

# АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОКЕАНА

УДК 519.6

DOI:10.22449/0233-7584-2019-6-585-599

## Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря

**В. И. Агошков, В. П. Шутяев, Е. И. Пармузин\*, Н. Б. Захарова,  
Т. О. Шелопут, Н. Р. Лёзина**

*Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия*

*\*E-mail: eparmuzin@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.

*Цель.* В целях моделирования гидротермодинамики моря решается задача вариационной ассимиляции данных наблюдений температуры поверхности моря. Ассимиляция данных позволяет скорректировать расчеты численной модели данными измерений исследуемой среды.

*Методы и результаты.* Рассматривается математическая модель гидротермодинамики Черного и Азовского морей, разработанная в Институте вычислительной математики РАН и записанная в сигма-системе координат. Отличительной особенностью данной модели является использование в численной реализации метода расщепления по физическим процессам и пространственным координатам, что позволяет значительно упростить алгоритм вариационной ассимиляции данных. Сформулирована задача вариационной ассимиляции данных о температуре поверхности моря. Введен функционал стоимости, включающий в себя функцию управления – поток тепла на верхней границе моря и данные спутниковых наблюдений температуры поверхности моря. Необходимое условие минимума функционала переформулировано через систему оптимальности, включающую в себя прямую задачу, сопряженную задачу и условие для управления. На основе вариационной ассимиляции данных наблюдений со спутников разработан алгоритм решения поставленной задачи, учитывающий ковариационную матрицу ошибок наблюдений, рассчитанную на основе статистических характеристик данных наблюдений температуры поверхности моря. Алгоритм подразумевает последовательное решение системы оптимальности в итерационном процессе со специально подобранным итерационным параметром. Приведены результаты решения поставленной задачи на примере акватории Черного и Азовского морей.

*Выводы.* Проведено сравнение результатов расчетов численной модели с ассимиляцией данных наблюдений и без ассимиляции, показывающее эффективность процедур ассимиляции данных наблюдений. Исследовано влияние процедуры ассимиляции температуры поверхности моря на другие параметры системы. Показано, что при ассимиляции температуры поверхности моря влияние оказывается только на температуру в верхних слоях, а профиль в нижних слоях, при условии достаточной глубины, остается практически неизменным. Влияние на другие параметры системы либо минимально, либо не ощущается совсем.

**Ключевые слова:** математическая модель, вариационная ассимиляция, численный алгоритм, данные наблюдений, гидротермодинамика, температура поверхности моря.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке проекта РНФ № 19-71-20035 (постановка задачи, разработка алгоритма, численные эксперименты) и гранта Президента РФ № МК-3228.2018.5 (обработка данных наблюдений и их подготовка для расчетов модели).

**Для цитирования:** Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря / В. И. Агошков [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2019. Т. 35, № 6. С. 585–599. doi:10.22449/0233-7584-2019-6-585-599

© Агошков В. И., Шутяев В. П., Пармузин Е. И., Захарова Н. Б., Шелопут Т. О., Лёзина Н. Р., 2019

# Variational Data Assimilation in the Mathematical Model of the Black Sea Dynamics

V. I. Agoshkov, V. P. Shutyaev, E. I. Parmuzin\*, N. B. Zakharova, T. O. Sheloput, N. R. Lezina

*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*  
*\*e-mail: eparmuzin@gmail.com*

*Purpose.* In order to simulate the sea hydrothermodynamics, the problem of variational assimilation of the sea surface temperature data is solved. The data assimilation permits to adjust the numerical model calculations to the measurement data obtained in the environment under study.

*Methods and Results.* The mathematical model of hydrothermodynamics of the Black and Azov seas developed at the Institute of Numerical Mathematics, RAS, and represented in the sigma coordinate system is considered. The distinctive feature of the model consists in applying the splitting method to physical processes and spatial coordinates that can significantly simplify the variational data assimilation algorithm. The problem of variational assimilation of the sea surface temperature data is formulated. A cost functional has been introduced; it includes the control function – heat flux at the sea upper boundary and satellite observations of the sea surface temperature. The necessary condition for the functional minimum is reformulated through the optimality system including the direct and adjoint problems, and the control condition. Using the variational assimilation of the satellite-derived observations, the algorithm for solving the stated problem was developed. It takes into account the observational errors' covariance matrix calculated based on the statistical characteristics of the sea surface temperature observational data. The algorithm implies a sequential solution of the optimality system in the iterative process with the specially selected iterative parameter. The results of numerical solution of this problem are represented by the example of the Black and Azov seas.

*Conclusions.* The results of numerical modeling with the observational data assimilation and without it are compared; efficiency of the observational data assimilation procedures is shown. Influence of the sea surface temperature assimilation upon the other system parameters is investigated. It is shown that when assimilating the sea surface temperature, only temperature in the upper layers is affected, whereas, provided that the depth is sufficient, the profile in the lower layers remains practically unchanged. The impact on the other system parameters is either minimal or not manifested at all.

**Keywords:** mathematical model, variational assimilation, numerical algorithm, observations, hydrothermodynamics, sea surface temperature.

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Science Foundation project No 19-71-20035 (problem statement, algorithm development, numerical experiments) and the grant of the President of the Russian Federation No MK-3228.2018.5 (processing of observation data and their preparation for model calculations).

**For citation:** Agoshkov, V.I., Shutyaev, V.P., Parmuzin, E.I., Zakharova, N.B., Sheloput, T.O. and Lezina, N.R., 2019. Variational Data Assimilation in the Mathematical Model of the Black Sea Dynamics. *Physical Oceanography*, [e-journal] 26(6), pp. 515-527. doi:10.22449/1573-160X-2019-6-515-527

## Введение

Для достоверного мониторинга и прогнозирования морской циркуляции необходимо создание системы усвоения данных, и одним из ее основных компонентов должна служить физически полная, верифицированная модель, которую можно применять для расчета циркуляции акватории. На современном этапе исследований необходимо объединять реальные данные наблюдательных систем и вычислительные эксперименты математических моделей, повышать точность моделирования и прогнозирования физических процессов. В последние годы методы ассимиляции данных широко применяются в науках о Земле,

обеспечивая взаимосвязь между двумя основными компонентами, позволяющими проводить мониторинг состояния окружающей среды, – наблюдениями и моделями. Наибольшие приложения эти методы получили в метеорологии и океанографии, где наблюдения ассимилируются в численные модели с целью получения граничных или начальных условий (или других параметров модели) для дальнейшего моделирования и прогноза [1–9].

Задачи вариационного усвоения данных формулируются как задачи оптимального управления [10–12]. Как известно, при решении задач минимизации возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении стало использование теории сопряженных уравнений. Развитие данного направления в значительной степени основано на трудах академика Гурия Ивановича Марчука. В 70-е гг. XX в. Г. И. Марчук сформулировал фундаментальный подход к решению задачи долгосрочного прогноза погоды, основанный на так называемых сопряженных уравнениях для нелинейных моделей гидротермодинамики атмосферы и океана [13]. В дальнейшем в работах Г. И. Марчука было дано развитие теории сопряженных уравнений и алгоритмов возмущений для исследования различных классов задач математической физики [14]. Оно оказалось плодотворным и для многих других направлений науки. В результате появились более или менее общие подходы к исследованию сложных систем и математических моделей [12]. Эти подходы явились основным содержанием многолетних исследований Г. И. Марчука и его научной школы в Институте вычислительной математики (ИВМ) РАН в различных областях математики и ее приложениях к проблемам диффузии, моделям охраны окружающей среды, теории климата и его изменений [13–15], математическим проблемам обработки информации со спутников, теории приливов [16] и др.

В настоящее время наиболее универсальной и перспективной технологией решения задач мониторинга и анализа состояния природной среды является применение сопряженных уравнений, методов оптимального управления [1, 10, 11] и четырехмерного вариационного усвоения данных наблюдений [8, 17]. Применение четырехмерной вариационной ассимиляции (*4D-Var*) и использование более частых данных наблюдений позволяет повысить точность краткосрочного прогноза [18]. Принцип четырехмерной вариационной ассимиляции обычно подразумевает, что модель прогноза «идеальна» в пределах окна ассимиляции [19]. Такой подход подбирает траекторию модели, которая наилучшим образом соответствует данным наблюдений. Метод ассимиляции данных *4D-Var* был внедрен в последние несколько лет в различных центрах численного предсказания погоды с существенными преимуществами [20, 21]. Однако все численные модели несовершенны, и следующим шагом в решении задач моделирования морских сред и построении эффективных алгоритмов усвоения стало рассмотрение систематических ошибок наблюдений (*bias observation*), корреляций ошибок наблюдений и модельных ошибок в слабой постановке четырехмерной вариационной ассимиляции [22–24], построение ковариационных матриц ошибок наблюдений и включение их в исходный функционал стоимости [5].

В настоящей работе рассматривается математическая модель общей циркуляции Черного и Азовского морей с процедурой вариационной ассимиляции

ции данных о температуре поверхности моря и с учетом ковариационной матрицы ошибок наблюдений. На основе вариационной ассимиляции данных наблюдений предлагается алгоритм решения обратной задачи по восстановлению потоков тепла на поверхности моря. За основу численной реализации модели общей циркуляции моря в настоящей работе принята численная модель гидротермодинамики Черного и Азовского морей *Institute of Numerical Mathematics Ocean Model (INMOM)*, разработанная в ИВМ РАН [25], в которую также добавлен учет приливного потенциала в соответствии со специальной методикой, изложенной в [26], где при расчете вторичных приливных сил используется вариационная ассимиляция среднегодовых данных наблюдений за уровнем. В настоящей работе, в отличие от работ [10, 26], в функционал вводится ковариационная матрица ошибок наблюдений, посчитанная на основе статистических свойств данных наблюдений за 1982–2017 гг., а в качестве ассимилируемых данных выбраны среднесуточные данные наблюдений со спутников о температуре поверхности моря за 2017 г. Также в данной работе при моделировании динамики Черного моря исследована зависимость других параметров моделирования от ассимиляции температуры поверхности моря.

### Математическая модель динамики Черного моря

Математическая модель динамики Черного моря рассматривается в географических координатах. Пусть  $\vec{U} = (u, v, w)$  – вектор скорости,  $\zeta$  – функция уровня,  $T$  – температура,  $S$  – соленость.

Запишем в области  $D$  в переменных  $(x, y, z)$  при  $t \in (0, \bar{t})$  систему уравнений гидротермодинамики для функций  $u, v, \zeta, T, S$  в приближении Буссинеска и гидростатики [27], с коэффициентами Ламе для сферической системы координат [28]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \mathbf{grad} \zeta + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} P_a - \\ \quad - \frac{g}{\rho_0} \mathbf{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^H \Theta(z) u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} v dz \right) = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\vec{u} = (u, v)$ ;  $\rho_1(T, S) = \rho_0 \beta_T (T - T^{(0)}) + \rho_0 \beta_S (S - S^{(0)}) + \gamma \rho_0 \beta_{TS} (T, S) + f_P$ ,  $\vec{f} = (f_1, f_2)$ ,  $f_T, f_S, f_P, \rho_0, T^{(0)}, S^{(0)}, \beta_{TS}(T, S), P_a, f_3 \equiv f_3(x, y, t)$  – заданные функции,  $\beta_T, \beta_S, \gamma = \text{const}$ ;  $A_\varphi \varphi \equiv -\mathbf{div}(\hat{a}_\varphi \mathbf{grad} \varphi)$ , где индекс  $\varphi$  может принимать значения  $u, T, S$ ;  $g = \text{const} > 0$ ,  $\Theta(z) \equiv \frac{R-z}{R} \approx 1$ , где  $R$  – радиус Земли.

Для системы (1) в  $D \times (0, \bar{t})$  задаются следующие граничные и начальные условия [28] на поверхности моря  $\Gamma_s = \Omega$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \int_0^H \rho \bar{u} dz \right) \bar{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \zeta = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)} u - v \frac{\partial u}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u = \tau_x^{(a)} \rho_0, U_n^{(-)} v - v \frac{\partial v}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k v = \tau_y^{(a)} \rho_0, \\ A_k u = 0, \quad A_k v = 0, \\ U_n^{(-)} T - v_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T, \\ U_n^{(-)} S - v_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)} d_S, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\tau_x^{(a)}$ ,  $\tau_y^{(a)}$ ,  $\gamma_T$ ,  $\gamma_S$ ,  $T_a$ ,  $S_a$ ,  $Q_T$ ,  $Q_S$ ,  $d_T$ ,  $d_S$  – заданные функции;  $U_n = UN$  ( $N$  – вектор внешней нормали к соответствующей границе),  $U_n^{(-)} = (|U_n| - U_n) / 2$ ,  $U_n|_{z=0} = -w|_{z=0}$ , а  $w = w(u, v)$  вводится по формуле

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{r} \left( m \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z^H r u dz' \right) + m \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_z^H r v dz' \right) \right), \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (3)$$

Кроме того, задаются граничные условия на твердой боковой стенке  $\Gamma_{w,c}$ , на жидкой части боковой стенки  $\Gamma_{w,op}$  и на дне  $\Gamma_H$  [26].

Начальные условия для  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $\zeta$  имеют вид:

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0, \quad \zeta = \zeta^0 \quad \text{при } t = 0, \quad (4)$$

где  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $T^0$ ,  $S^0$ ,  $\zeta^0$  – заданные функции.

Задача крупномасштабной динамики моря в терминах  $u, v, \zeta, T, S$  функций формулируется так: *найти  $u, v, \zeta, T, S$ , удовлетворяющие (1) – (4)*. Если функции  $u, v, \zeta, T, S$  найдены, то функция  $w$  определяется по формуле (3).

Отметим, что приведенные выше граничные условия могут быть модифицированы в зависимости от конкретной физической задачи. Задача (1) – (4) аппроксимируется по методу расщепления с привлечением метода конечных разностей [28, 29].

### Метод расщепления и основные особенности численной модели

Основными особенностями численной модели динамики Черного моря (1) – (4) являются одновременное использование метода расщепления [29, 30] и переход к  $\sigma$ -системе координат.

Введем на  $[0; \bar{t}]$  сетку:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j = \bar{t}$ ,  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$  и рассмотрим задачу (1) – (4) на  $(t_{j-1}, t_j)$ , считая, что вектор приближенного реше-

ния  $\phi_k \equiv (u_k, v_k, \zeta_k, T_k, S_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, j-1$ , на предыдущих интервалах уже определен. Для аппроксимации задачи применим одну из схем метода суммарной аппроксимации [30, 31], заключающуюся в реализации следующих шагов (для упрощения обозначений индекс  $j$  у всех компонентов решений подзадач на данных шагах опускается).

**ШАГ 1.** Рассматривается задача вида

$$T_t + (\bar{U}, \mathbf{grad})T - \mathbf{div}(\hat{a}_T \cdot \mathbf{grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j) \quad (5)$$

при соответствующих граничных и начальных условиях.

**ШАГ 2.** Решается задача

$$S_t + (\bar{U}, \mathbf{grad})S - \mathbf{div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{grad} S) = f_S \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j) \quad (6)$$

при соответствующих граничных и начальных условиях.

**ШАГ 3.** Сначала решается система

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(1)} - g \mathbf{grad} \zeta = g \mathbf{grad} G - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} \left( P_a + g \int_0^z \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right) \\ \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \zeta_t - \mathbf{div} \left( \int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz \right) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(1)} = \underline{u}_{j-1}, \zeta = \zeta_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1}, \quad \underline{u}_j^{(1)} \equiv \underline{u}^{(1)}(t_j) \text{ в } D \end{cases} \quad (7)$$

с соответствующими граничными условиями и функция  $\zeta_j \equiv \zeta^{(1)}$  принимается в качестве приближения к  $\zeta$  на  $(t_{j-1}, t_j)$ , затем решается задача

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -f_1(\bar{u}) \\ f_1(\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(2)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(2)} = \underline{u}_j^{(1)} \text{ при } t = t_{j-1}, \quad \underline{u}_j^{(2)} \equiv \underline{u}^{(2)}(t_j) \text{ в } D, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(3)} + (\bar{U}, \mathbf{grad})\underline{u}^{(3)} - \mathbf{div}(\hat{a}_u \cdot \mathbf{grad})\underline{u}^{(3)} + (A_k)^2 \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(3)} = \underline{u}^{(2)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \end{cases} \quad (9)$$

где  $u^{(3)} = (u^{(3)}, v^{(3)})$ . После решения (9) вектор  $u^{(3)} \equiv u_j \equiv (u_j, v_j)$  принимается в качестве приближения к точному вектору  $u$  на  $D \times (t_{j-1}, t_j)$  и вычисляется приближение  $w_j \equiv w(u_j, v_j)$  к вертикальному компоненту вектора скорости.

Таким образом, при реализации шагов 1–3 после первого шага получаем приближение к  $T$ , после второго – к  $S$ , после третьего – приближения

к  $\underline{u} = (u, v)$ ,  $\zeta$ , т. е. подзадачи на данных шагах независимы друг от друга и могут решаться параллельно.

Еще одной особенностью численного решения полной задачи (1) – (4) является использование  $\sigma$ -системы координат. Переход к  $\sigma$ -системе можно осуществить на этапе рассмотрения полной задачи перед применением подходящих схем расщепления и других численных процедур [29]. Однако переход к  $\sigma$ -системам возможен также после применения схем расщепления, т. е. в нашем случае – в применении к задаче (5) – (9). Ряд других подходов численного решения задачи (5) – (9) изложен, напр., в [27, 29].

### Задача вариационной ассимиляции данных о температуре поверхности

Пусть задана функция данных наблюдений  $T_{obs}$  на  $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$  при  $t \in (t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции температуры поверхности моря (ТПМ) на  $\Omega$ , т. е. к  $T|_{z=0}$ . Допускается случай, когда  $T_{obs}$  имеется лишь на некотором подмножестве из  $\Omega \times (0, \bar{t})$ , носитель которого обозначим через  $m_0$ . Поскольку в качестве  $T_{obs}$  для численных экспериментов использовались среднесуточные данные, то по теореме о среднем существует хотя бы одна точка  $t_{j_k}$ , значение  $T_{obs}$  в которой близко к среднесуточному значению за  $k$ -е сутки. Тогда, зная точки  $\{t_{j_k}\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , для процедуры ассимиляции можно использовать характеристическую функцию  $m_0$  в виде

$$m_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \cup_{k=1}^K (t_{j_{k-1}}, t_{j_k}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Также через  $m^{(j)}$  обозначим функцию, определяющую наличие данных наблюдений в заданный промежуток времени  $(t_{j-1}, t_j)$ . В дальнейшем предполагается, что данные наблюдений  $T_{obs}$  заданы с ошибками, а именно:

$$T_{obs} = m_0 T^t|_{z=0} + \xi_{obs},$$

где  $T^t$  – точное решение задачи (5) при некотором  $Q = Q^t$ , а  $\xi_{obs} \in Y_{obs} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$  можно рассматривать как ошибку наблюдений. Предполагается также, что ошибки  $\xi_{obs}$  случайные и распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором  $R = E[(\cdot, \xi_{obs}) \xi_{obs}]$ ,  $R: Y_{obs} \rightarrow Y_{obs}$ , где  $E$  – математическое ожидание. В дальнейшем предполагается, что  $R$  положительно определен и, значит, обратим.

Пусть дополнительной неизвестной (управлением) является функция полного потока  $Q = -v_t \frac{\partial T}{\partial z}$  на  $\Gamma_S$ . Введем функционал стоимости вида:

$$J_\alpha(Q) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_\Omega |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J J_{0,j}, \quad (10)$$

$$J_{0,j} \equiv \int_{t_{j-1}\Omega}^{t_j} \int (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt,$$

где  $Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$  – заданная функция;  $\alpha = \text{const} > 0$  – параметр регуляризации.

Задача вариационной ассимиляции формулируется следующим образом: *найти решение  $\phi$  и функцию  $Q$ , такие, чтобы на них функционал (10) принимал наименьшее значение.*

Как показано в [10], система оптимальности, которая определяет решение сформулированной задачи вариационной ассимиляции данных, согласно необходимому условию  $\text{grad} J_\alpha = 0$ , сводится к последовательному решению основного, сопряженного уравнения и дополнительного выражения для управления на  $t \in (t_{j-1}, t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Вопросы однозначной и плотной разрешимости задачи рассматривались в работах [10, 32].

Сформулируем некоторые из алгоритмов решения рассматриваемой задачи на примере отрезка  $(t_0, t_1)$ . Построение приближенных решений полной численной модели с одновременным определением  $Q$  посредством процедуры вариационной ассимиляции  $T_{\text{obs}}$  может быть осуществлено следующим итерационным алгоритмом: если  $Q^{(k)}$  есть уже построенное приближение к  $Q$ , то после решения прямой задачи при  $Q \equiv Q^{(k)}$  решается соответствующая сопряженная задача, а затем определяется следующее приближение  $Q^{(k+1)}$ :

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \gamma_k \left( \alpha (Q^{(k)} - Q^{(0)}) + T^* \right) \quad \text{на } \Omega \times (t_0, t_1) \quad (11)$$

с параметром  $\gamma_k$ , который выбирается так, чтобы рассматриваемый итерационный процесс сходился [10]. Здесь  $T^*$  – решение соответствующей сопряженной задачи. После определения  $Q^{(k+1)}$  решение прямой и сопряженной задач повторяется уже с новым приближением  $Q^{(k+1)}$ , а затем вычисляется  $Q^{(k+2)}$  и т. д. Итерации повторяются до выполнения подходящего критерия сходимости процесса.

В силу свойства плотной разрешимости в качестве параметров  $\{\gamma_k\}$  могут быть выбраны параметры, вычисляемые по формуле при  $\alpha \approx +0$  [10]:

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \frac{\int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt}{\int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} (T_2^*)^2|_{z=0} d\Omega dt},$$

которые могут существенно ускорить сходимость итерационного процесса.

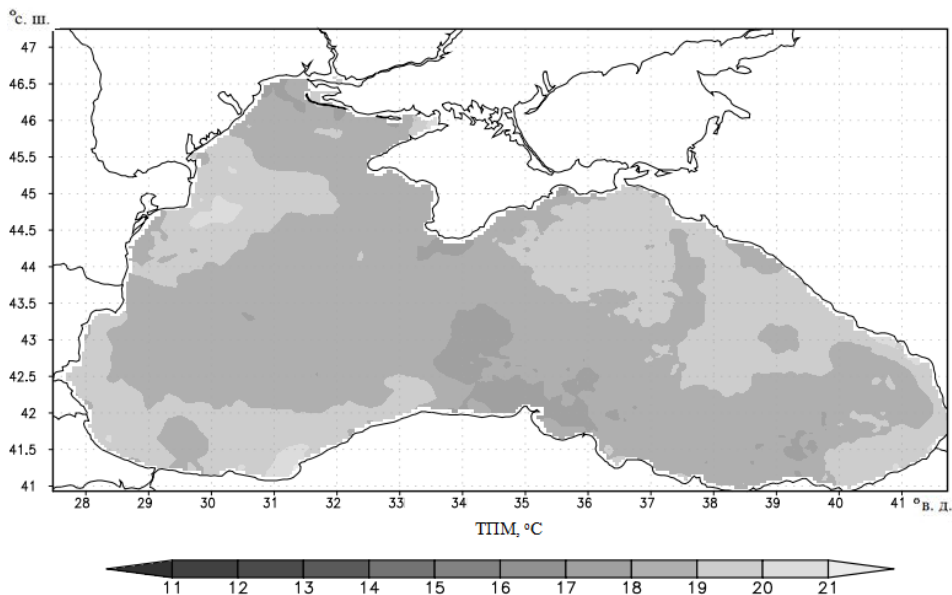


Рассмотренная выше задача относится к классу четырехмерных задач вариационной ассимиляции. Метод расщепления здесь рассматривается как метод аппроксимации исходной модели, а сама же задача вариационной ассимиляции решается на множестве  $D \times (t_0, t_1)$  (или на  $D \times (t_{j-1}, t_j)$ ,  $j > 1$ ).

### Результаты численных экспериментов

Для численных экспериментов использовалась разработанная в ИВМ РАН трехмерная модель гидротермодинамики Черного и Азовского морей [25, 26]. Модель дополнена описанным выше блоком ассимиляции температуры поверхности моря  $T_{obs}$ . Параметры расчетной области и ее географические координаты задавались со следующими характеристиками:  $\sigma$ -сетка  $286 \times 159 \times 27$  точек (по широте, долготе и глубине соответственно). Первая точка сетки «С» – точка с координатами  $27,475^\circ$  в. д.,  $40,93^\circ$  с. ш. Шаги сетки по  $x$  и  $y$  постоянны и равны  $0.05^\circ$  и  $0.04^\circ$  соответственно. Шаг по времени  $\Delta t = 5$  мин. Расчеты проводились при параметре регуляризации  $\alpha = 10^{-6}$ .

В качестве данных наблюдений  $T_{obs}$  использовались среднесуточные данные со спутников о температуре поверхности Черного моря за 2017 г. [33], прошедшие верификацию и интерполяцию на расчетную сетку численной модели [34, 35]. В качестве  $Q^{(0)}$  использовался поток, полученный по данным реанализа Национального центра прогнозирования окружающей среды (*National Center for Environmental Prediction, NCEP*) за 2017 г. Пример данных наблюдений, ассимиляция которых проводилась при численных экспериментах, показан на рис. 1.

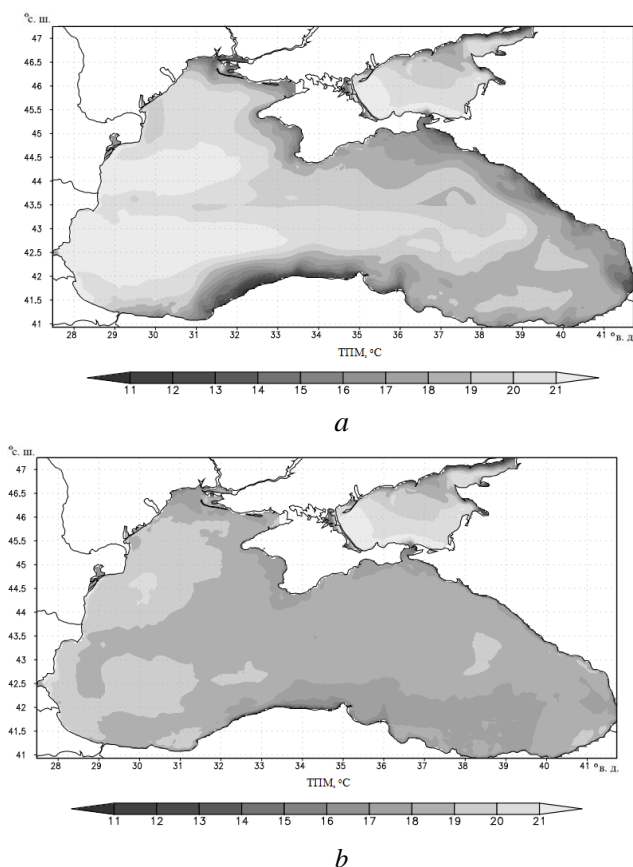


**Р и с. 1.** Температура поверхности Черного моря ( $^{\circ}\text{C}$ ), среднесуточные данные наблюдений, 3 июня 2017 г.

**Fig. 1.** The Black Sea surface temperature ( $^{\circ}\text{C}$ ), mean daily observations, June 3, 2017

На основе указанных среднесуточных данных о ТПМ за 1982–2017 гг. вычислены статистическое среднение и среднеквадратическое отклонение. Вычисленные статистические характеристики используются как коэффициенты в ковариационных матрицах ошибок наблюдений, обратные к которым включаются в качестве весовых операторов в исходный функционал стоимости при решении задачи вариационной ассимиляции данных [36].

С помощью представленной численной модели гидротермодинамики моря, дополненной процедурой ассимиляции температуры поверхности  $T_{obs}$ , проведены расчеты для акваторий Черного и Азовского морей с учетом процедуры ассимиляции. Расчет включал в себя ассимиляцию температуры поверхности моря  $T_{obs}$  сроком до 3 сут. Проведены эксперименты для июня 2017 г. (начало расчетного периода – первый день месяца). В качестве внешнего воздействия для модели динамики Черного и Азовского морей использовались реальные данные *ERA-Interim*, представленные Европейским центром среднесрочного прогноза погоды (*European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, ECMWF*), за 2017 г.

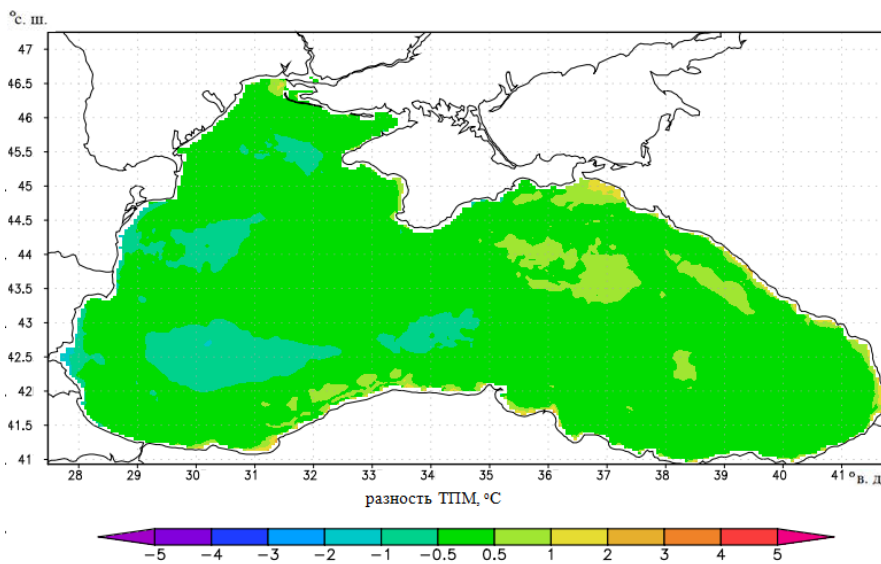


**Р и с. 2.** ТПМ Черного и Азовского морей, 3 июня 2017 г.: *a* – расчет по модели без процедуры ассимиляции; *b* – расчет по модели с процедурой ассимиляции

**F i g. 2.** SST of the Black and Azov seas (°C), June 3, 2017. *a* – model calculation without assimilation procedure, *b* – model calculation using the assimilation procedure

Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Результаты расчета по численной модели гидротермодинамики без процедуры ассимиляции представлены на рис. 2, *a*, где приведено среднее значение температуры поверхности моря на третий день расчета (3 июня). Результат аналогичного расчета с процедурой ассимиляции показан на рис. 2, *b*. Из сравнения полученных результатов видно, что модель несколько завышает ТПМ в юго-западной части Черного моря, однако использование ассимиляции позволяет уменьшить расхождение. В Азовском море значения ТПМ в обоих случаях идентичные по причине отсутствия в указанный период расчета данных наблюдений в этом регионе.

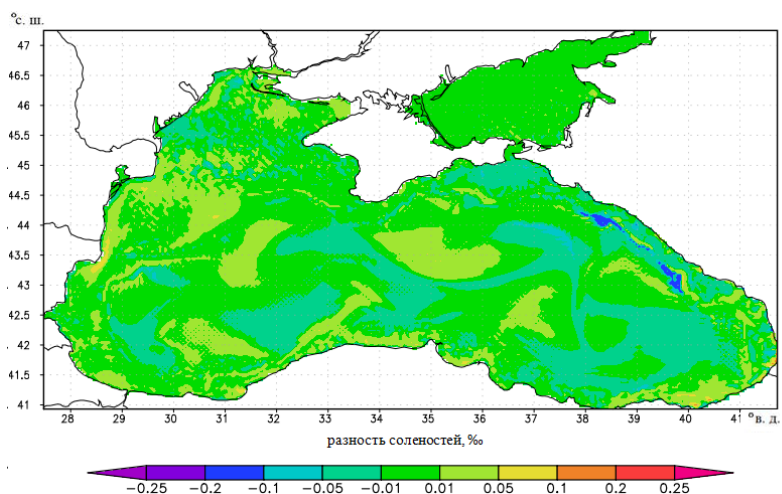
На рис. 3 представлена разность между рассчитанной ТПМ для данного эксперимента (рис. 2, *b*) и данными наблюдений (рис. 1). Из сравнения видно, что ассимиляция температуры поверхности  $T_{obs}$  в численной модели позволяет уменьшить отклонение модельного решения от данных наблюдений за расчетный период. Применение алгоритмов вариационной ассимиляции позволяет уменьшить указанное отклонение в некоторых районах Черного моря на величину до 2°C.



**Р и с. 3.** Разность между полем ТПМ, рассчитанным с использованием процедуры ассимиляции данных наблюдений, и полем данных наблюдений, 3 июня 2017 г.

**F i g. 3.** Difference between the SST mean value resulted from the model calculation with the SST data assimilation procedure and that obtained from the observation data, June 3, 2017

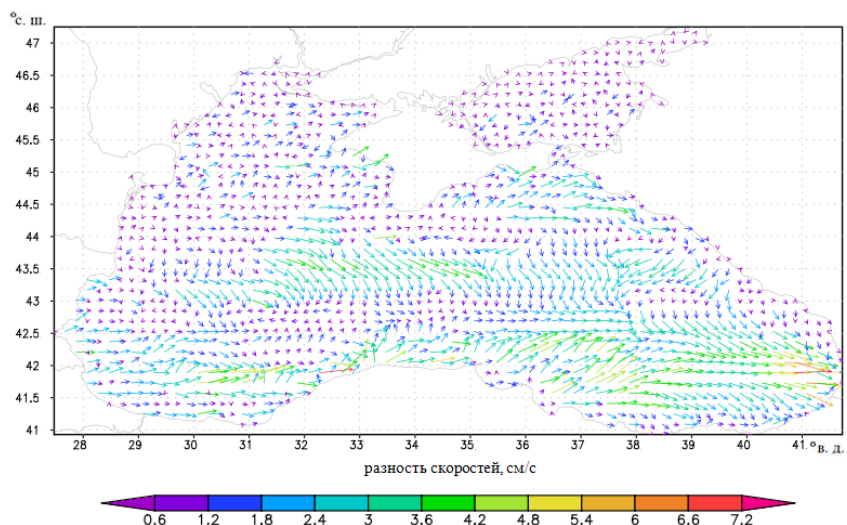
В работе также исследовалось влияние процесса ассимиляции ТПМ на другие параметры системы. Так, на рис. 4 показана разность между соленостью на поверхности моря при ассимиляции ТПМ и без ассимиляции. По результатам расчета можно сделать вывод, что усвоение ТПМ оказывает малое влияние на соленость на поверхности моря (изменение составляет не более 0,2‰).



**Р и с. 4.** Разность величины солености (‰) на поверхности моря при расчете с процедурой ассимиляции данных наблюдений ТПМ и без процедуры ассимиляции данных ТПМ, 3 июня 2017 г.

**F i g. 4.** Difference between the surface salinity (‰) resulted from the model calculation with the SST data assimilation procedure and that obtained without the SST data assimilation procedure, June 3, 2017

На рис. 5 показана разность между полем скоростей на поверхности Черного моря, рассчитанным по численной модели с процедурой ассимиляции данных о ТПМ и без включения процедуры ассимиляции. Здесь также можно отметить малое влияние процедуры ассимиляции ТПМ на циркуляцию вод на поверхности Черного моря (до 7 см/с).



**Р и с. 5.** Разность скоростей (см/с) на поверхности моря при расчете с процедурой ассимиляции данных наблюдений ТПМ и без процедуры ассимиляции данных ТПМ, 3 июня 2017 г.

**F i g. 5.** Difference between the surface circulation velocities (cm/sec) resulted from the model calculation with the SST data assimilation procedure and that obtained without the SST data assimilation procedure, June 3, 2017

Влияния процедуры ассимиляции ТПМ на уровень поверхности моря в проведенных численных экспериментах не наблюдалось.

### Заключение

В работе рассмотрена задача численного моделирования гидротермодинамики Черного и Азовского морей с использованием процедур вариационной ассимиляции среднесуточных данных наблюдений о температуре поверхности Черного моря. Результаты численных расчетов продемонстрировали преимущества работы численной модели с использованием процедур ассимиляции данных. Одной из особенностей разработанной модели является использование метода расщепления, что позволяет расширить применение процедур ассимиляции для усвоения солёности и функции уровня (при наличии соответствующих данных наблюдений), поскольку шаги реализуются независимо.

В работе показано, что модельное решение становится значительно ближе к данным наблюдений при использовании процедур ассимиляции данных. Также ассимиляция данных позволяет учитывать аномалии в температуре поверхности моря, что не всегда удается сделать при расчете по численной модели без учета данных наблюдений.

Численные расчеты показали, что процедура ассимиляции температуры поверхности оказывает слабое влияние на другие компоненты полного решения задачи – солёность, функцию уровня и скорости. Однако стоит отметить, что существенное влияние на параметры системы оказывает включение в модель приливных сил.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационно-вычислительные технологии – новый этап развития оперативной океанографии / Г. И. Марчук [и др.] // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49, № 6. С. 629–642. doi:10.7868/S0002351513060114
2. *Marchuk G. I., Paton B. E.* The Black Sea as a simulation ocean model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, iss. 1. P. 1–4. doi:10.1515/rnam-2012-0001
3. *Le Dimet F. X., Talagrand O.* Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 1986. Vol. 38, iss. 2. P. 97–110. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v38i2.11706>
4. *Иванов В. А.* Пространственно-временная изменчивость и мониторинг гидрофизических полей Черного моря // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 1. С. 30–40. doi:10.7868/S0002351513060084
5. NEMOVAR: A variational data assimilation system for the NEMO ocean model / K. S. Mogensen [et al.] // ECMWF Newsletter. 2009. No. 120. P. 17–21. doi:10.21957/3yj3mh16iq
6. *Talagrand O.* Variational Assimilation // Data Assimilation. Berlin, Heidelberg : Springer, 2010. P. 41–67. doi:10.1007/978-3-540-74703-1
7. *Auroux D., Blum J.* Data Assimilation Methods for an Oceanographic Problem // Multidisciplinary Methods for Analysis Optimization and Control of Complex Systems. Berlin, Heidelberg : Springer, 2005. P. 180–194. (Vol. 6). doi:10.1007/3-540-27167-8\_4
8. Методика и результаты ассимиляции климатических данных по температуре, солёности и уровню в численной модели циркуляции Черного моря / В. В. Кныш [и др.] // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43, № 3. С. 398–412.

9. Применение метода адаптивной статистики для реанализа полей Черного моря с ассимиляцией псевдоизмерений температуры и солености в модели / Г. К. Коротаев [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2018. Т. 34, № 1. С. 40–56. doi:10.22449/0233-7584-2018-1-40-56
10. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М. : ИВМ РАН, 2003. 255 с.
11. *Lions J. L.* Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris : Dunod Gauthier-Villars, 1968. 426 с.
12. *Marchuk G. I.* Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht : Springer, 1995. 468 p. doi:10.1007/978-94-017-0621-6
13. *Марчук Г. И.* Численные методы в прогнозе погоды. Л. : Гидрометеиздат, 1967. 356 с.
14. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P.* Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems. New York : CRC Press Inc., 1996. 288 p.
15. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана / Г. И. Марчук [и др.]. Л. : Гидрометеиздат, 1984. 320 с.
16. *Marchuk G. I., Kagan B. A.* Dynamics of Ocean Tides. Dordrecht – Boston : Kluwer Academic Publishers, 1989. 327 p.
17. *Zalesny V. B., Zakharova N. B., Gusev A. V.* Four-dimensional problem of variational initialization of hydrophysical fields of the World Ocean // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26, iss. 2. P. 209–229. doi:10.1515/RJNAMM.2011.012
18. *Järvinen H., Andersson E., Bouttier F.* Variational assimilation of time sequences of surface observations with serially correlated errors // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 1999. Vol. 51, iss. 4. P. 469–488. doi:10.3402/tellusa.v51i4.13963
19. *Le Dimet F. X., Navon I. M., Ștefănescu R.* Variational Data Assimilation: Optimization and Optimal Control // Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic and Hydrologic Applications. Vol. III. Cham : Springer, 2017. P. 1–53. doi:10.1007/978-3-319-43415-5\_1
20. The Regional Ocean Modeling System (ROMS) 4-dimensional variational data assimilation systems: Part I – System overview and formulation / A. M. Moore [et al.] // Progress in Oceanography. 2011. Vol. 91, iss. 1. P. 34–49. doi:10.1016/j.pocean.2011.05.004
21. *Rabier F.* Overview of global data assimilation developments in numerical weather-prediction centres // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2005. Vol. 131, iss. 613. P. 3215–3233. doi:10.1256/qj.05.129
22. *Trémolet Y.* Incremental 4D-Var convergence study // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 2007. Vol. 59, iss. 5. P. 706–718. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.2007.00271.x>
23. *Trémolet Y.* Computation of observation sensitivity and observation impact in incremental variational data assimilation // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 2008. Vol. 60, iss. 5. P. 964–978. doi:10.1111/j.1600-0870.2008.00349.x
24. *Akella S., Navon I. M.* Different approaches to model error formulation in 4D-Var: a study with high-resolution advection schemes // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 2009. Vol. 61, iss. 1. P. 112–128. doi:10.1111/j.1600-0870.2007.00362.x
25. Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov / V. B. Zalesny [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, iss. 1. P. 95–112. doi:10.1515/rnam-2012-0006
26. Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Black Sea taking into account the tide-generating forces / V. I. Agoshkov [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2015. Vol. 30, iss. 3. P. 129–142. <https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0013>
27. *Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л. : Гидрометеиздат, 1987. 295 с.

28. An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data / V. I. Agoshkov [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2007. Vol. 22, iss. 2. P. 133–161. doi:10.1515/RJNAMM.2007.007
29. Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation / G. I. Marchuk [et al.] // Pure and Applied Geophysics. 2005. Vol. 162, iss. 8–9. P. 1407–1429. doi:10.1007/s00024-005-2677-8
30. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1989. 608 с.
31. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 657 с.
32. *Parmuzin E. I., Agoshkov V. I.* Numerical solution of the variational assimilation problem for sea surface temperature in the model of the Black Sea dynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, iss. 1. P. 69–94. doi:10.1515/rnam-2012-0005
33. High and Ultra-High resolution processing of satellite Sea Surface Temperature data over Southern European Seas in the framework of MyOcean project / B. Buongiorno Nardelli [et al.] // Remote Sensing of Environment. 2013. Vol. 129. P. 1–16. doi:10.1016/j.rse.2012.10.012
34. *Захарова Н. Б.* Проблемы обработки данных наблюдений в задачах математического моделирования морских сред // Прикладные аспекты геологии, геофизики и геоэкологии с использованием современных информационных технологий: Материалы IV Международной научно-практической конференции. Майкоп : Изд-во ИП Кучеренко В. О., 2017. С. 211–219.
35. *Захарова Н. Б.* Верификация данных наблюдений о температуре поверхности моря // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2016. Т. 13, № 3. С. 106–113. doi:10.21046/2070-7401-2016-13-3-106-113
36. Variational assimilation with covariance matrices of observation data errors for the model of the Baltic Sea dynamics / V. I. Agoshkov [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018. Vol. 33, iss. 3. P. 149–160. doi:10.1515/rnam-2018-0013

*Об авторах:*

**Агошков Валерий Иванович**, главный научный сотрудник, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), доктор физико-математических наук, профессор, **ResearcherID: Q-4041-2016**, agoshkov@inm.ras.ru

**Шутяев Виктор Петрович**, ученый секретарь, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), доктор физико-математических наук, профессор, **ResearcherID: D-7972-2014**, shutyayev@inm.ras.ru

**Пармузин Евгений Иванович**, старший научный сотрудник, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), кандидат физико-математических наук, доцент, **ResearcherID: R-5908-2016**, eparmuzin@gmail.com

**Захарова Наталья Борисовна**, старший научный сотрудник, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), кандидат физико-математических наук, **ResearcherID: G-6300-2014**, zakharova\_nb@inm.ras.ru

**Шелопут Татьяна Олеговна**, младший научный сотрудник, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), аспирант, **ResearcherID: K-1052-2016**, tanya\_chel@list.ru

**Лёзина Наталья Романовна**, младший научный сотрудник, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук (ИВМ РАН) (119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), аспирант, **ResearcherID: Q-3964-2016**, lezina@phystech.edu