}{\partial z} - (\omega^2 - N^2) p \right\}_{z=0} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, \quad (19)$$

$$\left( \omega \frac{\partial p}{\partial y} + k f p \right)_{y=0} = 0. \quad (20)$$

**Волны Кельвина в полуплоскости.** Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая волн Кельвина в полуплоскости  $0 \leq y < \infty$ . Разделяя переменные в уравнении (17) и учитывая условие на дне (19), получим

$$p(y, z) = a e^{-\mu y} \cos[\lambda(H + z)], \quad (21)$$

где  $a = \text{const}$  – амплитуда волны Кельвина. Постоянные  $\mu > 0$  и  $\lambda$  согласно уравнению (17) связаны соотношением

$$(\omega^2 - f^2) \lambda^2 + (N^2 - \omega^2) (\mu^2 - k^2) = 0. \quad (22)$$

Из условия на берегу (20) и соотношения (22) находим

$$\mu = f k / \omega; \quad \lambda^2 = k^2 \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2}. \quad (23)$$

Следовательно,  $p(y, z) = a e^{-(fk/\omega)y} \cos \left[ \frac{|k|}{\omega} \sqrt{N^2 - \omega^2} (H + z) \right]$ . Из граничного условия (18) получим дисперсионное уравнение для волн Кельвина в полуплоскости с учетом ледяного покрова

$$\operatorname{tg}(\lambda H) = \lambda \frac{\omega^2}{k^2 g_K(\omega, k)}, \quad (24)$$

где

$$g_K(\omega, k) = g + \left[ B k^4 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right)^2 - Q k^2 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right) - M \omega^2 \right] - \quad (25)$$

аналог ускорения свободного падения с поправками, обусловленными механическими свойствами ледяного покрова для волн Кельвина (поэтому в выражениях (24), (25) использован нижний индекс  $K$ ).

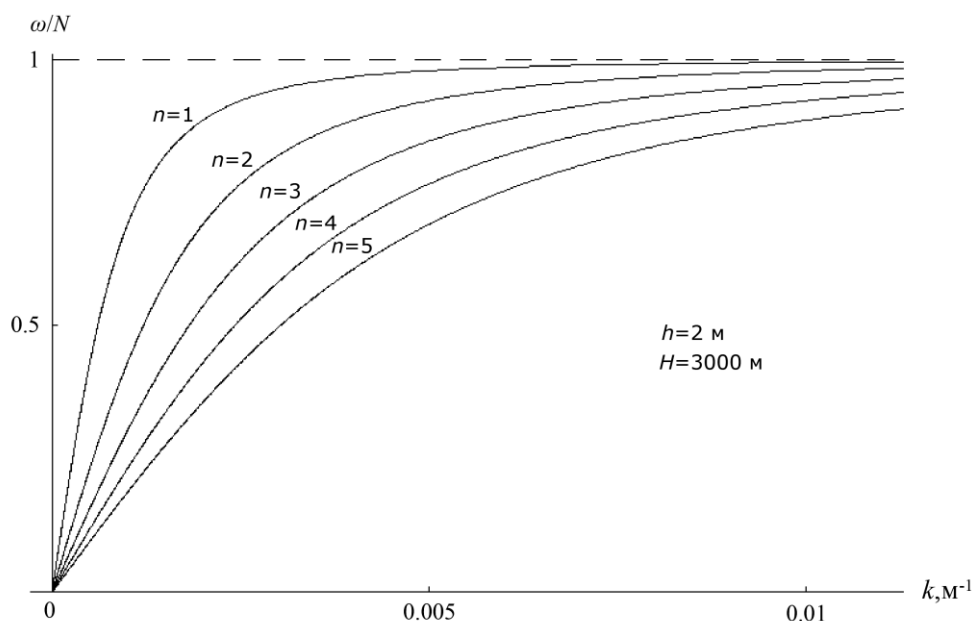
Влияние ледяного покрова в дисперсионном уравнении (24) для волн Кельвина описывается тремя слагаемыми, стоящими в квадратных скобках в выражении (25). При отсутствии льда, т. е. при  $h = 0$  (тогда  $B = Q = M = 0$ ), дисперсионное уравнение (24) переходит в дисперсионное уравнение для волн Кельвина в стратифицированном океане [1, 2, 4]. Когда  $\omega > N$ , параметр  $\lambda$  становится чисто мнимым, в этом случае уравнение (24) имеет единственный вещественный корень  $\omega_0(k)$ , соответствующий баротропной волне Кельвина. Этот случай для однородной жидкости был изучен ранее [12]. В дальнейшем будем рассматривать только внутренние волны и считать  $\omega < N$ .

Уравнение (24) выражает неявную зависимость частоты  $\omega_n(k, h)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , от волнового числа  $k$  для различных мод внутренних волн Кельвина под ледяным покровом постоянной толщины  $h$ . Эти зависимости показаны на рисунке.

Детальный анализ дисперсионного уравнения (24) показывает, что для реальных значений числовых параметров правая часть этого уравнения мала, поэтому в первом приближении  $\operatorname{tg} \lambda H \approx 0$ , откуда  $\lambda H \approx n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и

$$\omega_n \approx \frac{kNH}{\sqrt{n^2 \pi^2 + k^2 H^2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Зависимость частоты внутренних волн Кельвина от толщины ледяного покрова и вращения Земли появляется только в следующих приближениях. Заметим, что из формул (21) и (22) следует равенство нулю нормальной к берегу скорости  $v(x, y, z, t)$  всюду в рассматриваемой области, что совпадает с аналогичным результатом для классических волн Кельвина.



Дисперсионные кривые для внутренних волн Кельвина под ледяным покровом постоянной толщины  $h = 2$  м ( $n$  – номер моды; глубина океана  $H = 3000$  м; частота Брента – Вайсяля  $N = 0,001 \text{ с}^{-1}$ )

**Выводы.** Таким образом, характеристики внутренних волн Кельвина практически не зависят от толщины ледяного покрова. Это отличает их от баротропных волн Кельвина, которые в коротковолновом диапазоне существенно зависят от толщины льда [12]. В то же время они обладают всеми стандартными свойствами внутренних волн Кельвина: распространяются вдоль границы, причем только в одном направлении (к полюсу вдоль восточной границы и к экватору вдоль западной границы); их амплитуда, максимальная на границе, экспоненциально затухает при удалении от берега в сторону открытого океана с коэффициентом затухания, равным внутреннему радиусу деформации Россби.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-05-00889.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
2. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 2. – М.: Мир, 1986. – 416 с.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – 600 с.
4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. – М.: Мир, 1984. – 816 с.

5. *Pedlosky J. Waves in the Ocean and Atmosphere.* – Springer, 2003. – 264 p.
6. *Музылев С.В.* Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи // *Современные проблемы динамики океана и атмосферы.* – М.: Триада ЛТД, 2010. – С. 315 – 345.
7. *Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е.* Динамика морских льдов (математические модели). – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 272 с.
8. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 216 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
10. *Liu A.K., Mollo-Christensen E.* Wave propagation in a solid ice pack // *J. Phys. Oceanogr.* – 1988. – 18, № 11. – P. 1702 – 1712.
11. *Гаврило В.П., Ковалев С.М., Недошивин О.А.* Расчетные среднесезонные характеристики механических свойств однолетнего льда Баренцева и Карского морей. Справочник. – СПб.: Гидрометеиздат, 1996. – 42 с.
12. *Музылев С.В., Цыбанева Т.Б.* Теория волн Кельвина в море под ледяным покровом // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* – 2012. – Спецвыпуск № 4. – С. 149 – 157.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,  
Москва  
E-mail: smuzylev@mail.ru,  
tbt47@mail.ru

Материал поступил  
в редакцию 14.08.12

АНОТАЦІЯ Наводяться теоретичні основи лінійної теорії внутрішніх хвиль Кельвіна в стратифікованому морі під крижаним покривом. Крига вважається тонкою пружною пластинною постійної товщини з постійними значеннями модуля Юнга, коефіцієнтів Пуассона і стиснення. Вважається, що нормальна швидкість на дні рівна нулю, на нижній межі криги виконані лінеаризовані кінематична та динамічна умови. Знайдені явні рішення для внутрішніх хвиль Кельвіна, а також відповідні їм дисперсійні рівняння. Задача розглядається в рамках єдиної теорії хвиль під крижаним покривом без використання наближення гідростатики.

**Ключові слова:** хвилі Кельвіна, внутрішні хвилі, крижаний покрив, параметр Коріоліса.

ABSTRACT Theoretical foundation of the linear theory of the Kelvin internal waves in a stratified sea under the ice cover is represented. The ice is assumed to be a thin elastic plate with constant thickness and constant values of the Yung module, the Poisson coefficients and compression. Normal velocity on the bottom is assumed to equal zero; on the lower ice boundary the linearized kinematic and dynamic conditions are fulfilled. Evident solutions for the Kelvin internal waves and the corresponding dispersion equations are found. The problem is considered within the framework of the unified theory of waves under the ice cover without application of hydrostatics approximation.

**Keywords:** Kelvin waves, internal waves, ice cover, Coriolis parameter.