

Структура индуцированных диффузией течений на клине с искривленными гранями

© 2016 Н.Ф. Димитриева*, Ю.Д. Чашечкин**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

E-mail: dimitrieva@list.ru

**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.02.2016 г.

Разработаны математическая модель и метод численной реализации, позволяющие одновременно изучать все элементы внутренне многомасштабных стратифицированных течений. С использованием суперкомпьютерных систем впервые рассчитаны и визуализированы индуцированные диффузией течения на симметричном неподвижном клине с искривленными гранями. Показано влияние краевых эффектов и кривизны боковой поверхности клина на структуру течения. Дефицит давления в примыкающих струйных течениях формирует интегральную силу, вызывающую самодвижение свободного клина вдоль горизонта нейтральной плавучести в устойчиво стратифицированной среде в направлении вершины.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, индуцированные диффузией течения, самодвижение.

Введение. Растворенные в жидкости вещества и взвешенные частицы под действием массовых сил (гравитационных или центробежных) распределяются неравномерно и формируют устойчивую стратификацию, поле плотности в которой определяется профилями температуры, концентрации примеси и давления в соответствии с видом уравнения состояния. Неравновесная среда с молекулярными потоками стратифицирующих компонент находится в состоянии покоя, только если градиенты плотности параллельны линии действия силы тяжести. Прерывание молекулярного потока на непроницаемых границах произвольной формы формирует течения, индуцированные диффузией, которые начали теоретически изучать в начале 40-х годов прошлого века [1] и несколько позднее стали моделировать в лаборатории [2].

Интерес к изучению градиентных течений сохраняется в силу их распространенности в окружающей среде. В обычных условиях возмущения сосредоточены в тонких слоях у непроницаемых поверхностей и достигают штормовых значений при формировании больших градиентов температуры в атмосфере на крутых склонах горных систем [3] и вблизи ледников [4]. В последние годы особое внимание уделяется изучению влияния течений, индуцированных диффузией, на динамику и структуру процессов в водохранилищах, озерах, морях [5] и океанах с учетом влияния глобального вращения [6]. В ряде работ учитывались сложность уравнения состояния морской среды и наличие дополнительной стратифицирующей компоненты с собственным коэффициентом диффузии («*differential diffusion*») [7].

В конце прошлого века наряду с аналитическими исследованиями стационарных течений [1, 2, 5] стали разрабатываться модели процесса установления течений, индуцированных диффузией на различных препятствиях –

наклонной и горизонтальной пластине [8, 9], цилиндре, сфере, а также стали проводиться лабораторные исследования с помощью высокочувствительных теневых приборов. В экспериментах у полюсов препятствий кроме больших вихрей наблюдались «розетки» нестационарных диссипативно-гравитационных волн, которые с удалением от препятствия трансформировались в протяженные прослойки [10].

Интегральное силовое действие конвергентных течений, которое отсутствует на симметричных препятствиях (сфере, цилиндре или горизонтальной пластине), принимает конечное значение на наклонной пластине и других несимметричных относительно линии действия силы тяжести телах. Возникающие градиенты давления достаточно велики и способны вызывать самодвижение свободных тел нейтральной плавучести («diffusion fish» по терминологии из статьи [11]), играющее важную роль в динамике гидросферы. Расчет установившихся течений на плоском неподвижном клине выполнен в работе [12]. Практический интерес представляет изучение механизма формирования пропульсивных сил на телах различной геометрии.

В данной работе впервые выполнен расчет динамики установления и структуры двумерного течения, индуцированного диффузией на выпуклом или вогнутом симметричном клине.

Постановка задачи и метод решения. Поскольку скорости исследуемых течений малы по сравнению со скоростью звука, математическая модель изучаемых физических процессов базируется на системе дифференциальных балансных уравнений механики неоднородных многокомпонентных жидкостей в приближении Буссинеска и пренебрежении эффектами сжимаемости [13], которая включает уравнения неразрывности, баланса импульса (Навье – Стокса), вещества и замыкающее алгебраическое уравнение состояния $\rho(S(z))$:

$$\rho = \rho_0(\exp(-z/\Lambda) + s), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - s \mathbf{g}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = \kappa_s \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda}, \quad (4)$$

где $S = S_0(z) + s$ – полная соленость, включающая коэффициент солевого сжатия, в которой выделены исходная стационарная стратификация и возмущение $S(x, z, t)$, ρ_0 – плотность на нулевом уровне (горизонте нейтральной плавучести); $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$ – скорость жидкости; P – давление за вычетом гидростатического; ν и κ_s – постоянные коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли; t – время; \mathbf{g} – ускорение свободного падения; ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа; $\Lambda = \rho_0 / |\nabla \rho|$, $N = \sqrt{\mathbf{g}/\Lambda}$, $T_b = 2\pi/N$ – масштаб, частота и период плавучести; ось z направлена вертикально вверх. Член с вертикальной компонентой скорости течения v_z в формуле (4) харак-

теризует конвективный перенос солености, нарушающий исходную стратификацию.

В начальный момент времени $t = 0$ в покоящуюся непрерывно стратифицированную жидкость горизонтально помещается непроницаемый клин выбранной формы. На поверхности тела Σ задается условие прилипания для скорости и непротекания для вещества, на бесконечном удалении – затухание всех возмущений:

$$\mathbf{v}, s|_{t \leq 0} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Sigma} = 0, \quad \mathbf{v}, s|_{x, z \rightarrow \infty} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial n} + \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \quad (6)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности препятствия.

В задаче представлен набор размерных параметров ($\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa_s = 1,41 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, $g_z = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$, $N = 1 \text{ с}^{-1}$), которые формируют характерные масштабы времени $t = T_b$, а также линейные макромасштабы (плавучести $\Lambda = 9,8 \text{ м}$, размера препятствия $L = 0,1 \text{ м}$) и микромасштабы ($\delta_N^v = \sqrt{\nu/N} = 10^{-3} \text{ м}$ и $\delta_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s/N} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}$). Характерный масштаб скорости задается отношением базовых масштабов $U_N^v = \sqrt{\nu N} = 10^{-3} \text{ м}/\text{с}$, $U_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s N} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}/\text{с}$.

Макромасштабы Λ и L характеризуют исходную стратификацию и геометрию течения. Микромасштабы диссипативной природы δ_N^v и $\delta_N^{\kappa_s}$ определяют поперечные размеры тонкоструктурных компонентов. Широкий диапазон значений масштабов длины указывает на сложность внутренней структуры стратифицированного течения.

Исследования решений линеаризованных фундаментальных уравнений и результаты лабораторного моделирования показали, что крупномасштабные элементы течений (волны и вихри) характеризуются регулярно возмущенными компонентами полного решения. Тонкоструктурные элементы течений, которые визуализируются во всем диапазоне параметров изучаемых процессов, описываются членами обширного семейства сингулярно возмущенных компонент. Все компоненты сосуществуют и активно взаимодействуют между собой, формируя эволюционирующую тонкую структуру [14].

Отношения масштабов задают традиционные безразмерные комплексы – шкалу плавучести $C = \Lambda/L$, числа Рейнольдса $Re = |\mathbf{v}|L/\nu$, Пекле $Pe = |\mathbf{v}|L/\kappa_s$, Шмидта $Sc = \nu/\kappa_s$ и Фруда $Fr = |\mathbf{v}|/NL$, где $|\mathbf{v}|$ – величина характерной скорости течения, которая при рассмотрении задачи течения, индуцированного диффузией на неподвижном препятствии, принимается равной $U_N^{\kappa_s}$.

В нелинейной постановке система (1) – (6) позволяет одновременно изучать все элементы течений в рамках единого описания в естественных физических переменных без привлечения дополнительных констант и связей. В

силу многомасштабности явлений и нелинейности уравнений одним из основных инструментов анализа таких эволюционирующих процессов служит численное моделирование.

Дискретизация расчетной области осуществлялась в открытой интегрируемой платформе *SALOME* (www.salome-platform.org), а также с использованием встроенных утилит *blockMesh*, *topoSet* и *refineMesh* открытого пакета *OpenFOAM* (www.openfoam.com) с учетом собственных масштабов. Расчетная область представляет собой прямоугольник, в котором горизонтально расположен симметричный клин длиной $L = 10$ см и высотой основания $h = 2$ см. Боковые стороны тела – дуги окружностей, радиусы и положения центров которых в декартовой системе координат с центром на вершине клина приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Геометрия клина		
Координаты центра, см	Радиус кривизны, см	Отклонение от грани хорды Δ_R , см
(-7,6; 126,7)	126,9	-0,1
(17,6; 125,7)	125,7	0,1
(9,2; 41,4)	43,2	0,3
(5,8; 126,7)	10,0	1,4

С учетом формы тела построены блочно-структурированные гексаэдральные расчетные сетки с совмещением линий на границах блоков. Для разрешения тонкоструктурных компонентов течения на минимальном микромасштабе $\delta_N^{x_s}$ размещались нескольких ячеек расчетной сетки в областях с большими значениями градиентов. Проведенные тестовые расчеты на более грубой сетке выявили вблизи препятствия локальные нефизические осцилляции решения, которые при продолжительных вычислениях приводят к накоплению погрешности и остановке счета.

Численное решение строилось методом конечных объемов в открытом пакете *OpenFOAM*. Для учета эффектов стратификации и диффузии стандартная численная модель *icoFoam*, реализующая нестационарные течения однородной жидкости, была дополнена новыми переменными (ρ и s) и соответствующими уравнениями (1), (4), а также новыми вспомогательными параметрами (N , Λ , κ_s , g и др. [15]).

Граничное условие для возмущения солености (6) реализовано с помощью расширенной утилиты *funkySetBoundaryField*, которая позволяет задавать аналитические выражения для физических переменных. Для проведения последующего анализа с помощью утилит *vorticity*, *funkySetFields*, *probes*, *forces* и *forceCoeffs* вычислялись отсутствующие в стандартных программах

OpenFOAM информативные физические величины – завихренность и темп ее бароклинной генерации, скорость диссипации механической энергии.

Результаты и обсуждение. Сложную многомасштабную структуру индуцированных диффузией течений иллюстрирует поле горизонтальной компоненты градиента возмущения солёности (рис. 1). Положительные значения визуализируемой величины обозначены зеленым цветом, отрицательные – синим. Между изолиниями одинаковый диапазон изменения величины. Структура изображения согласуется с данными теневой визуализации течений в лабораторном бассейне [11].

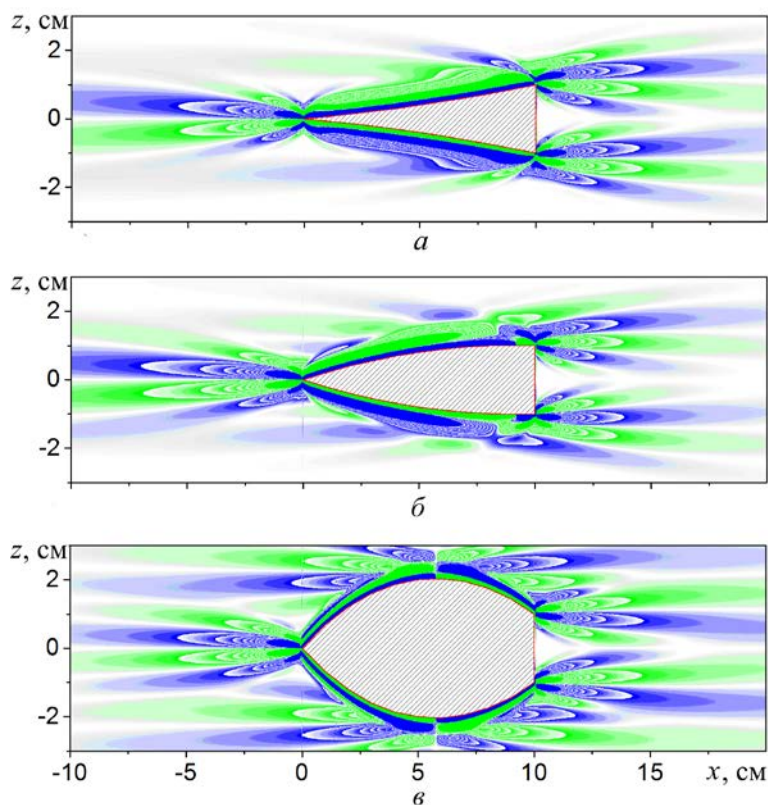


Рис. 1. Поле горизонтальной компоненты градиента возмущения солёности $\partial s/\partial x$ на клине с искривленными гранями ($L = 10$ см, $h = 2$ см, $T_b = 6,28$ с, $\tau = t/T_b = 16$): $a - \Delta_R = -0,1$ см; $б - \Delta_R = 0,3$ см; $в - \Delta_R = 1,4$ см

Около угловых точек клина формируются дополнительные тонкоструктурные элементы – диссипативно-гравитационные волны, в которых максимумы продольной компоненты градиента возмущения солёности достигали $|\partial s/\partial x|_{\max} = 4 \cdot 10^{-2}$ (возмущения солёности s имели порядок 10^{-5}). С удалением от препятствия градиент возмущения солёности резко падает и составляет около 10^{-6} на расстоянии 5 см по горизонтали и 0,5 см по вертикали от угловой точки.

Структура поля горизонтальной компоненты градиента возмущения солености существенно зависит от знака кривизны боковой поверхности: чем острее вершины у основания клина, тем ярче выражены визуализируемые пучки знакопеременных полос (рис. 1, *a*). В то же время максимальные значения $|\partial s/\partial x|_{\max}$ слабо зависят от кривизны граней клина.

Для выпуклого клина (рис. 1, *б*), у которого угол между основанием и боковой гранью приближается к 90° , пучок тонкоструктурных элементов расплывается.

Для клина, максимальная высота которого смещена по отношению к основанию, картина течений перестраивается (рис. 1, *в*) и становится подобной наблюдаемой на цилиндре [8].

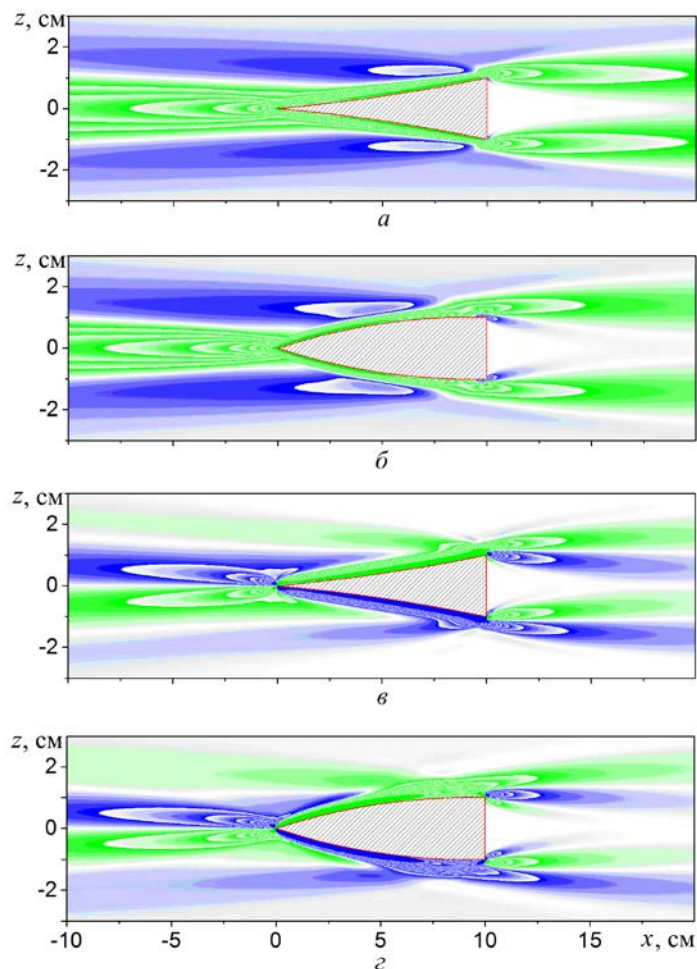


Рис. 2. Поля горизонтальной v_x (*a, б*) и вертикальной v_z (*в, г*) компонент скорости течений на клине ($L = 10$ см, $h = 2$ см, $T_b = 6,28$ с, $\tau = t/T_b = 16$): *a, в* $z - \Delta_R = -0,1$ см; *б, г* $z - \Delta_R = 0,3$ см

Непроницаемое препятствие, погруженное в неподвижную устойчиво стратифицированную жидкость, формирует сложную систему течений,

включающую тонкие главные струи вдоль наклонных сторон с примыкающими компенсационными противотечениями (рис. 2). С удалением от препятствия ширина слоев увеличивается, а максимальная скорость падает.

В распределении горизонтальной компоненты скорости v_x толщина главной струи примыкающего течения растет с уменьшением локального угла наклона касательной к горизонту нейтральной плавучести. Соответственно для вогнутого клина толщина уменьшается от 0,8 см у острой вершины до 0,2 см вблизи основания (рис. 2, а), а для выпуклого клина, наоборот, увеличивается (рис. 2, б).

В поле вертикальной компоненты скорости v_z (рис. 2, в, г) главные струи (слои с максимальным значением скорости) отрываются от поверхности в угловых точках у основания клина и формируют систему диссипативно-гравитационных волн. В середине основания клина располагается протяженная невозмущенная область, так как вертикальная поверхность не нарушает диффузионный перенос примеси.

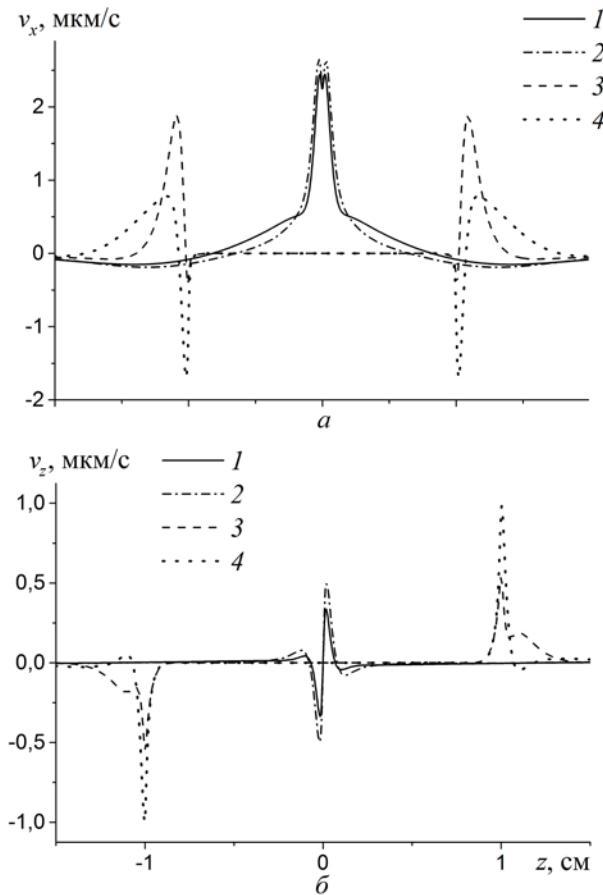


Рис. 3. Профили горизонтальной v_x (а) и вертикальной v_z (б) компонент скорости у вершины (кривые 1, 2) и основания (кривые 3, 4) клина ($L = 10$ см, $h = 2$ см, $T_b = 6,28$ с, $\tau = t/T_b = 16$): кривые 1, 3 – $\Delta_R = -0,1$ см; кривые 2, 4 – $\Delta_R = 0,3$ см

Распределения компонент скорости течения вблизи вершин клина представлены на рис. 3. Около острой вершины, точки бифуркации течения, наблюдается скачкообразное изменение вертикальной компоненты скорости (кривые 1, 2 на рис. 3, б). Значения компонент скорости зависят от угла наклона грани клина к оси x .

В окрестности угловых точек основания клина формируется сложная знакопеременная структура, в которой вертикальная компонента скорости v_z становится сравнимой по абсолютному значению с горизонтальной v_x (кривые 3, 4 на рис. 3, б).

У острой вершины клина, а также в тонком течении вдоль его боковых сторон возмущение давления убывает (рис. 4), его значение зависит от кривизны боковых сторон. При этом толщина протяженной области дефицита давления на вогнутом клине при $\Delta_R = -0,1$ см составляет около 3 см (рис. 4, а), что значительно больше, чем на выпуклом клине: при $\Delta_R = 0,3$ см толщина области 2,0 см (рис. 4, б), при $\Delta_R = 1,4$ см толщина области 1,5 см (рис. 4, в). Для выпуклого клина на рис. 4, в дефицит давления наблюдается у всех вершин, что обусловлено изменением угла наклона граней.

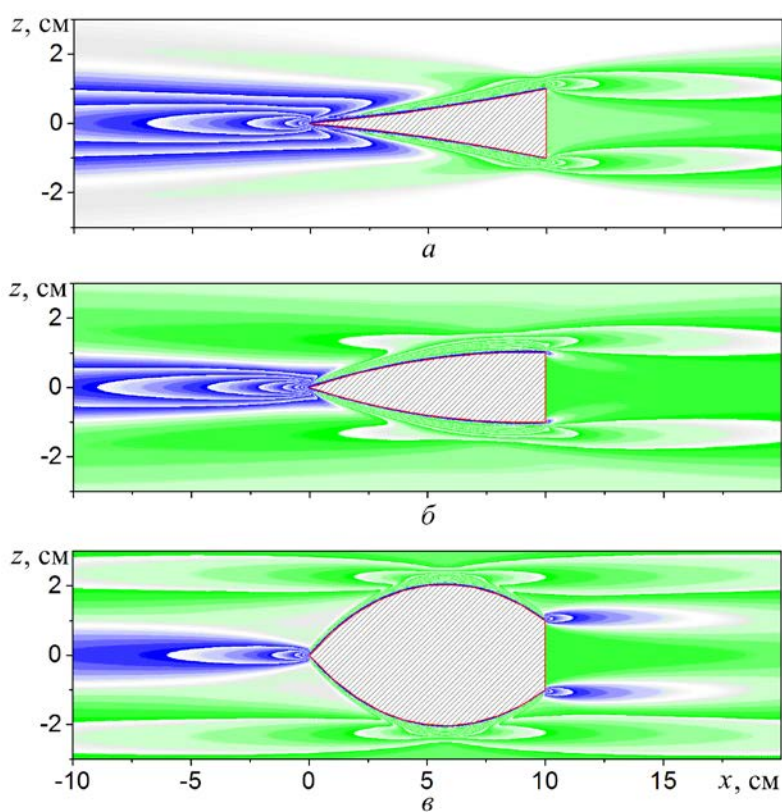


Рис. 4. Поля возмущений давления течений на клине ($L = 10$ см, $h = 2$ см, $T_b = 6,28$ с, $\tau = t/T_b = 16$): а – $\Delta_R = -0,1$ см; б – $\Delta_R = 0,3$ см; в – $\Delta_R = 1,4$ см

Разность давлений создает горизонтальную компоненту интегральной силы F_x , толкающую горизонтальный клин в направлении вершины, что согласуется с наблюдениями [11, 12]. Рассчитанные значения F_x приведены в табл. 2 при $\tau = t/T_b = 16$.

Т а б л и ц а 2

Зависимость горизонтальной компоненты результирующей силы, действующей на клин, от искривления его поверхностей ($\tau = t/T_b = 16$)

Δ_R , см	-0,1	0,0	0,1	0,3	1,4
F_x , Н	$8,4 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-6}$	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$-6,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,2 \cdot 10^{-6}$

Вертикальные компоненты результирующей силы F_z , вычисленные отдельно для верхней и нижней граней, превосходят F_x на два порядка. Вследствие антиколлинеарности они компенсируют действие друг друга.

Заключение. На основе фундаментальной системы уравнений разработана математическая модель и программа построения численного решения, позволяющие одновременно изучать все элементы внутренне многомасштабных стратифицированных течений без привлечения дополнительных гипотез и связей. Критерии построения и оптимизации сеток сформулированы с учетом масштабного анализа системы уравнений. Модель впервые использована для расчета и визуализации течений, индуцированных диффузией на симметричном неподвижном клине с искривленными гранями.

Показано влияние краевых эффектов и кривизны поверхностей на структуру течения. Дефицит давления на клине, возникающий вследствие перестройки исходной стратификации, формирует интегральную силу, способную вызывать самодвижение свободного клина, как и других несимметричных тел, вдоль горизонта нейтральной плавучести. Тело устойчиво стратифицированной среде перемещается в направлении своей вершины, что подтверждается результатами выполненных экспериментов. Величина возмущения давления зависит от кривизны боковых сторон клина.

Тонкие струйные течения жидкости, формирующиеся вдоль каждой из сторон клина, порождают в областях схождения с угловых точек внутренние волны, образующие тонкие прослойки.

Результаты расчетов течений, индуцированных диффузией, могут использоваться в качестве начальных условий при решении задач обтекания препятствий стратифицированной морской средой.

Вычисления проводились в *web*-лаборатории *UniHUB* (www.unihub.ru) и на суперкомпьютере ВЦ МГУ «Ломоносов» (www.parallel.ru). Работа выполнена в ИПМех РАН при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-09235) и ОЭММПУ РАН (Программа IV-4-12 «Динамика формирования и взаимодействия волн и вихрей в сплошных средах»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 488 с.
2. *Phillips O.M.* On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // *Deep-Sea Res.* – 1970. – 17. – P. 435 – 443.
3. *Shapiro A., Fedorovich E.* A boundary-layer scaling for turbulent katabatic flow // *Bound.-Lay. Meteorol.* – 2014. – 153, Issue 1. – P. 1 – 17.
4. *Oerlemans J., van Pelt W.J.J.* A model study of Abrahamsenbreen, a surging glacier in northern Spitsbergen // *The Cryosph.* – 2015. – 2, № 2. – P. 767 – 779.
5. *Зырянов В.Н., Лапина Л.Э.* Склоновые течения в морях, озерах и водохранилищах, обусловленные диффузионными эффектами // *Водные ресурсы.* – 2012. – 39, № 3. – С. 292 – 303.
6. *Garrett C., MacCready P., Rhines P.B.* Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating, stratified flow near a sloping boundary // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1993. – 25. – P. 291 – 323.
7. *Gargett A.E.* Differential diffusion: an oceanographic primer // *Progr. Oceanogr.* – 2003. – 56. – P. 559 – 570.
8. *Linden P.F., Weber J.E.* The formation of layers in a double-diffusive system with a sloping boundary // *J. Fluid Mech.* – 1977. – 81. – P. 757 – 773.
9. *Чашечкин Ю.Д., Загуменный Я.В.* Течения непрерывно стратифицированной жидкости, индуцированные прерыванием диффузионного переноса неподвижной пластиной // *Морской гидрофизический журнал.* – 2012. – № 5. – С. 3 – 22.
10. *Zagumennyi Ia.V., Chashechkin Yu.D.* The structure of convective flows driven by density variations in a continuously stratified fluid // *Physica Scripta.* – 2013. – 155. – article id. 014034.
11. *Mercier M.J., Ardekani F.M., Allshouse M.R. et al.* Self-propulsion of immersed object via natural convection // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – 112, № 20. – P. 204501(5).
12. *Page M.A.* Propelled by diffusion // *Nature Physics.* – 2010. – 6. – P. 486 – 487.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
14. *Чашечкин Ю.Д.* Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки».* – 2014. – № 6. – С. 67 – 95.
15. *Димитриева Н.Ф., Загуменный Я.В.* Численное моделирование стратифицированных течений с использованием OpenFOAM // *Тр. ИСП РАН.* – 2014. – 26, № 5. – С. 187 – 200.

Structure of the diffusion-induced flows on the wedge with the curved surfaces

N.F. Dimitrieva, Yu.D. Chashechkin

*Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
e-mail: dimitrieva@list.ru*

*A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
e-mail: chakin@ipmnet.ru*

The mathematical model and the numerical implementation method permitting to study simultaneously all the elements of the internally multi-scale stratified flows are developed. For the first time, the diffusion-induced flows on a fixed symmetrical wedge with the curved surfaces are calculated and visualized using the supercomputer systems. Influence both of the edge effects and the wedge side surface curvature upon the flow structure is shown. In a stably stratified environment, the integral force inducing self-motion of a free wedge along the neutral buoyancy horizon towards the top is formed by pressure deficit in the adjacent jet streams.

Keywords: stratified fluid, diffusion-induced flows, self-motion.