

Нелинейные эффекты при распространении длинных поверхностных волн в каналах переменного поперечного сечения

© 2015 А.Ю. Базыкина, С.Ф. Доценко

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

E-mail: sf_dotsenko@mail.ru

Поступила в редакцию 24.02.2015 г.

В рамках каналовой модели выполнен численный анализ распространения и деформации одиночных поверхностных длинных волн в каналах с переменным поперечным сечением. Показано, что нелинейность проявляется в увеличении со временем крутизны переднего фронта волны и в ее последующем обрушении. Нелинейность слабо влияет на высоту и длину распространяющейся волны. Путь, пройденный одиночной волной до обрушения, убывает с ростом высоты волны и уменьшением ее длины. Даны оценки амплитудных характеристик волн в зависимости от изменения глубины и ширины канала. Они хорошо описываются известным законом Грина.

Ключевые слова: волны в жидкости, волны конечной амплитуды, распространение волн в каналах, каналовая модель, численные решения, нелинейные эффекты.

Введение. Распространение длинных волн в каналах, бухтах, проливах и прочих нерегулярностях береговой черты может сопровождаться их значительным усилением. Нелинейные длинные волны в бассейнах переменной глубины и деформация их профилей при распространении на мелководье исследовались численно и аналитически во многих работах, в частности в [1 – 11]. Представляется важным анализ особенностей распространения волн в каналах и проливах различной геометрии, поскольку изменение ширины канала, его глубины и формы поперечного сечения в целом существенно влияет на усиление, ослабление и пространственную структуру волнового поля. Эта задача изучалась в линейном приближении, например в [1 – 3, 11 – 14]. В ряде работ по нелинейным волнам в каналах [15 – 18] рассмотрены особенности распространения таких волн, включая трансформацию формы и изменение их высоты. В [19] расчет волн выполнен методом характеристик для канала, ширина шельфовой зоны которого изменяется по линейному закону.

В данной работе исследуется распространение одиночных нелинейных длинных волн в прямолинейных каналах переменного поперечного сечения. Численно проанализирована эволюция таких волн вдоль канала в зависимости от изменения геометрии сечения. Задача о распространении волн решалась численно в рамках каналовой теории длинных волн [20], в которой в качестве основных переменных используются осредненные поперек канала горизонтальная скорость и смещение свободной поверхности жидкости.

Особое внимание уделено изучению влияния геометрии поперечного сечения канала на характер распространения, амплитудные характеристики и форму волны.

Математическая постановка задачи. В горизонтальной плоскости Oxy (x, y – декартовы координаты) рассматривается распространение длинных волн в канале переменного сечения, глубина которого $z = -h(x)$ (z – вертикальная координата), поперечное сечение зеркала охватывает область $|y| \leq b(x)$. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной (горизонтальной) поверхностью жидкости. В рамках канальной теории нелинейных длинных волн рассматривается распространение в таком канале одиночной волны, входящей в него в поперечном сечении $x = 0$ и выходящей через сечение $x = L$. Начальная высота волны $a_0 = 1$ м.

Уравнения нелинейной теории длинных волн оперируют с осредненной по поперечному сечению канала горизонтальной скоростью $u = u(x, t)$ (t – время) и осредненным вдоль поперечного сечения зеркала канала смещением свободной поверхности жидкости $\zeta = \zeta(x, t)$. Уравнения движения жидкости в таких каналах могут быть получены интегрированием уравнений нелинейной теории длинных волн по площади поперечного сечения [15, 16]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{dh}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Su) = 0, \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения; $S(x, t)$ – динамическая площадь вертикального поперечного сечения канала; $H(x, t) = h(x) + \zeta(x, t)$ – полная глубина на продольной оси канала.

Рассмотрим канал, поперечные сечения которого симметричны относительно вертикальной прямой Oz , а именно $z(y) = -H + \alpha(x)|y|^m$ [16], причем в отличие от [16] параметр α здесь считается переменной функцией x . Параметр $m \in (0, +\infty)$ характеризует форму поперечного сечения канала. Если $m = 1$, то поперечное сечение является треугольным, при $m = 2$ оно параболическое, при $m \rightarrow +\infty$ форма поперечного сечения стремится к прямоугольной. Переменный коэффициент $\alpha(x)$ можно определить, если принять, что в невозмущенном состоянии $\zeta = 0$ локальная полуширина зеркала канала равна $b(x)/2$. Таким образом, $\alpha(x) = 2^m h / b^m$. Определив пределы интегрирования по y в поперечном сечении $z(y) = -H + \alpha(x)|y|^m$, найдем его динамическую площадь:

$$S = 2 \int_0^{\sqrt[m]{H/h \cdot b/2}} (-H + \frac{2^m h}{b^m} |y|^m) dy = \frac{m}{m+1} \frac{bH^{m+1/m}}{h^{1/m}}. \quad (2)$$

Вследствие относительной малости ζ будем считать ширину зеркала $b = b(x)$ не зависящей от времени t . Тогда после подстановки (2) в (1) система уравнений становится замкнутой относительно u и H :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{mH}{(m+1)b} u \frac{db}{dx} + u \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{H}{(m+1)h} u \frac{dh}{dx} + \frac{mH}{m+1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

При $m \rightarrow +\infty$ уравнение (4) преобразуется в уравнение неразрывности для волн, распространяющихся в канале прямоугольного сечения, но переменной глубины и ширины. В результате система уравнений (3), (4) примет вид [21]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{dh}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial (Hbu)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Начальные условия для системы уравнений (3), (4) требуют задания полей u и ζ в начальный момент времени. Будем считать, что при $t = 0$ жидкость в канале находится в невозмущенном состоянии, т. е.

$$u(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0. \quad (6)$$

Граничные условия моделируют вход одиночной волны в канал через левую границу и ее свободный выход как через правую, так и через левую границу. Условия выхода волны начинают действовать с момента ее полного входа в канал через левую границу:

$$\zeta = a_0 \sin(\pi\tau_1), \quad u = \sqrt{\frac{gb}{S}} \zeta \quad (x=0, 0 \leq t \leq T_1), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - C_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x=0, t \geq T_1), \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x=L, t \geq 0), \quad (9)$$

где $\tau_1 = t/T_1$; $T_1 = \lambda/C_0$; λ – длина волны на входе в канал; $C_0 = C(0)$; $C_1 = C(L)$.

Выражение для скорости распространения волн в рамках системы уравнений (3), (4) записывается в виде [7, 15]:

$$V(\zeta) \approx \sqrt{gh} \left[1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m} \right) \frac{\zeta}{h} \right]. \quad (10)$$

Производная $\partial\zeta/\partial x$ неограниченно возрастает за время

$$t^* = - \frac{1}{\left(\frac{dV}{d\zeta} \frac{d\zeta_0}{dx} \right) \Big|_{\max}}. \quad (11)$$

Этому временному интервалу соответствует расстояние, пройденное волной и характеризующее область проявления нелинейных эффектов:

$$L^* = Vt^* = \frac{2h}{3|d\zeta_0/dx|_{\max}}. \quad (12)$$

Для одиночного поднятия в форме полуволны синусоиды (7) находим расстояние Λ , при прохождении которого наступает обрушение волны [7]:

$$\Lambda = \frac{2m}{(3m+2)} \frac{\lambda h}{\pi \zeta_0}. \quad (13)$$

Распространение нелинейных волн в бассейнах модельной геометрии. В рамках нелинейной теории длинных волн исследован процесс деформации одиночной волны при распространении в бассейне постоянной глубины. Он показан на рис. 1. Заметим, что локальная горизонтальная скорость волнового течения изменяется пропорционально локальному смещению свободной поверхности. В линейном приближении профиль свободной поверхности сохраняет свою форму (кривая 1).

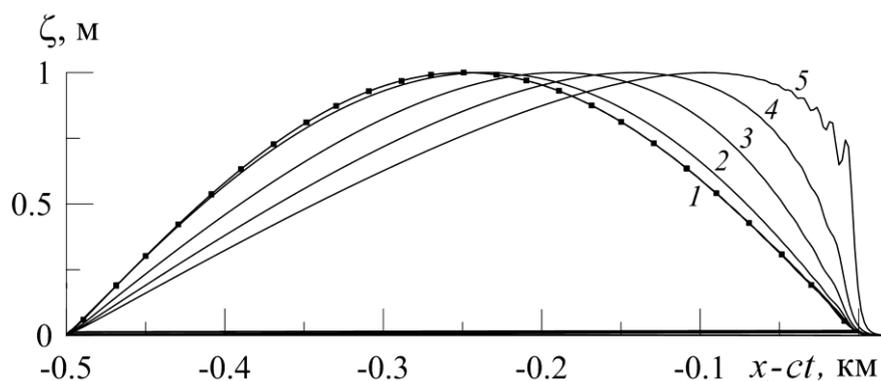


Рис. 1. Эволюция одиночной поверхностной волны начальной высоты 1 м и длины 0,5 км в бассейне глубиной 25 м: кривая 1 – линейная волна; кривые 2 – 5 – нелинейная волна при моментах времени 30, 60, 90, 120 с соответственно

Анализ полученных зависимостей показывает, что влияние нелинейности проявляется в увеличении со временем крутизны свободной поверхности в области переднего фронта, а это приводит в последующем к обрушению волны. Начало обрушения показывает кривая 5.

Исследована также трансформация одиночной длинной волны при распространении над наклонным дном с постоянным уклоном 1° . Глубина бассейна уменьшается линейно от 500 до 10 м при прохождении волной расстояния в 56 км. Начальная длина волны равна 5 км.

На рис. 2 показаны профили волны и распределения горизонтальной скорости. При выходе волны на мелководье убывает скорость ее распространения и происходит рост максимальной высоты почти в два раза.

Распределения амплитуд полей в линейном приближении подчиняются закону Грина [20], согласно которому высота волны пропорциональна $h^{-1/4}$ в заданной точке x . Амплитуда волновой скорости растет при приближении к береговой черте по иному закону, $h^{-3/4}$. Таким образом, максимальная высота волны и волновая скорость должны описываться соответственно следующими соотношениями:

$$A_{\max}(x) = a_0 \frac{h_0^{1/4} b_0^{1/2}}{h(x)^{1/4} b(x)^{1/2}}, \quad U_{\max}(x) = \left(\frac{g b(x)}{S(x)} \right)^{1/2} A_{\max}(x). \quad (14)$$

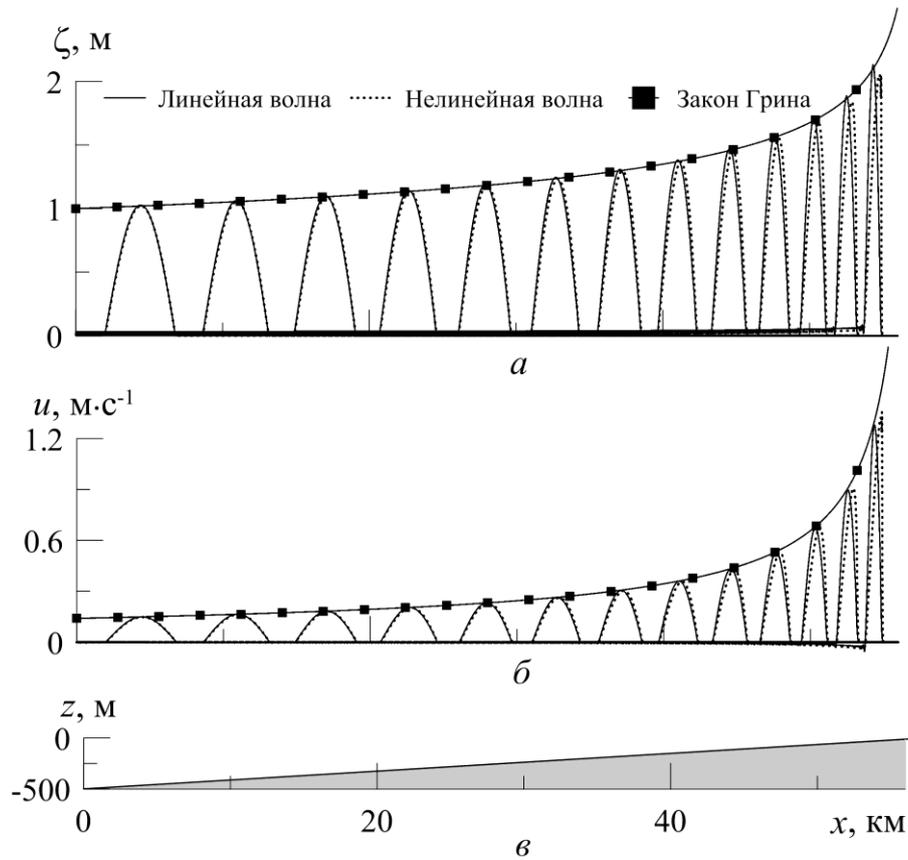


Рис. 2. Трансформация со временем формы волны (а) и распределения горизонтальной скорости (б) в зоне над наклонным дном (в). Начальная высота волны 1 м, длина 5 км

На рис. 2, а, б показаны аналитические оценки амплитудных характеристик волн и скорости течения, рассчитанные по закону Грина. Аналогичные зависимости высот волн от локальной геометрии канала получены и обсуждаются в работах [12 – 14]. При этом длина волны, как и следовало ожидать, уменьшается пропорционально $h^{1/2}$ [20]. При выходе волны на мелководье ее хвостовая часть представляет собой протяженную волну повышения. Скорость волнового течения и скорость головной волны направлены в противоположные стороны. Для нелинейной волны характерно небольшое уменьшение высоты (рис. 2, а) и горизонтальной скорости (рис. 2, б) с течением времени.

Рассмотрим влияние изменения ширины канала на распространение нелинейной длинной волны в прямолинейном канале постоянной глубины $h = 100$ м. Ширина среднего участка канала изменяется с расстоянием по ли-

нейному закону, а именно: локально сужается ($b(x) = 1000$ м, $0 < x < 20$ км; $b(x) = 400$ м, $40 < x < 60$ км) или локально расширяется ($b(x) = 400$ м, $0 < x < 20$ км; $b(x) = 1000$ м, $40 < x < 60$ км). При распространении волны длиной 2 км на участке расширения канала высота волны и горизонтальная скорость волнового течения уменьшаются в полтора раза (рис. 3, а, б), а на участке его сужения – увеличиваются аналогичным образом (рис. 4, а, б).

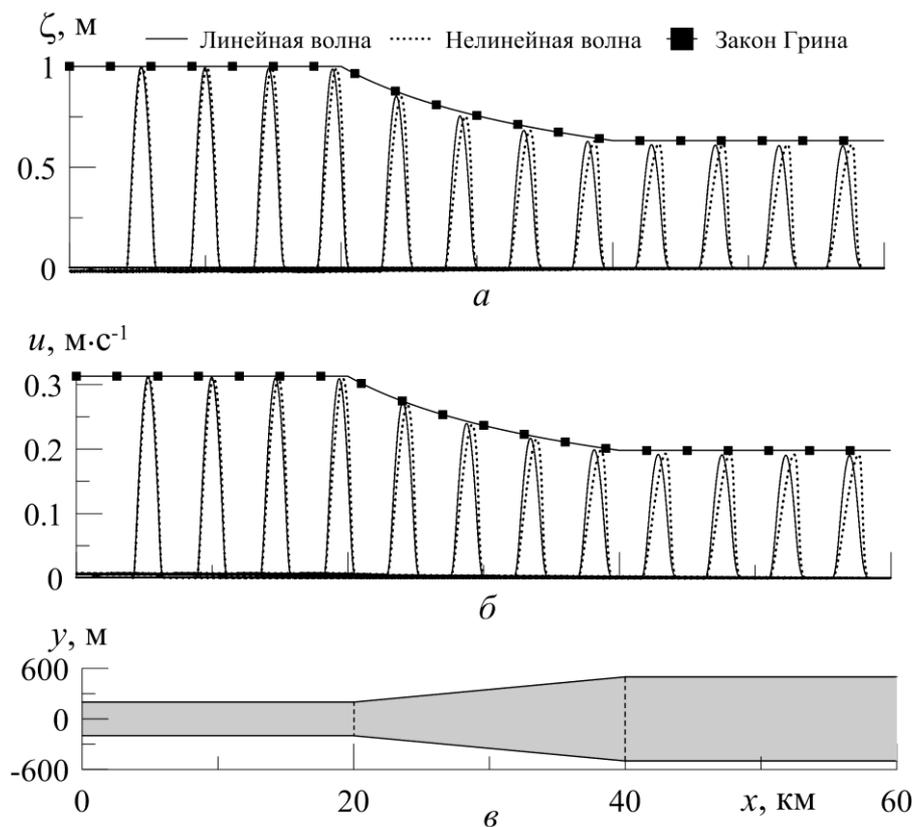


Рис. 3. Трансформация со временем формы волны (а) и распределения горизонтальной скорости (б) для расширяющегося канала (в) при увеличении его ширины от 400 до 1000 м. Глубина канала постоянна и равна 100 м, длина волны 2 км

Амплитудные характеристики полей изменяются пропорционально $b^{-1/2}$. Эти зависимости в форме огибающих (аналоги закона Грина) показаны на рис. 3, а, б. Аналогичные зависимости наблюдались при распространении волн в проливах произвольного сечения [12 – 14]. Нелинейные эффекты проявляются следующим образом: профиль волны деформируется, передний склон становится более крутым, вершина волны сдвигается вперед до тех пор, пока не произойдет обрушение.

Вычислительные эксперименты по сравнению процессов эволюции одиночных линейных и нелинейных волн (рис. 2 – 4) показали, что значительных изменений длины волны, ее высоты и горизонтальной скорости не наблюда-

ется, хотя нелинейность оказывает влияние на увеличение со временем крутизны профиля свободной поверхности в области переднего фронта.

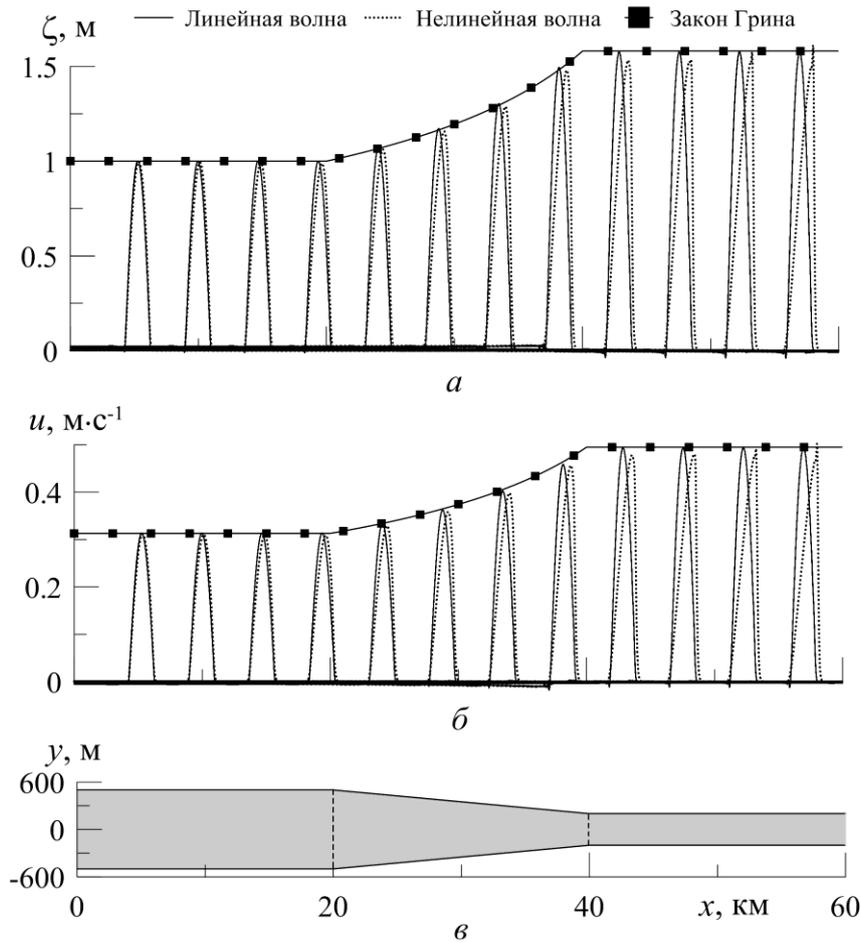


Рис. 4. Трансформация со временем формы волны (а) и распределения горизонтальной скорости (б) для сужающегося канала (в) при уменьшении его ширины от 1000 до 400 м

Кроме этого, численно проанализировано распространение длинных волн в каналах с различной формой поперечного сечения, площадь которого рассчитывается по формуле (2). Канал может иметь треугольную форму сечения (при $m = 1$), параболическую (при $m = 2$) и прямоугольную (при $m \rightarrow +\infty$).

Увеличение крутизны волны приводит к возрастанию проекции вертикальной скорости до того момента, пока не нарушатся условия применимости системы уравнений длинных волн. Оценим расстояние, пройденное волной от входа в канал до ее обрушения.

На рис. 5 в логарифмическом масштабе показана зависимость длины обрушения Λ , нормированной на длину волны λ , от параметра нелинейности a_0/h . Численные расчеты проведены для различной глубины канала при следующих параметрах волны: $a_0 = 1$ м, $\lambda = 2$ км. Кривые 1 – 3 рассчитаны для

различных форм поперечного сечения канала. Здесь же представлены оценки, найденные по аналитической формуле (13). Численные и аналитические расчеты хорошо соответствуют.

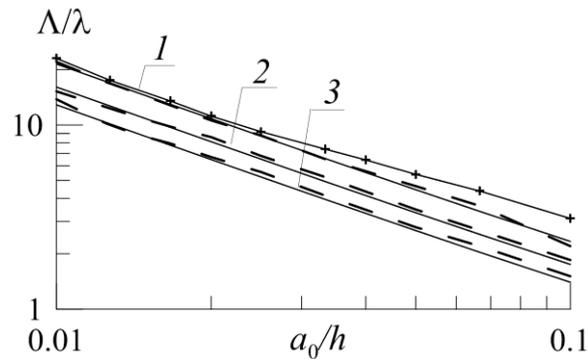


Рис. 5. Зависимости отнесенного к начальной длине волны (Λ/λ) расстояния, которое нелинейная волна проходит до обрушения, от параметра нелинейности a_0/h для различных форм поперечного сечения канала: 1 – при $m = +\infty$; 2 – при $m = 2$; 3 – при $m = 1$ (штриховая линия – численные оценки, прямая линия – аналитические оценки, крестики – численные оценки с учетом донного трения)

Для волн, распространяющихся в канале прямоугольного сечения, проведены оценки влияния донного трения на параметры нелинейной волны. Трение задавалось в уравнении движения (3) дополнительным слагаемым $ku|u|/(h+\zeta)$, где $k = 2,6 \cdot 10^{-3}$. Из рис. 5 видно, что с ростом начальной высоты волны и уменьшением глубины канала усиливается влияние донного трения на расстояние, пройденное волной до обрушения.

Наибольшего значения длина обрушения достигает в канале прямоугольного сечения ($m \rightarrow +\infty$), наименьшего – в канале треугольного сечения ($m = 1$). Это связано с тем, что при $m \rightarrow +\infty$ площадь сечения канала принимает максимально возможное значение для данной глубины h и ширины зеркала b , при $m \rightarrow 1$ она становится минимальной. Все кривые качественно похожи: волна большой амплитуды опрокидывается фактически сразу в момент образования. В то же время при малой амплитуде длина обрушения обратно пропорциональна амплитуде волны и может быть достаточно большой, так что волна остается необрушивающейся на большом расстоянии.

С уменьшением глубины канала влияние нелинейности на амплитудные характеристики волны усиливается. Крутизна волны в области переднего фронта растет быстрее, что приводит к ее более раннему обрушению. К тому же скорость распространения волны в канале с большей глубиной растет.

Исследовалась зависимость амплитуд свободной поверхности и волновой скорости от геометрии канала. На рис. 6 показаны зависимости максимальной амплитуды A_{\max} , нормированной на a_0 (рис. 6, а, в), и максимальной горизонтальной скорости U_{\max} , нормированной на u_0 (рис. 6, б, г), от глубины бассейна h/h_0 (рис. 6, а, б) и ширины канала b/b_0 (рис. 6, в, г) при постоянной глубине. В линейном случае (кривые 1) амплитуды и волновые скорости не зависят от формы канала и изменяются по закону Грина. Нелинейные волны

(кривые 2) распространяются, практически не изменяя амплитуды и горизонтальной скорости. Звездочки на рис. 6 разделяют обрушивающиеся (слева от них) и необрушивающиеся (справа от них) волны. При учете донного трения (кривые 3) высоты волн убывают несколько быстрее и расстояние, пройденное волной до обрушения, немного увеличивается.

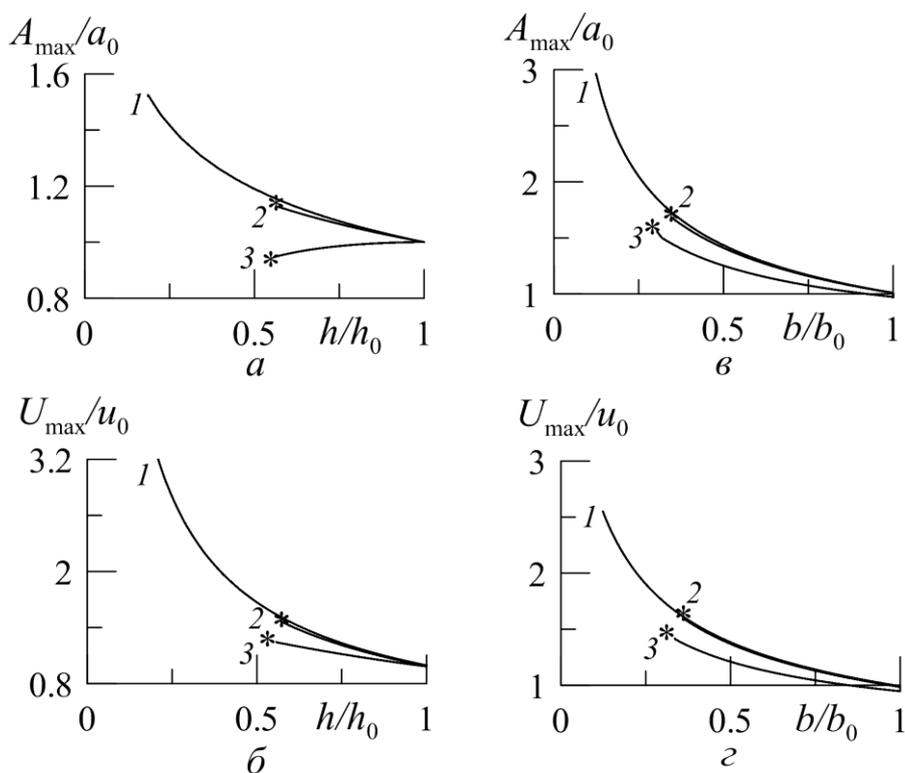


Рис. 6. Зависимости безразмерных амплитуд волн A_{\max}/a_0 (a , б) и безразмерных волновых скоростей U_{\max}/u_0 (б , з) от глубины бассейна h/h_0 (a , б) и ширины канала b/b_0 (б , з) при постоянной глубине 100 м для линейных (кривые 1) и нелинейных (кривые 2) волн, а также при учете донного трения (кривые 3)

Выводы. Численный анализ показывает, что влияние нелинейности сказывается на увеличении со временем крутизны профиля свободной поверхности в области переднего фронта. Длина волны и ее высота под влиянием нелинейности уменьшаются незначительно.

При распространении волны в бассейне постоянной глубины наблюдается увеличение крутизны переднего фронта свободной поверхности с ее последующим обрушением, амплитуда волны немного уменьшается. Линейная волна распространяется без изменений высоты и горизонтальной скорости течения.

С выходом волны на мелководье в бассейне с линейно уменьшающейся глубиной происходит ее усиление, горизонтальная скорость возрастает, при этом длина волны уменьшается.

При распространении волны в канале с локальным расширением или с локальным сужением (при постоянной глубине) на участках расширения высоты свободной поверхности и амплитуды горизонтальной скорости уменьшаются в полтора раза, на участках сужения они увеличиваются на ту же величину. Длина волны, как и ожидалось, остается неизменной.

В рамках каналовой теории длинных волн существенной разницы между амплитудными характеристиками линейных и нелинейных волн не выявлено. Для всех результатов, полученных численно, влияние нелинейности проявляется в изменении формы волны, а именно в увеличении крутизны переднего фронта свободной поверхности, небольшом уменьшении ее высоты с последующим разрушением волны.

Численно проанализировано распространение длинных волн в каналах с различной формой поперечного сечения при одной и той же максимальной глубине и ширине зеркала. Наиболее сильное проявление нелинейности выявлено для канала с треугольным поперечным сечением, так как в этом случае площадь сечения оказывается наименьшей при одной и той же глубине и ширине зеркала. На амплитудные и волновые характеристики форма канала не оказывает существенного влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Основные океанологические задачи теории мелкой воды. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 300 с.
2. *Черкесов Л.В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наук. думка, 1976. – 264 с.
3. *Пелиновский Е.Н.* Нелинейная динамика волн цунами. – Горький: ИПФ АН СССР, 1982. – 226 с.
4. *Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.* Численное моделирование волн цунами. – Новосибирск: Наука, 1983. – 175 с.
5. *Селезов И.Т., Сидорчук В.Н., Яковлев В.В.* Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. – Киев: Наук. думка, 1983. – 207 с.
6. *Конюкова Г.Е., Показеев К.В.* Динамика морских волн. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 298 с.
7. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 271 с.
8. *Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук Ан.Г. и др.* Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. – Новосибирск: Наука, 1989. – 168 с.
9. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
10. *Куркин А.А.* Нелинейная и нестационарная динамика длинных волн в прибрежной зоне. – Н. Новгород: НГТУ, 2005. – 330 с.
11. *Левин Б.В., Носов М.А.* Физика цунами и родственных явлений в океане. – М.: Янус-К, 2005. – 360 с.
12. *Диденкулова И.И., Пелиновский Д.Е., Тюгин Д.Ю. и др.* Бегущие длинные волны в водных прямоугольных каналах переменного сечения // Вестник МГОУ. Сер. «Естественные науки». – 2012. – № 5. – С. 89 – 93.
13. *Доценко С.Ф., Ракова И.Н.* Распространение длинных поверхностных волн в каналах переменного поперечного сечения // Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 2. – С. 3 – 17.

14. *Базыкина А.Ю., Доценко С.Ф.* Применение каналовой модели для описания распространения одиночных волн типа цунами в канале переменного поперечного сечения // Там же. – 2015. – № 1. – С. 29 – 41.
15. *Пелиновский Е.Н., Трошина Е.Н.* Распространение длинных волн в проливах // Там же. – 1993. – № 1. – С. 47 – 52.
16. *Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н.* Моделирование водного потока в рамках одномерных уравнений мелкой воды // Тр. НГТУ. – 2011. – № 4 (91). – С. 60 – 69.
17. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Runup of tsunami waves in U-shaped bays // Pure Appl. Geophys. – 2011. – № 168. – С. 1239 – 1249.
18. *Диденкулов О.И., Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н.* Параметризация характеристик наката одиночных волн в бухте параболического сечения // Тр. НГТУ. – 2014. – № 3 (105). – С. 30 – 36.
19. *Кныш В.В.* О нелинейных эффектах при распространении волн типа цунами // Морские гидрофизические исследования. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1971. – № 6 (56). – С. 15 – 25.
20. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
21. *Friedrichs C.T., Aubrey D.G.* Tidal propagation in strongly convergent channels // J. Geophys. Res. – 1994. – 99, № C2. – P. 3321 – 3336.

Nonlinear effects at propagation of long surface waves in the channels with a variable cross-section

A.Yu. Bazykina, S.F. Dotsenko

*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
e-mail: sf_dotsenko@mail.ru*

Propagation and deformation of single surface waves in the channels with a variable cross-section are analyzed within the framework of shallow-water equations. It is shown that nonlinearity is manifested in growth with time of a wave front slope steepness and its subsequent breaking. Height and length of a propagating wave are weakly influenced by nonlinearity. The distance traversed by a single wave up to its breaking decreases with growth of the wave height and diminution of its length. The waves' amplitude characteristics are estimated depending on the channel depth and width. They are accurately described by the known Green's law.

Keywords: waves in fluid, waves of finite amplitude, wave propagation in channels, channel mathematical model, numerical solutions, manifestation of nonlinear effects.