

Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами в бароклинном потоке

© 2017 А. А. Слепышев^{1,*}, Д. И. Воротников²

¹Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: slep55@mail.ru

Поступила в редакцию 10.06.2016 г. После доработки 29.06.2016 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные инерционно-гравитационные внутренние волны в бароклинном течении. В линейном приближении находятся дисперсионное соотношение и декремент затухания волны. Во втором порядке малости по амплитуде волны определяется скорость стокового дрейфа. Показано, что поперечная к направлению распространения волны скорость стокового дрейфа отлична от нуля, если поперечная компонента скорости течения зависит от вертикальной координаты; вертикальные волновые потоки импульса при этом могут быть сравнимы с соответствующими турбулентными потоками либо их превышать; дисперсионные кривые первых двух мод не достигают инерционной частоты в низкочастотной области вследствие влияния критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной.

Ключевые слова: внутренние волны, турбулентность, потоки импульса, стоков дрейф, критический слой.

DOI: 10.22449/0233-7584-2017-4-3-15

Введение. Вертикальный обмен играет ключевую роль в формировании полей концентрации кислорода и сероводорода в Черном море. Процессы перемешивания осуществляют вентиляцию вод и поддерживают стабильное функционирование экосистемы. Обычно вертикальный обмен в стратифицированной морской среде связывается с мелкомасштабной турбулентностью, которая генерируется гидродинамической неустойчивостью течений и обрушением внутренних волн. Внутренние волны играют важную роль в динамических процессах на шельфе моря, так как постоянно присутствуют порождающие их энергетические источники: колебания атмосферного давления, ветровые напряжения на поверхности моря, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна, неустойчивость течений.

Влияние мелкомасштабной турбулентности на внутренние волны рассматривалось в ряде работ [1 – 3]. Показано, что внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают. Вертикальные волновые потоки тепла, соли и импульса при этом отличны от нуля [4]. В работах [5, 6] указанные эффекты рассматривались на течении с вертикальным сдвигом скорости. Показано, что без учета вращения Земли критические слои отсутствуют ввиду небольшой скорости течения (не более 0,15 м/с), влияние течения про-

является на величине волновых потоков. Представляет интерес найти волновой поток импульса в вертикально-неоднородном течении для инерционно-гравитационных внутренних волн (при учете вращения Земли). Примечательно, что вертикальный поток импульса в этом случае отличен от нуля даже при неучете турбулентной вязкости и диффузии.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном бассейне постоянной глубины при учете вращения Земли. Две компоненты скорости течения зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении находятся дисперсионное соотношение и вертикальное распределение амплитуды внутренних волн. Уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, поэтому собственная функция внутренних волн и частота волны – комплексные, т. е. имеет место слабое затухание волны. Во втором порядке малости по амплитуде волны находятся вертикальные волновые потоки импульса и скорость стокова дрейфа. Уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для волновых возмущений имеют вид:

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \quad (3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где u, v, w – две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения соответственно; ρ, P – волновые возмущения плотности и давления; $\rho_0(z)$ – профиль средней плотности; x, y, z – две горизонтальные и вертикальная координаты, ось z направлена вертикально вверх; f – параметр Кориолиса; $U_0(z), V_0(z)$ – две компоненты скорости среднего течения; действие оператора $\frac{D}{Dt}$ раскрывается по формуле $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$.

Используя геострофические соотношения [7], сделаем оценку горизонтальных масштабов изменения средней плотности:

$$L_x = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = g / \left(f \max \left| \frac{\partial V_0}{\partial z} \right| \right), \quad L_y = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = g / \left(f \max \left| \frac{\partial U_0}{\partial z} \right| \right).$$

Вертикальные профили компонент скорости течения и их производных показаны рис. 1. Максимальные значения вертикальных градиентов компонент скорости течения U_0 , V_0 составляют $0,019$ и $8,086 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ соответственно. Горизонтальные масштабы изменения плотности $L_x = 1,16 \cdot 10^7 \text{ м}$, $L_y = 5 \cdot 10^6 \text{ м}$ много больше длины волны, поэтому горизонтальным изменением плотности пренебрегаем.

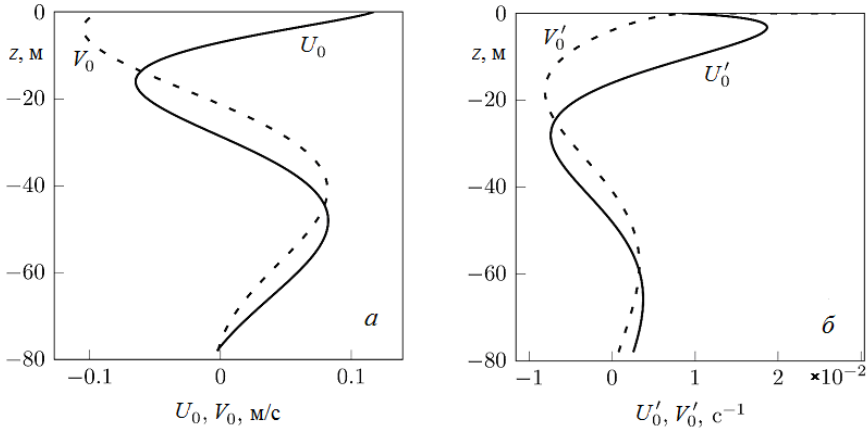


Рис. 1. Вертикальные профили: компонент скорости течения V_0 , U_0 – *a*; градиентов компонент скорости течения V'_0 , U'_0 – *б*

Граничное условие на поверхности моря ($z = 0$) – условие «твердой крышки», которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [8]:

$$w(0) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие на дне – условие непротекания:

$$w(-H) = 0. \quad (7)$$

Линейное приближение. Решения линейного приближения ищем в следующем виде:

$$u_1 = u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad v_1 = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad w_1 = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad (8)$$

$$P_1 = P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.},$$

где с.с. – комплексно сопряженные слагаемые; A – амплитудный множитель; θ – фаза волны, $\partial\theta/\partial x = k$, $\partial\theta/\partial t = -\omega$, k – горизонтальное волновое число, ω – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x . После подстановки (8) в систему (1) – (5) следует связь амплитудных функций u_{10} , v_{10} , P_{10} , ρ_{10} с функцией w_{10} :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right), \quad (9)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[\frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega} \left(i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right], \quad (10)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\Omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad \Omega = \omega - kU_0. \quad (11)$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + k \left[\frac{if \frac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2 \frac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] \frac{dw_{10}}{dz} + \\ + kw_{10} \left[\frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega \frac{d^2 U_0}{dz^2} + if \frac{d^2 V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{ifk \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$ – квадрат частоты Брента – Вейселя.

Граничные условия для w_{10} :

$$\text{при } z = 0 \quad w_{10} = 0, \quad (13)$$

$$\text{при } z = -H \quad w_{10} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (12) имеет комплексные коэффициенты, мнимая часть которых мала, поэтому перейдем к безразмерным переменным (штрихом обозначены безразмерные физические величины):

$$\begin{aligned} z = Hz', \quad t = t' / \omega_*, \quad V_0 = V_0' V_{0*}, \quad U_0 = U_0' V_{0*}, \quad k = k' / H, \quad f = f' \omega_*, \\ \omega = \omega' \omega_*, \quad N = N' \omega_*, \quad \Omega = \Omega' \omega_*, \end{aligned} \quad (15)$$

где H – глубина моря; ω_* – характерная частота волны; V_{0*} – характерное значение скорости течения, поперечной к направлению распространения волны.

Уравнение (12) тогда приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{10}'}{dz'^2} + k' \left[\frac{i\varepsilon f' \frac{dV_0'}{dz'}}{\Omega'^2 - f'^2} - \frac{\varepsilon f'^2 \frac{dU_0'}{dz'}}{\Omega'(\Omega'^2 - f'^2)} \right] \frac{dw_{10}'}{dz'} + \\ + k' w_{10}' \left[\frac{k'(N'^2 - \Omega'^2) + \varepsilon \Omega' \frac{d^2 U_0'}{dz'^2} + i\varepsilon f' \frac{d^2 V_0'}{dz'^2}}{\Omega'^2 - f'^2} + \frac{i\varepsilon^2 f' k' \frac{dU_0'}{dz'} \frac{dV_0'}{dz'}}{\Omega'(\Omega'^2 - f'^2)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varepsilon = V_{0*} / H\omega_*$ – малый параметр. Мнимая часть коэффициентов в уравнении (16) порядка ε , поэтому мнимая часть решения w_{10} также пропорциональна ε , т. е. решение уравнения (16) представляется в виде

$$w'_{10}(z') = w'_0(z') + \varepsilon i w'_1(z'), \quad (17)$$

где $w'_0(z')$ и $w'_1(z')$ – действительные функции. Частота также представляется в виде разложения по параметру ε :

$$\omega' = \omega'_0 + \varepsilon \sigma'_1 + \dots, \quad (18)$$

тогда $\Omega' = \Omega'_0 + \varepsilon \sigma'_1 + \dots$. После подстановки (17), (18) в (16) получаются краевые задачи для $w'_0(z')$ и $w'_1(z')$. Функция $w'_0(z')$ удовлетворяет уравнению (с точностью до членов $\sim \varepsilon$)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w'_0}{dz'^2} - \varepsilon k' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{f'^2}{\Omega'_0(\Omega'^2_0 - f'^2)} + \\ & + \frac{k' w'_0}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[k'(N'^2 - \Omega'^2_0) + \varepsilon \Omega'_0 \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Граничные условия для w'_0

$$w'_0(0) = 0, \quad w'_0(-1) = 0. \quad (20)$$

Функция $w'_1(z')$ удовлетворяет уравнению (с точностью до членов $\sim \varepsilon$)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w'_1}{dz'^2} - \varepsilon k' \frac{dw'_1}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{f'^2}{\Omega'_0(\Omega'^2_0 - f'^2)} + \\ & + \frac{k' w'_1}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[k'(N'^2 - \Omega'^2_0) + \varepsilon \Omega'_0 \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \right] = F'(z'), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} F'(z') = & -k' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dV'_0}{dz'} \frac{f'}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} + ik' \frac{dw'_0}{dz'} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{\sigma'_1 f'^2 (3\Omega'^2_0 - f'^2)}{\Omega'^2_0 (\Omega'^2_0 - f'^2)^2} - \\ & - \frac{k' w'_0}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left[k' \frac{2i\Omega'_0 \sigma'_1 (N'^2 - f'^2)}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} + \varepsilon \frac{d^2 U'_0}{dz'^2} \frac{i\sigma'_1 (\Omega'^2_0 + f'^2)}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \right] - \\ & - \frac{k' w'_0}{(\Omega'^2_0 - f'^2)} \left(f' \frac{d^2 V'_0}{dz'^2} + \varepsilon \frac{f' k'}{\Omega'_0} \frac{dU'_0}{dz'} \frac{dV'_0}{dz'} \right). \end{aligned}$$

Граничные условия для w'_1

$$w'_1(0) = 0, \quad w'_1(-1) = 0. \quad (22)$$

После перехода к размерным переменным уравнение (19) приобретает вид

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} - k \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{f^2}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} + \frac{kw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[k(N^2 - \Omega_0^2) + \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right] = 0, \quad (23)$$

где $\Omega_0 = \omega_0 - kU_0$ – частота волны со сдвигом Доплера. Уравнение (23) следует дополнить граничными условиями

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(-H) = 0. \quad (24)$$

При отсутствии течения ($U_0 = 0$) краевая задача (23), (24) имеет при фиксированном волновом числе k дискретный спектр частот, лежащих в интервале $f < \omega_0 < \max(N)$. Каждому значению k соответствует определенное значение частоты для данной моды. При $U_0(z) \neq 0$ дискретного спектра может не существовать [9], что обусловлено наличием сингулярностей в уравнении (23) при $\Omega_0 = 0$ и $\Omega_0 = \pm f$ (рассматриваются гидродинамически устойчивые течения). В этом случае присутствует критический слой [10], где $\Omega_0 = 0$ (фазовая скорость волны при этом равна скорости течения). Учет вращения Земли приводит к тому, что критический слой смещается на уровень, где $\Omega_0 = f$ [11]. Влияние этого критического слоя на дисперсионные кривые иллюстрируют приводимые ниже расчеты. Пусть $a(z) = -\frac{f^2 k}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} \frac{dU_0}{dz}$, $b(z) = \frac{k}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[k(N^2 - \Omega_0^2) + \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right]$, тогда уравнение (23) запишется в виде

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} + a(z) \frac{dw_0}{dz} + b(z) w_0 = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) приводится к самосопряженному виду после умножения обеих частей на $p(z) = \exp(\int a(z) dz)$:

$$\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{dw_0}{dz} \right) - q(z) w_0 = 0, \quad (26)$$

здесь $q(z) = -b(z)p(z)$.

После перехода к размерным переменным уравнение (21) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} + a(z) \frac{dw_1}{dz} + b(z) w_1 = F(z), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
F(z) = & -k \frac{dw_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \frac{f}{(\Omega_0^2 - f^2)} + ik \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{\sigma_1 f^2 (3\Omega_0^2 - f^2)}{\Omega_0^2 (\Omega_0^2 - f^2)^2} - \\
& - \frac{kw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[k \frac{2i\Omega_0 \sigma_1 (N^2 - f^2)}{(\Omega_0^2 - f^2)} + i \frac{d^2 U_0}{dz^2} \frac{\sigma_1 (\Omega_0^2 + f^2)}{(\Omega_0^2 - f^2)} \right] - \\
& - \frac{kw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left(f \frac{d^2 V_0}{dz^2} + \frac{fk}{\Omega_0} \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \right).
\end{aligned}$$

Граничные условия для функции w_1

$$w_1(0) = 0, w_1(-H) = 0. \quad (28)$$

Левая часть неоднородного линейного дифференциального уравнения (27) сводится к самосопряженному виду после умножения обеих частей на функцию $p(z)$:

$$\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{dw_1}{dz} \right) - q(z)w_1 = F_1(z), \quad (29)$$

где $F_1(z) = p(z)F(z)$.

Условие разрешимости краевой задачи (28), (29) имеет вид [12]

$$\int_{-H}^0 F_1 w_0 dz = 0, \quad (30)$$

отсюда находится выражение для σ_1

$$\sigma_1 = \frac{q}{r},$$

где

$$\begin{aligned}
q = & ifk \int_{-H}^0 \frac{pw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left(\frac{d}{dz} (w_0 \frac{dV_0}{dz}) + w_0 \frac{k}{\Omega_0} \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz} \right) dz, \\
r = & \int_{-H}^0 \frac{pkw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)^2} \left[w_0 \left(2k\Omega_0(N^2 - f^2) + \frac{d^2 U_0}{dz^2} (\Omega_0^2 + f^2) \right) \right] dz - \\
& - \int_{-H}^0 \frac{f^2 pkw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)^2} \frac{dw_0}{dz} \frac{dU_0}{dz} \frac{(3\Omega_0^2 - f^2)}{\Omega_0^2} dz.
\end{aligned}$$

Величина σ_1 чисто мнимая, т. е. $\delta\omega = \sigma_1 / i$ – декремент затухания волны.

Нелинейные эффекты. Скорость стокова дрейфа частиц жидкости определяется по формуле [13]

$$\mathbf{u}_s = \overline{\int_0^t (\mathbf{u} d\tau \nabla) \mathbf{u}}, \quad (31)$$

где \mathbf{u} – поле волновых эйлеровых скоростей; черта сверху означает осреднение по периоду волны. Горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа, направленная вдоль волнового вектора, с точностью до членов, квадратных по амплитуде волны, имеет вид

$$u_s = \frac{A_1 A_1^*}{k} \left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dz} \left(w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) + \text{c.c.} \right], \quad (32)$$

где $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$.

Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа определяется по формуле

$$v_s = A_1 A_1^* \left[\frac{1}{\omega \Omega^* k} \frac{dw_{10}}{dz} \left(if \frac{dw_{10}^*}{dz} - k \frac{dV_0}{dz} w_{10}^* \right) \right] - A_1 A_1^* \frac{w_{10}^*}{\omega^* \Omega^2} \times \\ \times \left[\Omega \left(\frac{dw_{10}}{dz} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + w_{10} \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right) + k \frac{dU_0}{dz} \left(w_{10} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right] + \text{c.c.} \quad (33)$$

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости V_0 зависит от вертикальной координаты, величина v_s отлична от нуля.

Найдем вертикальные волновые потоки импульса \overline{uw} , \overline{vw} , учитывая разложения (17), (18):

$$\overline{uw} / |A_1|^2 = \frac{i}{k} \left(w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (34)$$

$$\overline{vw} / |A_1|^2 = \frac{i w_{10} w_{10}^*}{\Omega \Omega^*} (\Omega - \Omega^*) \frac{dV_0}{dz} + \frac{fk}{\Omega \Omega^*} \left(\Omega^* w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} + \Omega w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right). \quad (35)$$

Вертикальный волновой поток импульса \overline{vw} отличен от нуля и при отсутствии течения, поток импульса \overline{uw} отличен от нуля только при наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости V_0 зависит от вертикальной координаты.

Результаты расчетов. Для определения вертикальных волновых потоков импульса используем результаты третьего этапа 44-го рейса НИС «Михаил Ломоносов» (северо-западный шельф Черного моря). По данным градиентно-распределенных датчиков температуры (приборы ГРАД) построен временной ход вертикальных смещений изолиний температуры (рис. 2) [14]. Приборы располагались один над другим и пересекали слои 5 – 15 м (первый прибор), 15 – 25 м (второй), 25 – 35 м (третий), 35 – 60 м (четвертый). Легко видеть, что мощные 15-минутные колебания в интервале глубин 25 – 60 м находятся в противофазе с колебаниями в слое 15 – 25 м, что свидетельствует

о присутствии внутренних волн второй моды. Максимальная амплитуда этих волн составила 0,5 м, и это позволило найти нормирующий множитель A_1 . Действительно, вертикальная скорость связана с вертикальным смещением ζ соотношением $\frac{d\zeta}{dt} = w$. Отсюда находятся ζ и выражение для A_1 :

$$\zeta = \frac{iw_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_0 / \Omega_0|}. \quad (36)$$

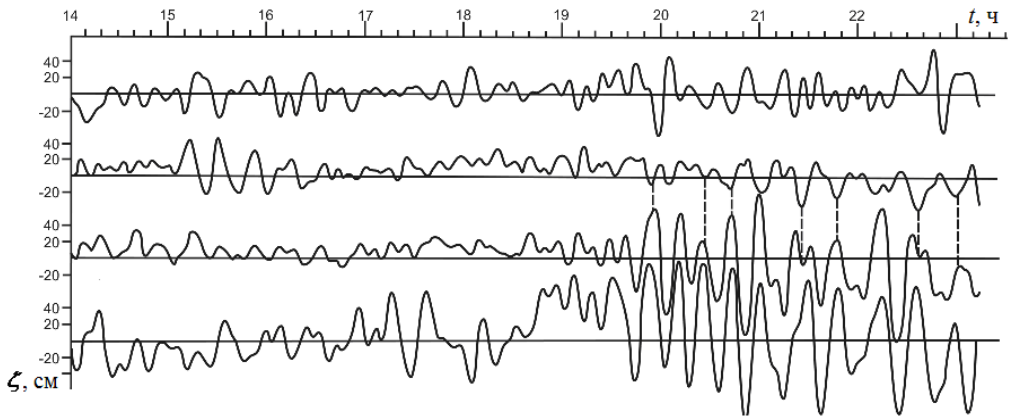


Рис. 2. Временной ход вертикальных смещений изолиний температуры

Из (36) следует, что максимум ζ соответствует максимуму функции w_0 / Ω_0 , максимальное по модулю значение этого отношения, по данным расчетов, достигается как раз в точке максимума функции w_0 . Собственная функция внутренних волн второй моды имеет максимум на глубине 50 м (рис. 3, а), т. е. соответствует максимальным возвышениям, согласно данным эксперимента (рис. 2). Краевая задача (23), (24) по определению w_0 решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Вертикальный профиль частоты Брента – Вайсяля показан на рис. 3, б. Волновое число k при фиксированной частоте волны находится методом пристрелки (из необходимости выполнения граничных условий (24)). Дисперсионные кривые первых двух мод приведены на рис. 4, а. Обращает на себя внимание тот факт, что в низкочастотной области дисперсионные кривые не достигают инерционной частоты, причем минимальное значение частоты у второй моды выше, чем у первой. Это обусловлено сингулярностью в уравнении (23), где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Поправку следующего приближения по параметру ε определяем, решая неоднородную краевую задачу (28), (29). Из условия разрешимости (30) этой краевой задачи находим

комплексную поправку к частоте волны, т. е. декремент затухания $\delta\omega$ волны. У 15-минутных внутренних волн второй моды $\delta\omega = -1,12 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Краевая задача (28), (29) решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Находится единственное решение, ортогональное решению w_0 соответствующей однородной краевой задачи (23), (24). Зависимость декремента затухания от волнового числа показана на рис. 4, б. В низкочастотной области эта зависимость ведет себя по-разному для первой и второй мод. Это обусловлено обрыванием дисперсионных кривых в низкочастотной области, причем обрывание у второй моды происходит на более высокой частоте, чем у первой. При фиксированном волновом числе декремент затухания у второй моды по абсолютной величине больше, чем у первой.

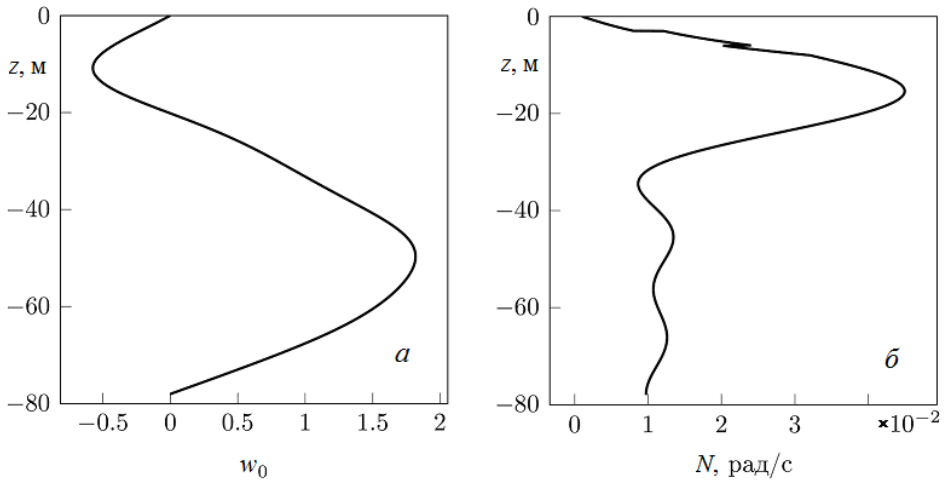


Рис. 3. Собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды – *a* и вертикальный профиль частоты Брента – Вэйсяля – *б*

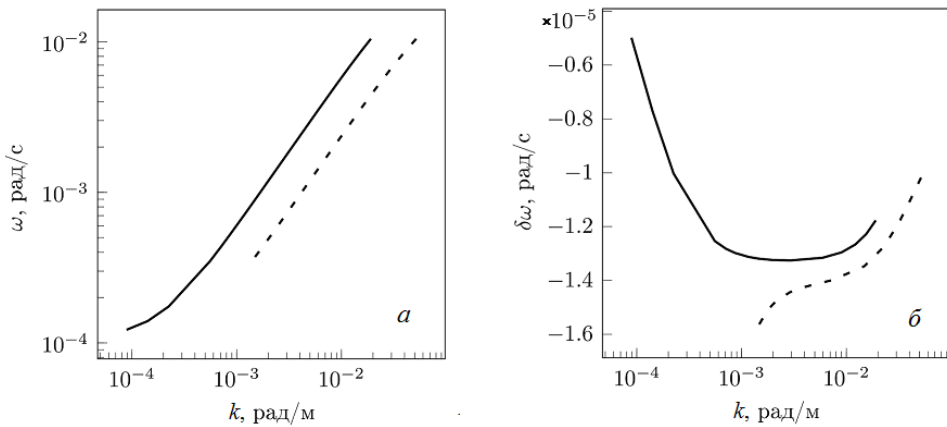


Рис. 4. Дисперсионные кривые первой и второй моды – *a*; зависимость декремента затухания волны от волнового числа – *б*. Первая мода – сплошные линии, вторая мода – штриховые

На рис. 5 показаны вертикальные профили горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа, нормированной на квадрат максимальной амплитуды волны для первой и второй моды 15-минутных внутренних волн. Профиль поперечной к направлению распространения волны скорости стокова дрейфа (33) приведен на рис. 6. Поперечная компонента скорости стокова дрейфа на порядок меньше продольной. При этом скорость стокова дрейфа у второй моды меньше, чем у первой, только в пикноклине.

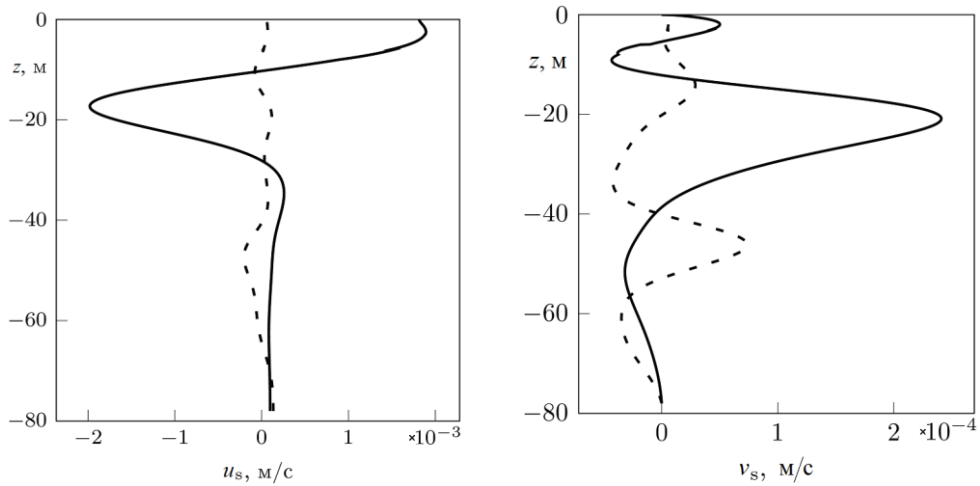


Рис. 5. Скорость стокова дрейфа для первой (сплошная) и второй (штриховая) моды

Рис. 6. Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа для первой (сплошная) и второй (штриховая) моды

Вертикальные профили волнового \overline{uw} и турбулентного $\overline{u'w'}$ потоков импульса показаны на рис. 7. Турбулентный поток импульса определялся по формуле $\overline{u'w'} = -K_z \frac{dU_0}{dz}$, коэффициент вертикального турбулентного обмена – по формуле $K_z \cong 0,93 \cdot 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ (N_c , цикл/ч – частота Брента – Вайселя) [15]. Волновой поток нормировался на квадрат амплитуды волны. В верхнем 10-метровом слое турбулентный поток превышает волновой, глубже эти потоки сравнимы по величине, причем в пикноклине волновой поток доминирует. Профили вертикальных потоков импульса \overline{vw} и $\overline{v'w'} = -K_z \frac{dV_0}{dz}$ показаны на рис. 8. У второй моды поток меньше, чем у первой, в верхнем 40-метровом слое. Турбулентный поток преобладает всюду над волновым, кроме пикноклина, где он сравним по величине с потоком у первой моды.

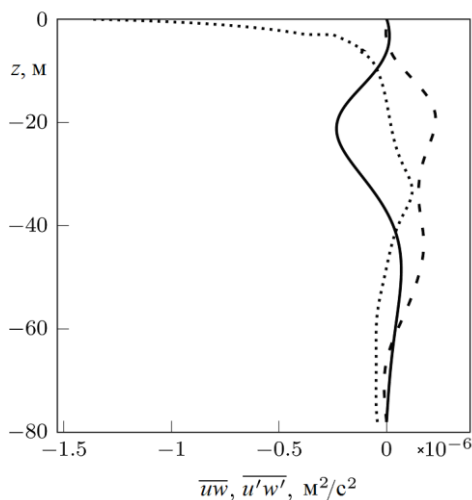


Рис. 7. Профили вертикальных потоков импульса (сплошная линия – первая мода, штриховая – вторая мода, пунктир – турбулентный поток)

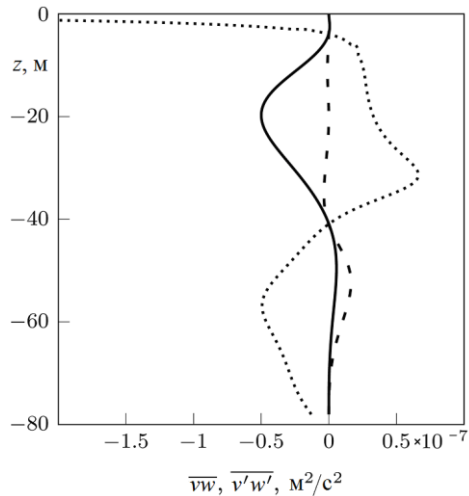


Рис. 8. Профили волнового \overline{vw} и турбулентного $\overline{v'w'}$ вертикальных потоков импульса (обозначения см. на рис. 7)

Выводы.

1. Вертикальные волновые потоки импульса у инерционно-гравитационных внутренних волн отличны от нуля в бароклинном потоке и могут быть сравнимы с турбулентными потоками (либо их превышать).

2. Волновой поток \overline{uw} отличен от нуля только при наличии течения, компонента скорости которого, поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты. В этом случае поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа отлична от нуля и на порядок меньше продольной.

3. Дисперсионные кривые внутренних волн первых двух мод обрываются в низкочастотной области, что обусловлено влиянием критического слоя, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Обрывание у второй моды происходит на большей частоте, чем у первой.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2014-0010 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем Черного и Азовского морей, на основе современных методов контроля состояния морской среды и грид-технологий».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. – М.: Мир, 1981. – Ч. 2. – 363 с.
2. LeBlond P.H. On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // J. Fluid Mech. – 1966. – 25, Iss. 1. – P. 121 – 142. – doi:10.1017/S0022112066000089

3. *Островский Л.А., Соустова И.А.* Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // *Океанология*. – 1979. – 19, вып. 6. – С. 973 – 981.
4. *Слепышев А.А.* Процессы переноса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами при наличии турбулентности // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана*. – 1997. – 33, № 4. – С. 536 – 548.
5. *Носова А.В., Слепышев А.А.* Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. – 2015. – № 1. – С. 15 – 25.
6. *Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. – 2016. – 52, № 3. – С. 342 – 350. – doi:10.7868/S0002351516030111
7. *Каменкович В.М.* Основы динамики океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 240 с.
8. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 302 с.
9. *Banks W.H.H., Drazin P.G., Zaturenska M.B.* On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid // *J. Fluid Mech.* – 1976. – 75, Iss. 1. – P. 149 – 171. – doi:10.1017/S0022112076000153
10. *Booker J.B., Bretherton F.P.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // *Ibid.* – 1967. – 27, Iss. 3. – P. 513 – 539. – doi:10.1017/S0022112067000515
11. *Jones W.L.* Propagation of internal waves in fluids with shear flow and rotation // *Ibid.* – 1967. – 30, Iss. 3. – P. 439 – 448. – doi:10.1017/S0022112067001521
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
13. *Longuet-Higgins M.S.* On the transport of mass by time-varying ocean currents // *Deep-Sea Res.* – 1969. – 16, No. 5. – P. 431 – 447.
14. *Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС «Михаил Ломоносов» 7 августа – 15 сентября 1985 г.* – Севастополь: МГИ АН УССР, 1985. – Т. 1. – 135 с.
15. *Иванов В.А., Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В.* Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // *Доп. НАН України*. – 2008. – № 6. – С. 108 – 112.

Vertical transport of momentum by the inertial-gravity internal waves in a baroclinic current

A. A. Slepyshev^{1,*}, D. I. Vorotnikov²

¹*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia*

²*M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

*e-mail: slep55@mail.ru

Free inertial-gravity internal waves in a baroclinic current are considered in the Bussinesq approximation. The dispersive relation and the wave attenuation decrement are found in the linear approximation. The Stokes drift speed is defined in the second order of the wave amplitude. It is shown that the Stokes drift speed, transversal to the wave propagation direction, differs from zero if the current speed transverse component depends on the vertical co-ordinate. The vertical wave fluxes can be compared with the corresponding turbulent fluxes or exceed them, and the dispersive curves of the first two modes do not reach inertial frequency within the low-frequency range due to the impact of the critical layers where the wave frequency with the Doppler shift is equal to the inertial one.

Keywords: internal waves, turbulence, momentum fluxes, Stokes drift, critical layer.