

Динамика волн в каналах переменного сечения

© 2017 Е.Н. Пелиновский^{1,4,*}, И.И. Диденкулова^{1,4,5},
Е.Г. Шургалина¹

¹Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород, Россия

*E-mail: pelinovsky@gmail.com

²Специальное конструкторское бюро средств автоматизации морских
исследований ДВО РАН, Южно-Сахалинск, Россия

³Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, Россия

⁴Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
Нижний Новгород, Россия

⁵Департамент морских систем, Таллинский технологический университет,
Таллин, Эстония

Динамика длинных морских волн в каналах переменной глубины и переменного прямоугольного сечения обсуждается в рамках различных приближений от линейных уравнений мелкой воды до уравнений нелинейно-дисперсионной теории. В случае линейной теории мелкой воды демонстрируется общий подход, позволяющий найти бегущие (безотражательные) волны в неоднородных каналах. Соответствующие условия определяются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен в деталях так называемый согласованный канал, в котором ширина определенным образом связана с глубиной, при этом в рамках линейной теории мелкой воды волна не отражается от донных неровностей. Форма волны в таком канале остается неизменной на записях в фиксированных точках вдоль канала (мареографных записях), но меняется в пространстве. Действие нелинейности и дисперсии приводит к деформации волны в таком канале. В рамках слабонелинейной теории мелкой воды форма волны описывается Римановым решением и волна обрушается (градиентная катастрофа), причем быстрее в зоне уменьшающейся глубины. Выведено модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, описывающее эволюцию солитона малой, но конечной амплитуды в самосогласованном канале, глубина которого может меняться произвольным образом. Рассмотрены некоторые примеры трансформации уединенной волны в таком канале, в частности адиабатическая перестройка солитона в канале с медленно меняющимися параметрами и распад уединенной волны на группу солитонов после прохождения зоны резкого изменения глубины. Полученные решения расширяют класс решений, представленных ранее в работах С.Ф. Доценко, написанных им в соавторстве с учениками.

Ключевые слова: бегущие длинные волны, каналы переменного сечения, уравнения мелкой воды, уравнение Кортевега – де Вриза.

DOI: 10.22449/0233-7584-2017-3-22-31

1. Введение

Распространение длинных волн типа цунами в узких бухтах и проливах может привести к интенсификации волнового поля и аномально большому накату волн на берег, что наблюдалось, например, во время последних катастрофических цунами на о-вах Американского Самоа в 2009 г. [1, 2] и в Японии в 2011 г. [3]. Значительное усиление волн происходит также вдоль подводных каньонов, что было отмечено во время цунами 2004 г. в Индийском океане [4].

В подобных случаях динамика волн может быть описана математически в канальном приближении для усредненных по поперечному сечению характеристик течения. Получаемые в этом приближении одномерные уравнения позволяют ускорить проведение расчетов, особенно в условиях, когда параметры подходящих волн неизвестны (как это часто бывает на практике) либо батиметрия канала известна с плохой точностью. В результате удастся получить экспресс-оценки параметров волн, основываясь на небольшом числе параметров, характеризующих задачу.

Этот подход к моделированию длинных волн был основным в исследованиях Сергея Филипповича Доценко последних лет. По результатам этих исследований им было опубликовано в соавторстве несколько работ [5 – 7]. Особо отметим статью [6] о применении канальной теории к движению длинных волн через пролив Босфор из Мраморного моря в Черное. Канальная теория, которая продемонстрировала свою эффективность для решения реальных задач, оказалась важной и для объяснения аномального усиления и заплеска волн в бух. Паго-Паго во время цунами 2009 г. на о-вах Американского Самоа [8].

В рамках канальной теории мелкой воды удастся найти точные решения, описывающие накат нелинейных волн на берега узких бухт и заливов [9 – 11]. Более того, показано, что эта теория объясняет динамику волн-убийц на берегу и хорошо согласуется с наблюдениями за ними [12]. Особо отметим, что нелинейные волны в наклонных каналах параболического сечения являются безотражательными и не теряют энергию при распространении [13]. С математической точки зрения обоснованность применения канальной теории для решения таких задач доказана в работе [14]. С практической точки зрения ее точность оценена сопоставлением с прямым численным решением двумерных уравнений мелкой воды для волн в заливах на Аляске [15 – 17].

В настоящей статье, посвященной памяти С.Ф. Доценко, мы бы хотели привести несколько вариантов применения канальной теории для описания динамики волновых процессов в каналах прямоугольного сечения с переменной глубиной и шириной. Выбран случай так называемого согласованного канала, когда в рамках линейной теории мелкой воды отсутствует отражение волны от донных препятствий.

2. Бегущие волны в каналах переменного сечения

Обычно, когда говорят о волнах в неоднородных средах, имеют в виду потери энергии на отражение от донных неровностей [18]. Ограничение распространения волн вдоль главной оси канала позволяет локализовать передачу энергии (так как нет цилиндрического ослабления, нет дифракционных потерь), но не препятствует рассеянию энергии назад, если глубина и ширина канала меняются произвольным образом. Тем не менее при специальных законах изменения характеристик канала волна не будет отражаться и может распространяться на большие расстояния без потери энергии. Продемонстрируем это на примере распространения линейных длинных волн в прямоугольном канале переменного сечения (рис. 1).

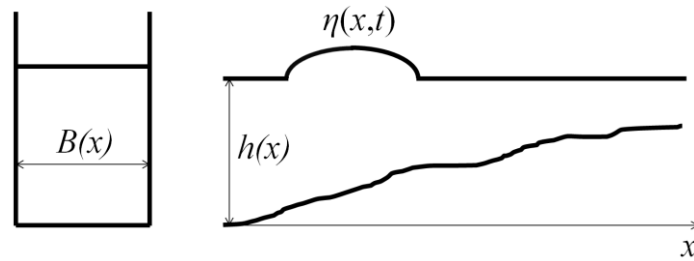


Рис. 1. Геометрия канала: *слева* – поперечное сечение, *справа* – продольный разрез

Исходным для анализа является волновое уравнение, выведенное в работах [6, 19],

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где $h(x)$ – невозмущенная глубина; $B(x)$ – переменная ширина канала; g – ускорение свободного падения и $\eta(x, t)$ – вертикальное смещение водной поверхности.

Основная идея в поиске решений волновых уравнений в виде бегущих (неотражающих) волн сводится к трансформации исходного уравнения (1) с переменными коэффициентами в уравнение волнового типа с постоянными коэффициентами. Для этого проведем следующую замену волновой функции (1):

$$\eta(x, t) = A(x) \Phi[t, \tau(x)], \quad (2)$$

где $A(x)$, $\Phi(t, \tau)$ и $\tau(x)$ – три неизвестные функции, подлежащие определению. Тогда волновое уравнение (1) трансформируется в уравнение Клейна – Гордона с переменными коэффициентами

$$AB \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - gh \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right] - g \left[Bh \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} + \frac{d}{dx} \left(BhA \frac{d\tau}{dx} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - g \frac{d}{dx} \left(Bh \frac{dA}{dx} \right) \Phi = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим условия, при которых это уравнение будет иметь постоянные коэффициенты. Волновой оператор в первой квадратной скобке, даламбертиан, будет иметь постоянные коэффициенты, если положить

$$gh \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1, \quad (4)$$

что определяет известное соотношение на время распространения волны над неровным дном

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}, \quad c(x) = \sqrt{gh(x)}. \quad (5)$$

Здесь $c(x)$ есть скорость длинных волн. Слагаемое во второй квадратной скобке в уравнении (3) должно быть равно нулю (иначе в уравнении

Клейна – Гордона появляется диссипативный член); это ведет к простому уравнению, которое интегрируется явно:

$$A(cB)^{1/2} \sim Ah^{1/4}B^{1/2} = \text{const} . \quad (6)$$

Соотношение (6) представляет собой известный закон Грина для волн в жидкости с плавным изменением глубины и ширины канала, однако в нашем случае мы не накладываем условия на плавность изменения характеристик канала.

Чтобы в уравнении (3) все коэффициенты стали постоянными, последнее слагаемое должно быть пропорционально AB :

$$g \frac{d}{dx} \left(Bh \frac{dA}{dx} \right) = ABP , \quad (7)$$

где P – произвольная константа. В результате уравнение (3) сводится к уравнению Клейна – Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - P\Phi = 0 , \quad (8)$$

и существование бегущих волн в его рамках становится очевидным.

Уравнение (7) после подстановки выражения (6) становится обыкновенным дифференциальным уравнением для нахождения безотражательных конфигураций канала прямоугольного сечения:

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{c}{B}} \frac{d}{dx} (Bc) \right] + 2\sqrt{\frac{B}{c}} P = 0 , \quad (9)$$

где для простоты записи используется скорость длинных волн $c(x) = \sqrt{gh(x)}$ вместо глубины канала $h(x)$. Поскольку уравнение (9) связывает две неизвестные функции $B(x)$ и $c(x)$ и, кроме того, возникают две константы при его интегрировании, число безотражательных конфигураций канала неограниченно. При этом получаемые конфигурации представляются весьма разумными с точки зрения применимости теории мелкой воды: нет сингулярных решений, канал может иметь неограниченную длину (эти вопросы обсуждаются в работе [20]). Именно поэтому, на наш взгляд, и происходит значительное усиление волн цунами в ряде случаев, отмеченных во введении.

Если $P \neq 0$, то решением уравнения (8) являются дисперсионные волны и волновой пакет может расплываться или, наоборот, сжиматься в волнубийцу [21]. Дисперсия здесь связана с геометрией канала, а не с известной дисперсией волн на воде, обусловленной глубиной канала.

Рассмотрим самую простую конфигурацию канала

$$B(x)c(x) = \sqrt{gh(x)}B(x) = \text{const} , \quad (10)$$

для которой $P = 0$. При этом глубина бассейна может меняться произвольным образом, в том числе и скачкообразно. Такой канал мы назовем *согласованным*. В этом случае бегущая волна описывается наиболее простым выражением

$$\eta(x, t) = A_0 \Phi \left[t - \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{gh(y)}} \right], \quad (11)$$

где A_0 – постоянная амплитуда волны и $\Phi(t)$ описывает форму волны в фиксированной точке x_0 . Таким образом, хотя канал имеет переменное сечение (его площадь пропорциональна $h^{-1/2}$), амплитуда волны остается постоянной и меняется только время распространения волны вдоль канала. В результате мареограммы оказываются одинаковыми в различных точках канала, хотя, конечно, в пространстве форма волны меняется.

3. Влияние дисперсии и нелинейности на волны в согласованном канале

Поскольку в согласованном канале (10) в рамках линейной теории мелкой воды форма волны (11) не меняется с расстоянием, то нелинейные и дисперсионные эффекты накапливаются. В общем случае естественно ожидать, что нелинейные и дисперсионные поправки не будут полностью безотражательными, так что процесс становится достаточно сложным для аналитического анализа. Тем не менее если считать, что глубина канала меняется плавно, то отражение заведомо мало и можно, воспользовавшись асимптотическим методом, вывести эволюционное уравнение для бегущей волны. Его неоднократно приводили в литературе, и мы приведем его без вывода; оно имеет вид уравнения Кортевега – де Вриза [22]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \sqrt{\frac{c}{B}} \frac{d}{dx} (\sqrt{cB}) \eta = 0. \quad (12)$$

В случае согласованного канала в силу выражения (10) последнее слагаемое из уравнения (12) исчезает, но уравнение Кортевега – де Вриза остается уравнением с переменными коэффициентами. Как пример рассмотрим трансформацию уединенной волны (солитона), если глубина меняется очень плавно. Локально солитон описывается тем же выражением, что и в бассейне постоянной глубины:

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A}{4h}} \frac{x - c \left(1 + \frac{A}{2h} \right) t}{h} \right] \quad (13)$$

с характерной шириной

$$\lambda \sim h \sqrt{\frac{h}{A}}. \quad (14)$$

Амплитуда солитона находится из закона сохранения энергии, поскольку отражение отсутствует:

$$E = B \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2(x, t) dx \sim B(x) A^2(x) \lambda(x) = \text{const}. \quad (15)$$

Для согласованного канала это ведет к следующему закону изменения амплитуды солитона:

$$A(x) \sim h^{-2/3}, \quad (16)$$

что слабее, чем в канале постоянной ширины $A(x) \sim h^{-1}$ [22]. Длина солитона, в соответствии с уравнением (14), есть $\lambda(x) \sim h^{11/6}$.

Итак, действие дисперсии и нелинейности приводит к трансформации бегущей волны, и если солитон движется на мелководье, то его амплитуда и длина возрастают. Более того, форма волны также меняется вследствие того, что объем воды, содержащейся в солитоне (масса), меняется с глубиной:

$$M = B \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x,t) dx \sim B(x)A(x)\lambda(x) \sim h^{2/3}, \quad (17)$$

в то время как полная масса должна быть постоянной. Это означает, что за солитоном формируется хвост положительной полярности, если волна распространяется на мелкую воду, и отрицательной – при движении на глубокую воду. Мы, однако, не будем на этом останавливаться.

4. Трансформация солитона на уступе

Если же глубина и ширина канала меняются сильно, то переходную зону можно аппроксимировать уступом. Поскольку канал является согласованным (10), то в линейной теории длинных волн отражение от уступа отсутствует и волна проходит через уступ без деформации. Слабая нелинейность и дисперсия не успевают «испортить» процесс на таких коротких дистанциях. Однако в дальнейшем при распространении за уступом в канале постоянной глубины и ширины нелинейность и дисперсия приводят к трансформации волны, что может быть подробно описано в рамках уравнения Кортевега – де Вриза. Этот процесс в канале постоянного сечения обсуждается во многих работах, и мы здесь упомянем только книгу [22]. Аналитический подход основан на следующих кинематических соображениях. Пусть глубина бассейна до скачка есть h_1 , а после скачка h_2 . Соответственно ширина согласованного канала до скачка $B_1 \sim h_1^{-1/2}$, а после скачка $B_2 = B_1(h_1/h_2)^{-1/2}$. Падающий солитон до скачка (в фиксированный момент времени) описывается выражением (13)

$$\eta_1(x) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A_0}{4h_1}} \frac{x}{h_1} \right]. \quad (18)$$

На скачке в согласованном канале амплитуда волны не меняется, а длина сокращается пропорционально $(h_2/h_1)^{1/2}$, поскольку временная длительность не меняется при переходе из одного слоя в другой. Это значит, что волна после скачка и непосредственно до него описывается выражением, аналогичным выражению (18), но с другой длительностью:

$$\eta_2(x) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A_0}{4h_2}} \frac{x}{h_1} \right], \quad (19)$$

и длина импульса отличается от той длины, которая должна быть после скачка у солитона той же амплитуды. В результате нарушается соотношение между дисперсией и нелинейностью, характеризуемое числом Урселла [22, 23]:

$$\operatorname{Ur} = \frac{A\lambda^2}{h^3}. \quad (20)$$

Для солитона (13) с длиной (14) параметр Урселла равен единице. Теперь же для волны (19) параметр Урселла есть

$$\operatorname{Ur}_2 = \frac{A_2\lambda_2^2}{h_2^3} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2. \quad (21)$$

Поскольку волна после скачка имеет солитоноподобную форму (но не является солитоном), то расчет амплитуд возникающих солитонов относительно простой (подробнее об этом см. в работах [22, 23]), и формула для амплитуд вторичных солитонов имеет вид

$$\frac{A_{n+1}}{A_0} = \frac{1}{4U_2} \left[\sqrt{1+8U_2} - (1+2n) \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

где N – число солитонов, которое находится из условия минимальности положительного значения выражения в квадратных скобках в соотношении (22). В частности, амплитуда первого (лидирующего) солитона равна

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \left[\sqrt{1+8 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2} - 1 \right]^2. \quad (23)$$

Если после скачка глубина канала очень мала ($h_2 \ll h_1$), а ширина, соответственно, велика, то амплитуда первого солитона стремится к двум (в канале постоянного сечения к четырем, см. работу [22]). При этом число солитонов достаточно велико.

Если же волна вступает на глубокую воду ($h_2 \gg h_1$) в узкий канал, то

$$\frac{A_1}{A_0} \approx 4 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2, \quad (h_2 \gg h_1). \quad (24)$$

В этом случае амплитуда солитона мала и образуется только один солитон. Зависимость амплитуды возникающих солитонов от перепада глубин, в соответствии с выражением (22), показана на рис. 2.

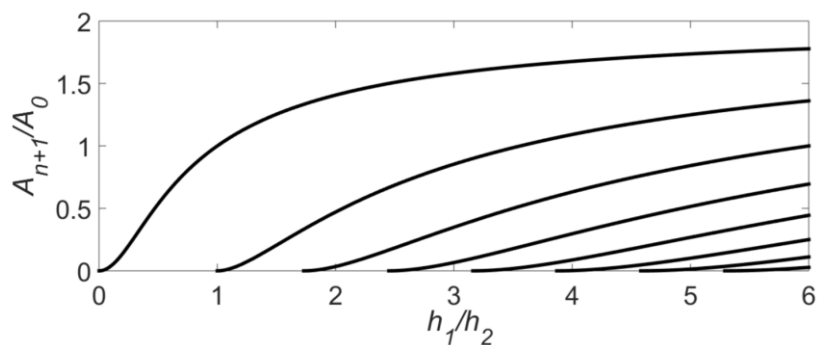


Рис. 2. Зависимость амплитуды генерируемых солитонов от перепада глубин

Таким образом, на больших расстояниях даже слабая нелинейность и дисперсия могут существенно исказить волновой процесс. При этом в согласованном канале отражение отсутствует и все эффекты трансформации обусловлены только нелинейностью и дисперсией.

5. Заключение

Настоящая статья посвящена памяти С.Ф. Доценко – известного специалиста в области волновых движений жидкости, включая цунами. В последние годы он со своими учениками опубликовал несколько работ по канальной теории длинных волн. Эта тематика особо интересна авторам данной статьи, и мы хотели представить здесь ряд новых решений канальной теории. В первую очередь, это существование бегущих волн в канале переменного сечения в рамках линейной теории мелкой воды. В частности, изучен так называемый согласованный канал, в котором фактор Грина остается равным единице вне зависимости от диапазона изменения глубины и ширины канала. В этом случае волна не меняет своей формы по мере распространения, а неоднородность канала влияет только на время распространения волны. Действие нелинейности и дисперсии кардинально преобразует характер волнового процесса на больших расстояниях. Если глубина меняется медленно, то солитон адиабатически перестраивается по мере распространения. При этом его амплитуда и длина изменяются, а за ним генерируется слабый хвост. Если же параметры канала трансформируются скачком, то при распространении волны на мелкую воду за уступом происходит распад начального возмущения на солитоны. Даны явные формулы для амплитуды образующихся солитонов. Представленные результаты свидетельствуют об интересных особенностях волновой динамики в узких бухтах и проливах переменного сечения.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МД-6373.2016.5), гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-6637.2016.5, а также грантов PUT1378, РФФИ (17-05-00067, 16-55-52019, 16-02-00167, 16-32-60012, 16-35-00175) и Volkswagen Foundation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Okal E.A., Fritz H.M., Synolakis C.E. et al.* Field survey of the Samoa tsunami of 29 September 2009 // *Seismolog. Res. Lett.* – 2010. – 81, No. 4. – P. 577 – 591. – doi:10.1785/gssrl.81.4.577
2. *Fritz H.M., Borrero J.C., Synolakis C.E. et al.* Insights on the 2009 South Pacific tsunami in Samoa and Tonga from field surveys and numerical simulations // *Earth-Sci. Rev.* – 2011. – 107, Issues 1 – 2. – P. 66 – 75. – doi:10.1016/j.earscirev.2011.03.004
3. *Носов М.А.* Землетрясение и цунами 11 марта 2011 г. в Японии // *Вестник РФФИ.* – 2011. – № 2 – 3. – С. 95 – 101.
4. *Ioualalen M., Pelinovsky E., Asavanant J. et al.* On the weak impact of the 26 December Indian Ocean tsunami on the Bangladesh coast // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2007. – 7. – P. 141 – 147. – doi:10.5194/nhess-7-141-2007
5. *Доценко С.Ф., Ракова И.Н.* Распространение длинных поверхностных волн в каналах переменного поперечного сечения // *Морской гидрофизический журнал.* – 2012. – № 2. – С. 3 – 17.
6. *Bazykina A.Yu., Dotsenko S.F.* Application of a channel model for describing propagation of tsunami-like single waves in a channel with variable cross-section // *Physical Oceanography.* – 2015. – No. 1. – P. 27 – 38. – doi:10.22449/1573-160X-2015-1-27-38
7. *Bazykina A.Yu., Dotsenko S.F.* Nonlinear effects at propagation of long surface waves in the channels with a variable cross-section // *Ibid.* – 2015. – No. 4. – P. 3 – 12. – doi:10.22449/1573-160X-2015-4-3-12
8. *Didenkulova I.* Tsunami runup in narrow bays: the case of Samoa 2009 tsunami // *Nat. Hazards.* – 2013. – 65, Issue 3. – P. 1629 – 1636. – doi:10.1007/s11069-012-0435-7
9. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // *Phys. Fluids.* – 2011. – 23, Issue 8. – 086602. – doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.3623467
10. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Runup of tsunami waves in U-shaped bays // *Pure Appl. Geophys.* – 2011. – 168, Issue 6. – P. 1239 – 1249. – doi:10.1007/s00024-010-0232-8
11. *Rybkin A., Pelinovsky E.N., Didenkulova I.* Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier-Greenspan approach // *J. Fluid. Mech.* – 2014. – 748. – P. 416 – 432. – doi:https://doi.org/10.1017/jfm.2014.197
12. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) // *Nonlinearity.* – 2011. – 24, No. 3. – P. R1 – R18. – doi:https://doi.org/10.1088/0951-7715/24/3/R01
13. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Non-dispersive traveling waves in strongly inhomogeneous water channels // *Phys. Lett. A.* – 2009. – 373, No. 42. – P. 3883 – 3887. – doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2009.08.051
14. *Shimozono T.* Long wave propagation and run-up in converging bays // *J. Fluid. Mech.* – 2016. – 798. – P. 457 – 484. – doi:https://doi.org/10.1017/jfm.2016.327
15. *Harris M.W., Nicolsky D.J., Pelinovsky E.N., Rybkin A.V.* Runup of nonlinear long waves in trapezoidal bays: 1-D analytical theory and 2-D numerical computations // *Pure Appl. Geophys.* – 2015. – 172, Issue 3. – P. 885 – 899. – doi:10.1007/s00024-014-1016-3
16. *Harris M.W., Nicolsky D.J., Pelinovsky E.N. et al.* Run-up of nonlinear long waves in U-shaped bays of finite length: analytical theory and numerical computations // *J. Ocean Eng. Mar. Energy.* – 2016. – 2, Issue 2. – P. 113 – 127. – doi:10.1007/s40722-015-0040-4
17. *Garayshin V.V., Harris M.W., Nicolsky D.J. et al.* An analytical and numerical study of long wave run-up in U-shaped and V-shaped bays // *Appl. Math. Comput.* – 2016. – 279. – P. 187 – 197. – doi:10.1016/j.amc.2016.01.005
18. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.

19. Диденкулова И.И., Пелиновский Д.Е., Тюгин Д.Ю. и др. Бегущие длинные волны в водных прямоугольных каналах переменного сечения // Вестник МГОУ. Серия «Естественные науки». – 2012. – № 5. – С. 89 – 93. – URL: <http://vestnik-mgou.ru/Articles/Doc/427> (дата обращения: 30.12.2016).
20. Багаев А.В., Пелиновский Е.Н. Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане // Журнал СВМО. – 2016. – 18, № 3. – С. 127 – 136.
21. Didenkulova I., Pelinovsky E. On shallow water rogue wave formation in strongly inhomogeneous channels // J. Phys. A. Math. Theor. – 2016. – 49, No. 19. – P. 194001. – doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/19/194001>
22. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
23. Nakoulima O., Zahibo N., Pelinovsky E. et al. Solitary wave dynamics in shallow water above periodic topography // Chaos. – 2005. – 15, Issue 3. – 037107. – doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.1984492>

Wave dynamics in the variable-section channels

E.N. Pelinovsky^{1-4,*}, I.I. Didenkulova^{1,4,5}, E.G. Shurgalina¹

¹*Federal Research Center the Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia*

**e-mail: pelinovsky@gmail.com*

²*Special Research Bureau for Automation of Marine Researches, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia*

³*National Research University – Higher School of Economics, Moscow, Russia*

⁴*R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod, Russia*

⁵*Department of Marine Systems, Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia*

Dynamics of long sea waves in the channels of variable depth and variable rectangular cross section is discussed within various approximations – from the shallow water equations to those of nonlinear dispersion theory. General approach permitting to find traveling (non-reflected) waves in the non-uniform channels is demonstrated within the framework of the shallow-water linear theory. The appropriate conditions are determined by solving a system of ordinary differential equations. The so-called self-consistent channel in which the width is connected with its depth in a specific way is studied in details. At that within the linear theory of shallow water, a wave is not reflected from the bottom irregularities. The wave shape remains unchanged on the records of the wave-guides (mareographs) fixed along the channel axis, but it varies in space. Nonlinearity and dispersion lead to the wave transformation in such a channel. Within the framework of the shallow-water weakly nonlinear theory, the wave shape is described by the Riemann solution, and the wave breaks (gradient catastrophe) quicker in the zones of decreasing depth. Derived is the modified Cortège-de Varies equation describing evolution of a solitary wave of weak but finite amplitude in a self-consistent channel, the depth of which can vary arbitrary. Some examples of a solitary wave transformation in such a channel are analyzed, particularly i) a soliton adiabatic transformation in the channel with the slowly varying parameters, and ii) a solitary wave fission into the group of solitons after it has passed the zone where the depth changes abruptly. The obtained solutions extend the class of those represented earlier by S.F. Dotsenko and his colleagues.

Keywords: traveling long waves, channels of variable cross-section, shallow-water equations, Cortège-de Varies equation.