

## Применение биспектрального вейвлет-анализа для поиска трехволновых взаимодействий в спектре внутренних волн

Г. В. Жегулин<sup>1, ✉</sup>, А. В. Зимин<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
✉ [gleb-jegulin@rambler.ru](mailto:gleb-jegulin@rambler.ru)

Поступила в редакцию 02.06.2020 г., после доработки – 01.10.2020 г.

**Цель.** Цель работы – апробация применения биспектрального вейвлет-анализа как инструмента для изучения резонансных взаимодействий между частотными составляющими спектра внутреннего волнения (на примере модельных сигналов, подобных по форме солитонам и борам, а также данных натуральных наблюдений за колебаниями температуры, вызванными внутренним волнением в Горле Белого моря).

**Методы и результаты.** В работе представлена методика обнаружения трехволновых взаимодействий в спектре внутреннего волнения. В основу метода положен биспектральный вейвлет-анализ. Он позволяет идентифицировать межгармоническую корреляцию и квадратичную связь по фазе, возникающую вследствие нелинейных взаимодействий между частотными компонентами сигнала. В первой части работы эффективность используемого метода оценивалась на примере различных искусственных сигналов с квадратичной нелинейностью для демонстрации особенностей и достоинств метода. Во второй части работы метод был применен с целью проанализировать полученные по данным зондирования термохалинной структуры профили температуры, в которых зафиксированы колебания, связанные с прохождением групп внутренних волн. Показано, что вследствие квадратичной нелинейности генерируются волны с периодом 40 мин. Значения функции автобикогерентности подтверждают, что высшие гармоники в диапазоне 60–120 мин образуются в результате трехволновых взаимодействий. Гармоники изменяются синхронно во времени, а их амплитуды пропорциональны, что характерно для начальной стадии нелинейной трансформации волн. Отсутствие периодического изменения знака бифазы в рассматриваемом диапазоне указывает на незначительное влияние дисперсионных эффектов на структуру короткопериодных внутренних волн.

**Выводы.** На примере наблюдений в Горле Белого моря показано, что зарегистрированная асимметричная структура колебаний изотерм формировалась под влиянием трехволнового взаимодействия. Обсуждается возможность дальнейшего применения метода для исследования процессов нелинейной трансформации и обрушения внутренних волн.

**Ключевые слова:** колебания температуры, внутренние волны, нелинейность, автобикогерентность, фазовая связь, асимметрия, трехволновое взаимодействие

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0128-2021-0014. Авторы выражают особую благодарность Джастину А. Шульте (<http://justinschulte.com/>) за разработанный алгоритм, основанный на современных статистических методах анализа нестационарных сигналов, и пакеты программного обеспечения, находящиеся в свободном сетевом доступе, что неоценимым образом помогло в создании этой работы.

**Для цитирования:** Жегулин Г. В., Зимин А. В. Применение биспектрального вейвлет-анализа для поиска трехволновых взаимодействий в спектре внутренних волн // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 2. С. 147–161. doi:10.22449/0233-7584-2021-2-147-161

© Жегулин Г. В., Зимин А. В., 2021

# Application of the Bispectral Wavelet Analysis for Searching Three-Wave Interactions in the Spectrum of Internal Waves

G. V. Zhegulin<sup>1, ✉</sup>, A. V. Zimin<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

✉ gleb-jegulin@rambler.ru

**Purpose.** The aim of the work is to test the bispectral wavelet analysis being applied as a tool for studying resonance interactions between the frequency components in the spectrum of internal waves (based on the example both of the model signals, the shape of which is similar to that of the solitons and boras, and the field observations data on temperature fluctuations resulted from the internal waves in the Gorlo Strait of the White Sea).

**Methods and Results.** The paper represents a technique for detecting three-wave interactions in the internal waves' spectrum. The method is based on the bispectral wavelet analysis. It permits to identify the interharmonic correlation and the magnitude of the quadratic phase relationship arising as a result of nonlinear interactions between the signal frequency components. In the first part of the paper, efficiency of the applied method was evaluated using the example of various artificial signals with quadratic nonlinearity in order to demonstrate the method features and advantages. In the second part, the method was used to analyze the temperature profiles obtained by scanning thermohaline sounding, in which the oscillations related to passing of the internal wave groups were recorded. It is shown that the waves with the 40 min period are generated due to quadratic nonlinearity. The auto-bicoherence function values confirm the fact that the higher harmonics are formed in the 60–120 min range as a result of the three-wave interactions. They change synchronously in time, and their amplitudes are proportional, that is typical of the initial stage of the waves' nonlinear transformation. Absence of a periodic change in the biphase sign in the considered range indicates insignificant influence of the dispersion effects upon the short-period internal waves' structure.

**Conclusions.** The example of observations in the Gorlo Strait of the White Sea shows that the recorded asymmetric structure of the isotherm oscillations was formed being influenced by the three-wave interaction. Possibility of further application of the method for studying the processes of the internal waves' nonlinear transformation and breaking is discussed.

**Keywords:** temperature fluctuations, internal waves, nonlinearity, auto-bicoherence, phase coupling, asymmetry, three-wave interaction

**Acknowledgments:** the work was carried out within the framework of the state task on theme No. 0128-2021-0014 “Wave processes, transport phenomena and biogeochemical cycles in the seas and oceans: a study of the forming mechanisms based on physical and mathematical modeling and field experimental work”. The authors are especially grateful to Justin A. Schulte (<http://justinschulte.com/>) both for the algorithm developed on the basis of modern statistical methods for analyzing unsteady signals, and for the software packages accessed free in the network, that significantly helped in preparing the paper.

**For citation:** Zhegulin, G.V. and Zimin, A.V., 2021. Application of the Bispectral Wavelet Analysis for Searching Three-Wave Interactions in the Spectrum of Internal Waves. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(2), pp. 135-148. doi:10.22449/1573-160X-2021-2-135-148

## Введение

Для анализа стационарных сигналов, как правило, достаточно методов классического спектрального анализа, таких как быстрое преобразование Фурье или кросс-спектральный анализ, при этом допускается предположение, что переменная распределена по закону Гаусса [1–3]. Оценка плотности мощности, получаемая с помощью спектральных методов, полезна при определении вклада каждой спектральной компоненты в общий спектр сигнала временного ряда. Однако традиционный анализ на основе спектров 2-го порядка,

полученных с помощью классического преобразования Фурье, неприменим для нестационарных сигналов с временными масштабами, значительно меньшими длины реализации исследуемого сигнала. При этом локальные изменения почти не вносят вклада в результирующий спектр. Например, сигналы, соответствующие нелинейным внутренним волнам (ВВ), таким как солитоны и боры, имеют асимметричную и пилообразную форму. Соответственно, подобные колебания описываются статистиками случайного процесса, отличными от гауссовских <sup>1</sup>. Наиболее очевидным методом изучения спектральных свойств таких процессов является вейвлет-анализ. Например, при использовании комплексных функций непрерывное вейвлет-преобразование позволяет изучать динамику таких характеристик, как мгновенные частоты, мгновенные амплитуды и мгновенные фазы ритмических процессов, идентифицируемых в структуре анализируемого сигнала.

Для анализа нелинейных ВВ можно использовать более сложные статистические характеристики сигналов, такие как спектры высших порядков (полиспектры) [4], получаемые с помощью преобразований Фурье кумулянтных функций <sup>2</sup>. При этом спектральные характеристики нечетных порядков, например спектр 3-го порядка (биспектр), являющийся преобразованием Фурье от кумулянтной функции 3-го порядка, могут быть полезными для уточнения параметров асимметрии исследуемого сигнала [5]. При изучении симметричных нелинейностей более мощным инструментом является спектр 4-го порядка (триспектр), так как он представляет собой разложение эксцесса по частоте [6]. Спектральный анализ на базе спектров высших порядков дает возможность количественно оценить нелинейности, охарактеризовать их типы и обнаружить взаимодействующие гармоники в пределах временного ряда, что особенно актуально для исследования характеристик реального внутреннего волнения.

Целесообразность использования полиспектров обоснована возможностью извлечь важную информацию о когерентных связях пар спектральных компонент в наблюдаемом процессе, которая теряется при оценке энергетического спектра.

Биспектральный вейвлет-анализ позволяет не только идентифицировать межгармоническую корреляцию, но и исследовать временную динамику фазовой связи между теми или иными компонентами в сложных нестационарных сигналах. Нормализованный биспектр (бикогерентность) характеризует фазовые соотношения (фазовую связь) между различными частотными составляющими сигнала [7]. Биспектр процесса с несимметричным законом распределения не равен нулю. Это позволяет использовать биспектральный анализ в качестве чувствительного индикатора нелинейных процессов.

Когда в сигнале присутствуют две гармоники с частотами  $f_1$  и  $f_2$  одновременно с их суммой  $f_3$ , а сумма фаз этих гармоник остается постоянной, можно говорить о фазовой связи. Такой набор частотных компонент называется

---

<sup>1</sup> Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М. : Сов. Радио, 1978. 376 с.

<sup>2</sup> Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований ; Бочков Г. Н., Горохов К. В. Полиспектральный анализ и синтез сигналов. Н. Новгород : НГУ им. Н. И. Лобачевского, 2007. 113 с.

биспектрально организованным триплетом. Соответственно, функция бикогерентности будет близка к единице, когда сигнал содержит частоты, удовлетворяющие соотношению

$$f_1 + f_2 = f_3. \quad (1)$$

Если соотношение (1) не выполняется, функция бикогерентности стремится к нулю [7, 8].

Применение биспектрального и триспектрального анализа (особенно на базе вейвлет-анализа) в гидрометеорологии существенно ограничено, в то время как спектральный анализ 2-го порядка с использованием частотно-временного или двухчастотного спектра довольно часто применяется для гидрометеорологических данных [9]. Применение бикогерентного вейвлет-анализа с целью обнаружения фазовых связей в структуре ветро-волнового взаимодействия рассматривается в работе [10]. Однако в исследовании не осуществлялась проверка на статистическую значимость. В работе Д. Шульте [11] последовательно и тщательно рассмотрены вопросы идентификации нелинейных взаимодействий в искусственно сгенерированном сигнале и квазидвухлетнем колебании зонального ветра в экваториальной стратосфере. В этой работе были также рассчитаны спектры локальной автобикогерентности и бифазы с оценками доверительных интервалов и уровней значимости. Нелинейные изменения в климатических процессах происходили многократно и оказали серьезное воздействие на экологические и экономические системы [12]. Однако подобный анализ не применялся ранее для исследования короткопериодных внутренних волн (КВВ).

Цель данной работы – апробация применения автобикогерентного вейвлет-анализа как инструмента для изучения нелинейных резонансных взаимодействий между частотными составляющими в спектре внутреннего волнения и идентификации фазовой связи между гармониками.

Эффективность используемого в работе метода на первом этапе оценивалась на данных модельного сигнала в среде с квадратичной нелинейностью, чтобы детально изучить свойства автобикогерентного вейвлет-преобразования и уточнить методику его применения к анализу нестационарных сигналов (см. также работы [11, 13]), а на втором этапе – на полученных в Горле Белого моря в августе 2012 г. результатах экспериментальных наблюдений за колебаниями изотерм вблизи пикноклина.

### Метод исследования

Подробно с используемым в настоящей работе методом и его фундаментальными основами можно ознакомиться в работах [7, 8, 11, 13], здесь приведем только ключевые понятия и важные иллюстрации.

По аналогии с фурье-биспектром вейвлетный взаимный автобиспектр имеет вид [8, 10, 11]

$$B_{xxx}^W(s_1, s_2) = \int_T W_x^*(s, t) W_x(s_1, t) W_x(s_2, t) dt,$$

где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s}; \quad (2)$$

$T$  – временной интервал;  $s$  – временной масштаб независимой гармонической составляющей, являющейся результатом фазовой связи между гармониками с масштабами  $s_1$  и  $s_2$ ;  $W_x(s, t)$  – вейвлет-преобразование временного ряда  $x$ , а звездочка в  $W_x^*(s, t)$  обозначает операцию комплексного сопряжения. Соответственно автобикогерентность определяется как нормализованный автобиспектр [7, 11]:

$$b_{xxx}^W(s_1, s_2) = \frac{|B_{xxx}^W(s_1, s_2)|^2}{\left(\int_T |W_x(s_1, t)W_x(s_2, t)|^2 dt\right)\left(\int_T |W_x(s, t)|^2 dt\right)},$$

где  $b_{xxx}^W(s_1, s_2)$  изменяется в пределах от 0 до 1.

На практике квадратичная нелинейность приводит к тому, что в результате взаимодействия двух гармоник процесса часть мощности выделяется на суммарных и(или) разностных частотах этих составляющих. Автобикогерентность на основе вейвлетов определяет величину нелинейной связи между гармониками, где пик на плоскости  $(s_1, s_2)$  указывает на статистическую зависимость между компонентами с масштабами  $s_1, s_2$  и  $s$  (2).

Автобиспектр позволяет ввести функцию, называемую бифазой, которая определяется как

$$\psi = tg^{-1}\left(\frac{\text{Im}(B_{xxx}^W(s_1, s_2))}{\text{Re}(B_{xxx}^W(s_1, s_2))}\right) = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3.$$

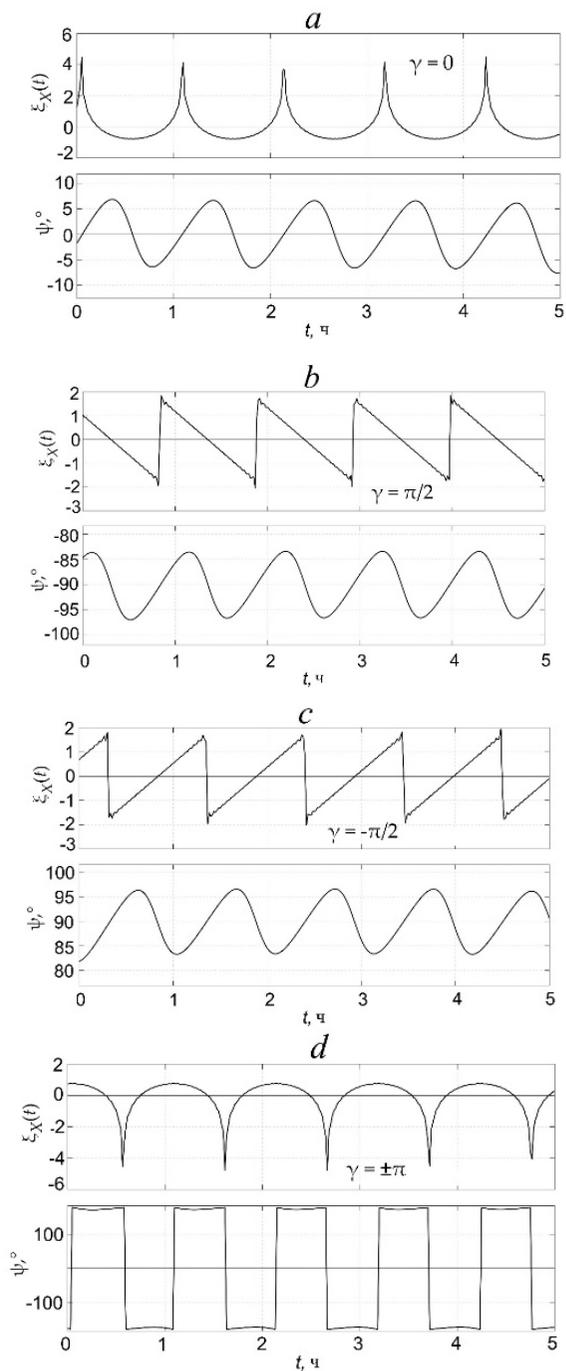
Бифаза характеризует изменение асимметрии сигнала. Значение  $\psi$ , равное нулю, указывает на положительную асимметрию, равное  $180^\circ$  – на отрицательную [13]. По факту если  $|\psi| > 90^\circ$ , то форма сигнала смещается в область отрицательных значений. В таком случае говорится, что сигнал имеет отрицательное искажение.

Для того чтобы продемонстрировать свойства бифазы аналогично тому, как это было сделано в работах [11, 13], рассмотрим временной сигнал, подобный проявлениям различных нелинейных КВВ, в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{j=1}^{40} \frac{1}{j} \cos[0,1jt + \gamma(j-1)], \quad \text{где } \gamma = 0; \pm \frac{\pi}{2}; \pm \pi; \\ \xi_X(t) = \frac{X(t) - \mu_X}{\sigma_X}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\mu_X$  – среднее арифметическое;  $\sigma_X$  – стандартное отклонение, а  $\xi_X(t)$  – нормализованное значение каждого элемента осредненного временного ряда  $X(t)$ . Преобразование осредненного временного ряда с его приведением к нулевому среднему и единичной дисперсии (нормализация) выполняется с целью получения единой числовой шкалы.

На рис. 1, *a* представлено колебание, визуально подобное проявлению группы нелинейных внутренних волн возвышений. Видно, что отклонения от среднего значения в положительном направлении вертикальной оси более резкие, но менее частые, чем в отрицательном направлении. В этом случае бифаза колеблется около  $0^\circ$ . На рис. 1, *d* представлен сигнал, подобный группе внутренних волн углублений, аналогичный представленным в работе [14]. В этом случае вид бифазы принципиально иной, чем на рис. 1, *a*: она близка к  $\pm 180^\circ$ .



**Р и с. 1.** Нормализованный временной ряд  $X(t)$  и его локальная бифаза  $\psi$  при различных значениях  $\gamma$  в выражении (3):  $\gamma = 0$  (a);  $\gamma = \pi/2$  (b);  $\gamma = -\pi/2$  (c);  $\gamma = \pm\pi$  (d). Бифаза была рассчитана для триплета с временными масштабами  $s_1 = 60$ ,  $s_2 = 30$  и  $s_3 = 20$  мин

**Fig. 1.** Normalized time series  $X(t)$  and its local biphase  $\psi$  for various values of  $\gamma$  in expression (3):  $\gamma = 0$  (a);  $\gamma = \pi/2$  (b);  $\gamma = -\pi/2$  (c);  $\gamma = \pm\pi$  (d). The biphase was calculated for a triplet with the time scales  $s_1 = 60$ ,  $s_2 = 30$  and  $s_3 = 20$  min

Бифаза для колебаний с различающимися передним и задним фронтами показана на рис. 1, *b* и *c*. Полностью асимметричный временной ряд при  $\gamma = \pm\pi/2$  в выражении (3) будет иметь бифазу  $90^\circ$  или  $-90^\circ$ .

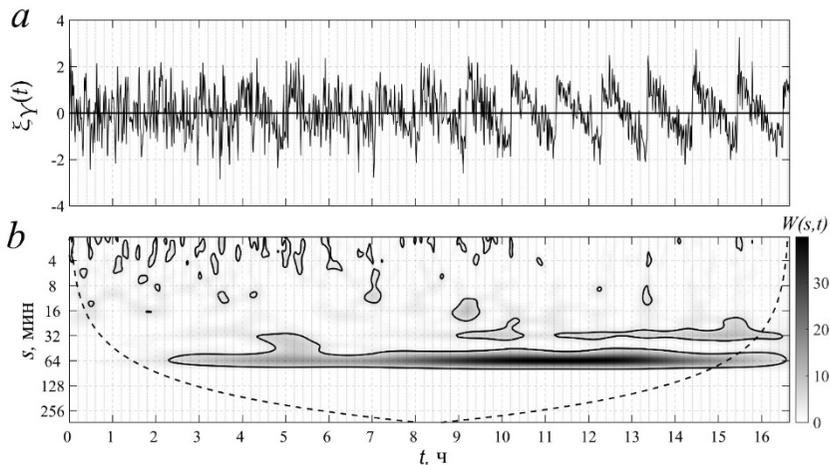
### Автобикогерентный вейвлет-анализ модельного сигнала

Чтобы изучить свойства автобикогерентного вейвлет-преобразования и уточнить методику его применения к анализу мультисоставных сигналов, например аналогично тому, как это было сделано в работах [11, 13], рассмотрим еще один модельный временной сигнал (подобный внутреннему бору) с добавлением белого гауссового шума  $\omega(t)$ :

$$\begin{cases} Y(t) = \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} \cos \left[ 0,1jt - \frac{3\pi}{2}(j-1) \right] + \omega(t), \\ \xi_Y(t) = \frac{Y(t) - \mu_Y}{\sigma_Y}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mu_Y$  – среднее;  $\sigma_Y$  – стандартное отклонение, а  $\xi_Y(t)$  – нормализованное значение каждого элемента осредненного временного ряда  $Y(t)$ .

Для анализа в качестве материнского вейвлета был выбран вейвлет Морле, который позволяет добиться лучшей частотной локализации и оценить значение частот многокомпонентного сигнала с меньшей ошибкой, по сравнению с другими базисными вейвлетами [7, 15].

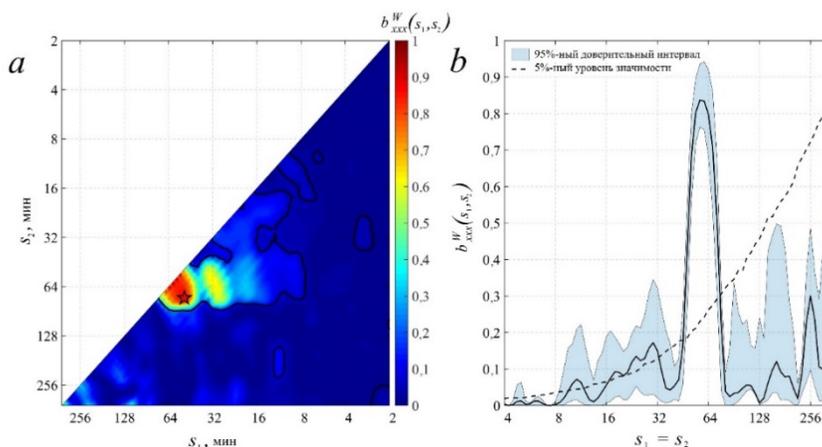


**Р и с. 2.** Результаты непрерывного вейвлет-преобразования нормализованного временного ряда (4) с добавлением белого шума (*a*) и локальный вейвлетный спектр (*b*). Штриховая линия отделяет область краевых эффектов, жирными линиями показан 5%-ный уровень значимости по отношению к красному шуму

**F i g. 2.** Results of a continuous wavelet transform of the normalized time series (4) with addition of white noise of different intensities (*a*), and the local wavelet spectrum (*b*). The dashed line separates the region of the edge effects, the bold lines show the 5%-significance level in relation to red noise

Нормализованная временная последовательность  $Y(t)$  и ее локальный вейвлетный спектр  $W(s, t)$  [14, 16] для случая вырожденного взаимодействия, когда выполняется условие  $f_1 = 2f_2$ , показаны на рис. 2. Этот процесс лишь формально является трехволновым, так как фактически в нем участвуют две волны, частоты которых различаются в два раза. Основная волна  $f_1$  лежит в большой области 5%-ной значимости при  $s_1 = 60$  мин на участке записи между 3 и 16 ч, а ее вторая гармоника  $f_2$  – в двух небольших областях значимости в этом же временном интервале. Отметим, что появление статистически значимых значений спектра при  $s = 30$  мин в диапазоне  $t = 9 \div 16$  ч сопровождается асимметрией (рис. 2, *a*). К оценке уровня значимости был применен метод Монте-Карло, как и в работах [11, 17].

Чтобы определить, являются ли колебания квадратично нелинейными, была рассчитана автобикогерентность (рис. 3, *a*). Из рис. 3, *a* видно, что область статистической значимости содержит локальный максимум автобикогерентности (отмечен красной звездочкой) на временных масштабах  $s_1 = 50$  мин и  $s_2 = 75$  мин и указывает на то, что колебания с периодами 50 и 75 мин связаны по фазе с колебанием периода  $s = 30$  мин. Изменчивость временных масштабов  $s$  частично связана со статистической зависимостью между тремя гармониками. В данном случае  $b_{xxx}^W(s_1, s_2) \approx 0,85$ , так что примерно 85 % изменчивости при  $s = 30$  мин обусловлено нелинейным взаимодействием между гармониками, временные масштабы которых можно определить по расположению максимума на плоскости  $(s_1, s_2)$ .



**Рис. 3.** Автобикогерентность модельного временного ряда (4) (*a*); диагональное сечение спектра автобикогерентности при  $s_1 = s_2$  (*b*). Жирные контуры охватывают области 5% -ной значимости по отношению к красному шуму. Диагональная линия разделяет спектр на две симметричные области. Уровень значимости, представленный штриховой линией, был рассчитан с использованием метода Монте-Карло. Доверительные интервалы определялись по методу начальной загрузки (бутстрэппинг) [11, 18]

**Fig. 3.** Auto-bicoherence of the model time series (4) (*a*); the diagonal cross section of the auto-bicoherence spectrum for  $s_1 = s_2$  (*b*). The bold lines contour the 5%-significance areas in relation to red noise. The diagonal line divides the spectrum into two symmetric regions. The significance level represented by the dashed line was calculated using the Monte Carlo method. The confidence intervals were determined by the boot method (bootstrapping) [11, 18]

На рис. 3, *b* показан результат применения процедуры начальной загрузки (бутстрэппинг – от англ. *bootstrapping*) [11, 18] к диагональному срезу  $s_1 = s_2 = s$  автобикогерентного спектра  $b_{xxx}^W(s_1 = s_2)$  для случая вырожденного трехволнового взаимодействия. Основной принцип бутстрэппинга: имитировать многократное получение выборки из генеральной совокупности методом Монте-Карло с использованием данных из имеющейся выборки. Краткий обзор и подробное описание метода можно найти в работах [11, 18–20]. Чтобы определить доверительные интервалы автобикогерентности, на каждом временном масштабе набор вейвлет-коэффициентов разделялся на перекрывающиеся сегменты (блоки) равной длины. Последующее объединение блоков приводит к синтетическому набору вейвлет-коэффициентов на каждом временном масштабе. Итерация процедуры 3000 раз приводит к распределению повторов начальной загрузки, из которых можно получить 95%-ный доверительный интервал. Подходящая длина блока определялась методом Монте-Карло [11, 17, 19] с целью найти наибольшее значение  $c$ , при котором длина блока  $L = N^c$ , где  $N$  – длина исходного ряда, давала бы самые широкие доверительные интервалы. Было установлено, что длина блока в диапазоне от  $N^{0,6}$  до  $N^{0,7}$  является оптимальной для оценки доверительных интервалов [11].

Из рис. 3, *b* видно, что ширина доверительных интервалов не зависит от временного масштаба. Доверительный интервал 95 %, соответствующий максимуму автобикогерентности с временными масштабами  $s_1 = s_2 = 60$  мин, не пересекает 5%-ную границу значимости, и, следовательно, этот пик значим. Все остальные пики были признаны незначительными.

Периодический обмен энергией между гармониками может существенно влиять на эволюцию бифазы, поэтому, чтобы проследить за временной изменчивостью интенсивности трехволновых взаимодействий, вычисляется локальная автобикогерентность [11]:

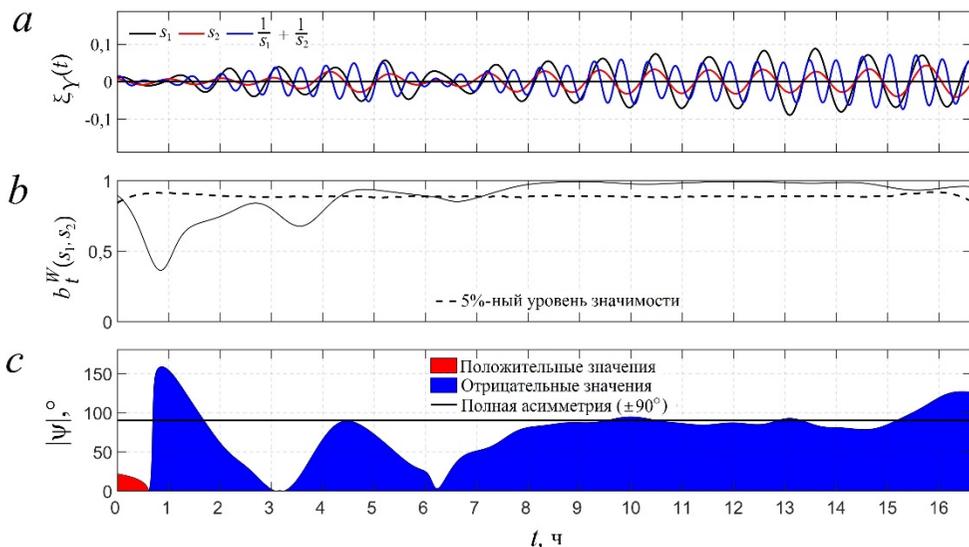
$$b_t^W(s_1, s_2) = \frac{|S(s_1^{-1} B_t^W(s_1, s_2))|^2}{S(s_1^{-1} |W_t^x(s_1) W_t^x(s_2)|^2) \cdot S(s^{-1} |W_t^x(s)|^2)}$$

где  $S$  – оператор сглаживания для вейвлета Морле [11, 16].

Локальный спектр автобикогерентности сигнала (4) с гауссовым шумом для биспектрально организованного триплета ( $s_1 = 50$  мин,  $s_2 = 75$  мин,  $s = 30$  мин) показан на рис. 4, *b*.

Из рис. 4 видно, что после 7 ч квадратичная нелинейность сильная: она приводит к образованию протяженной во времени области значимой локальной автобикогерентности. Отмечен взаимный рост 1-й и 2-й гармоник, резонансное взаимодействие которых с 3-й приводит к асимметричной структуре сигнала. Бифаза на этом участке становится резко отрицательной, стабильной, что говорит о постоянной фазовой зависимости между гармониками. Область статистически значимого участка автобикогерентности, превышающей 0,8 (см. рис. 3, *a*), охватывает множество резонансных триплетов из диапазона 40–70 мин. При этом бифаза инвариантна для всех наборов пар гармоник. Близость бифазы к  $-90^\circ$  указывает на полную асимметрию сигнала – пилообразную форму с резким передним фронтом (см. рис. 1, *b*). Высокие, статистически значимые оценки автобикогерентности (свыше 0,8) свидетельствуют о том,

что в течение некоторого промежутка времени 1-я и 2-я гармоники являются связанными.

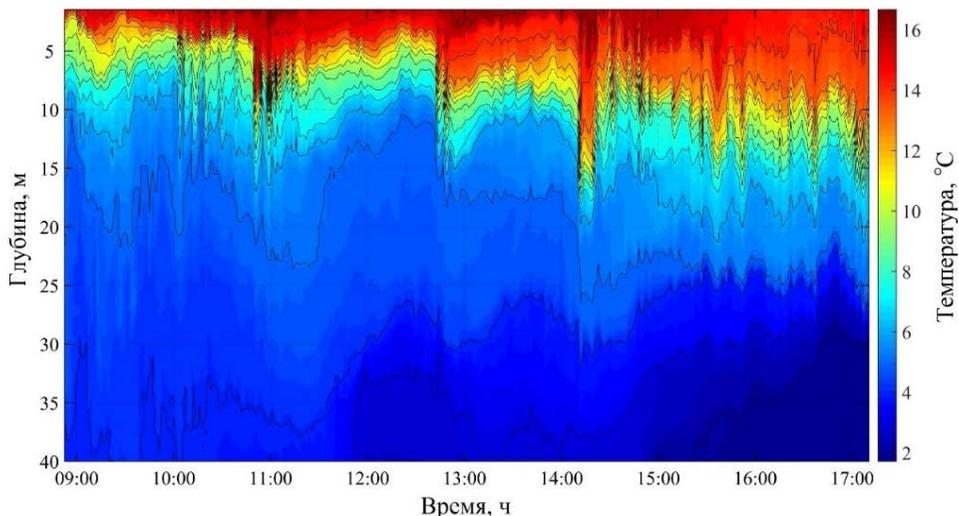


**Рис. 4.** Гармоники резонансного триплета (50, 75, 30 мин) (a), локальная автобикогерентность (b) и локальная бифаза (c) автобикогерентного спектра (см. рис. 3, a) с временными масштабами 50 и 75 мин. Колебания бифазы, отличающиеся от  $0^\circ$ , указывают на то, что нелинейное взаимодействие привело к форме сигнала с асимметрией

**Fig. 4.** Harmonics of the resonance bispectral triplet (50, 75, 30 min) (a), local auto-biherence (b) and local biphase (c) of the auto-bicoherence spectrum (Fig. 3, a) at the time scales 50 and 75 min. The biphase oscillations differing from  $0^\circ$  indicate the fact that the nonlinear interaction led to a waveform with asymmetry

### Анализ колебаний температуры в Горле Белого моря

Данные сканирующих измерений в океанологии можно рассматривать как двумерную картину изменения гидрофизических полей по вертикали с течением времени, которая дает наглядное представление об изменчивости процессов. На рис. 5 показаны резкие короткопериодные колебания температуры в области термоклина, которые в работе [21] были идентифицированы как пакеты интенсивных КВВ, обладающие признаками нелинейности. В примере рассмотрены наблюдения за ВВ, которые проводились с заякоренного судна *CTD*-зондом в режиме непрерывного сканирования от поверхности до дна с дискретностью 1–2 мин при глубине места около 50 м. Длительность наблюдения каждого из пакетов интенсивных ВВ колебалась от 40 до 120 мин. Пакеты двигались в одном направлении на юго-запад, что было показано по данным синхронных с контактными спутниковых наблюдений, результаты которых представлены в работе [22]. При этом глубина залегания и объемы теплых и холодных вод в плоскости разреза испытывали значительные колебания и на других периодах. На этих натуральных данных, методика получения и результаты обработки которых подробно описаны и проанализированы в работе [21], и проводилась апробация метода.

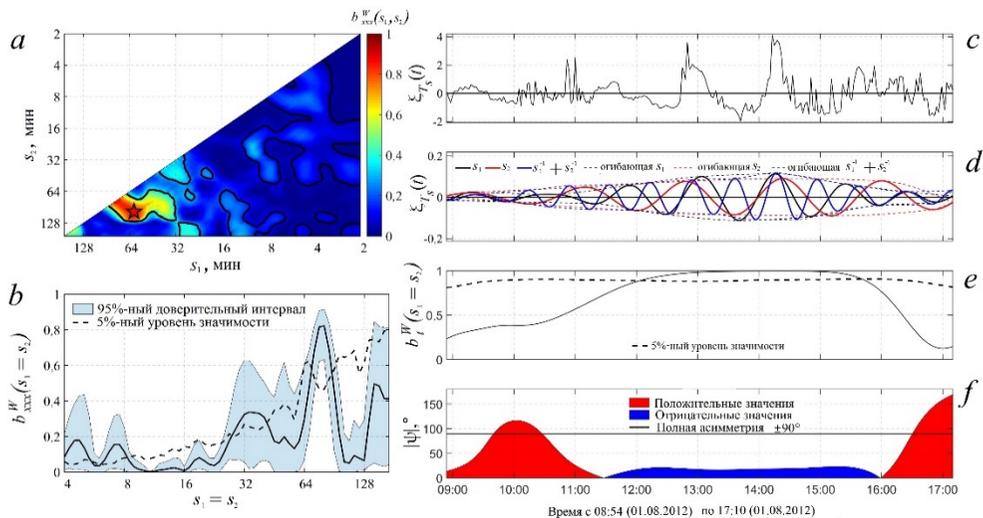


**Р и с. 5.** Временные серии температуры на глубинах 1,5–40 м в Горле Белого моря, взятые с дискретностью по времени 1 мин, а по глубине 0,5 м в период с 08:54 по 17:10 (01.08.2012)  
**F i g. 5.** Time series of temperature at the depths 1.5–40 m in the White Sea Throat taken with the time interval 1 min, and at the depth 0.5 m – in the period from 08:54 to 17:10 (01.08.2012)

Предварительный анализ вариаций температуры проводился с использованием фильтра Савицкого – Голея с окном 180 мин с целью исключить влияние длиннопериодных колебаний. Затем выполнялась нормализация числовых рядов.

Для поиска нелинейных резонансных взаимодействий в спектре ВВ вычислялась автобикогерентность для каждого горизонта. Была выявлена область с повышенными значениями автобикогерентности (более 0,8) в слое скачка на глубинах 5–20 м. Например, значение автобикогерентности на глубине 10 м с временными масштабами  $s_1 = s_2 = 80$  мин (рис. 6, *a*) указывает на статистически значимую нелинейную взаимосвязь по типу вырожденного трехволнового взаимодействия. Область доверительных интервалов (рис. 6, *b*) не пересекается с 5%-ной границей статистической значимости вблизи масштаба 80 мин. Поэтому с уверенностью можно говорить о генерации второй гармоники с периодом 40 мин.

Локальный спектр автобикогерентности пульсаций температуры с временными масштабами  $s_1 = 60$  мин и  $s_2 = 100$  мин (рис. 6, *e*) показывает, когда взаимодействие имеет место, например в период с 12:00 по 15:45. Асимметричные искажения структуры сигнала (рис. 6, *c*) на этом участке времени есть результат установившегося резонансного взаимодействия между гармониками 60, 100 и 40 мин. Но стоит обратить внимание, что область значимого участка автобикогерентности, превышающей 0,8 (рис. 6, *a*), охватывает множество наборов пар гармоник из диапазона 60–120 мин, участвующих в трехволновых взаимодействиях.



**Р и с. 6.** Автобикогерентный вейвлет-анализ колебаний температуры на глубине 10 м: *a* – автобикогерентность; *b* – диагональное сечение спектра автобикогерентности; *c* – нормализованные пульсации температуры; *d* – гармоники резонансного триплета (60, 100, 40 мин); *e* – локальный автобикогерентный спектр; *f* – локальный бифазный спектр

**F i g. 6.** Auto-bicoherent wavelet analysis of temperature fluctuations at the depth 10 m: *a* – auto-bicoherence; *b* – diagonal section of the auto-bicoherence spectrum; *c* – normalized temperature pulsations; *d* – harmonics of the resonance triplet (60, 100, 40 min); *e* – local auto-bicoherent spectrum; *f* – local biphased spectrum

На рис. 6, *f* показана эволюция бифазы, соответствующей локальному пику автобикогерентности с временными масштабами  $s_1 = 60$  мин и  $s_2 = 100$  мин. От 9:00 до 12:00 на графике 6, *f* наблюдается нестабильная фазовая зависимость между компонентами резонансного триплета. Такое отсутствие фазовой когерентности согласуется с низким уровнем автобикогерентности (рис. 6, *e*) на этом участке, то есть здесь нет трехволнового взаимодействия. Напротив, с 12:00 до 15:45 бифаза стабильна и лежит в пределах от  $-20$  до  $-25^\circ$ . Можно заключить, что здесь ассиметричная структура колебаний была обусловлена результатом нелинейного взаимодействия между гармониками.

Количественная оценка бифазы для слоя скачка (8–18 м) в период с 12:00 до 15:45, как и локальная автобикогерентность для других триплетов из диапазона 60–120 мин, стабильна. В этом слое отмечаются максимальные значения автобикогерентности, а около 80 % значений бифазы для триплета (60, 100, 40 мин) лежит в пределах от 0 до  $-25^\circ$ . При трехволновом взаимодействии происходит обмен энергией между волнами, из-за которого амплитуды периодически изменяются, как показано, например, в работе [23]. В приведенном примере бифаза сохраняется, огибающие гармоник синхронно изменяются со временем и их амплитуды пропорциональны (рис. 6, *d, e*), соответственно, согласно выводам работы [24], периодический обмен энергией в нашем случае не наблюдается. Отсутствие периодического изменения знака бифазы в рассматриваемом диапазоне указывает на слабое влияние дисперсионных эффектов на структуру КВВ, это подтверждается также оценками дисперсионного

соотношения для внутренних волн, выполненными по данным гидрологических наблюдений в работе [25].

Кроме того, в рассматриваемом примере натуральных данных при отрицательных значениях бифазы режим полной асимметрии сигнала, как, например, на рис. 1, *b*, не наблюдается. Поэтому ВВ, скорее всего, несмотря на нелинейный характер, не находились в стадии локальной неустойчивости или обрушения и могли распространяться достаточно далеко. Косвенным подтверждением этого служат результаты работы [26], в которой показано, что пакеты ВВ, возникая регулярно (каждый приливной цикл) в южной части Горла, движутся через все море в юго-западном направлении, трансформируясь при распространении, и окончательно разрушаются только через 200 км в мелководной зоне севернее Соловецкого архипелага.

Проявления процессов нелинейной трансформации и обрушения рассматривались в работах [24, 27], в которых изучалось влияние обрушения волн на пространственную изменчивость бифазы применительно к поверхностным волнам в береговой зоне. Согласно работам [28, 29], поверхностные волны вблизи берега перед обрушением становятся пилообразными и бифаза в них близка к  $-\pi/2$ . Примером ВВ на стадии обрушения может служить модельный сигнал с гауссовым шумом (см. рис. 2, *a*), где, начиная с 9 ч, бифаза становится близкой к  $-\pi/2$ , а сигнал приобретает пилообразную форму (см. рис. 4, *c*). Однако оценка процессов локальной неустойчивости и обрушения ВВ на основе автобикогерентного вейвлет-анализа в литературе не описана, поэтому представляется целесообразным продолжить в дальнейшем рассмотрение этого вопроса, важного для автоматизированной обработки данных о колебании термомоклина.

### Заключение

В настоящей работе описано применение методики, основанной на биспектральном вейвлет-анализе, позволяющей детектировать нелинейное взаимодействие, к изучению характеристик внутреннего волнения.

На примерах (модельном и натурном) показана возможность применения статистики высших порядков, основанной на вейвлет-анализе, для изучения процессов нелинейной трансформации внутренних волн.

Автобикогерентный вейвлет-анализ впервые применили, чтобы обнаружить нелинейные взаимодействия внутренних волн, наблюдаемые во временных рядах температуры в Горле Белого моря.

Анализ колебаний температуры позволил установить взаимосвязь между гармониками в определенном промежутке времени. Показано, что взаимосвязь между частотными компонентами сопровождалась асимметричным искажением сигналов.

Высокие статистически значимые значения автобикогерентности (более 0,9) свидетельствуют о том, что гармоники в диапазоне 60–120 мин являются волнами, связанными благодаря трехволновым взаимодействиям. Значение бифазы в период интенсификации трехволнового взаимодействия лежало преимущественно в пределах от  $-20$  до  $-25^\circ$ . Отсутствие периодического изменения

знака бифазы подтверждает незначительное влияние дисперсионных эффектов, наблюдаемых в южной части Горла Белого моря, на структуру сигнала КВВ.

Резюмируя результаты работы, следует отметить, что широкое применение методов полиспектрального анализа позволит существенно расширить понимание гидрофизических процессов, связанных с внутренним волнением в океане.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дженкинс Г., Ватмс Д.* Спектральный анализ и его приложения. М. : Мир, 1971. Т. 1. 316 с.
2. *Дженкинс Г., Ватмс Д.* Спектральный анализ и его приложения. М. : Мир, 1972. Т. 2. 287 с.
3. *King T.* Quantifying nonlinearity and geometry in time series of climate // *Quaternary Science Reviews*. 1996. Vol. 15, iss. 4. P. 247–266. [https://doi.org/10.1016/0277-3791\(95\)00060-7](https://doi.org/10.1016/0277-3791(95)00060-7)
4. *Новиков А. К.* Полиспектральный анализ. СПб. : ЦНИИ им. акад. И. А. Крылова, 2002. 178 с.
5. Биспектральный анализ в задачах цифровой обработки сигналов / А. А. Зеленский [и др.] // *Физические основы приборостроения*. 2013. Т. 2, № 3. С. 4–39.
6. *Collis W. B., White P. R., Hammond J. K.* Higher-order spectra: the bispectrum and trispectrum // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 1998. Vol. 12, iss. 3. P. 375–394. <https://doi.org/10.1006/mssp.1997.0145>
7. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М. : Физматлит, 2003. 170 с.
8. Wavelet Bicoherence: A New Turbulence Analysis Tool / B. Ph. van Milligen [et al.] // *Physics of Plasmas*. 1995. Vol. 2, iss. 8. P. 3017–3032. <https://doi.org/10.1063/1.871199>
9. *Рожков В. А.* Методы вероятностного анализа океанологических процессов. Л. : Гидрометеиздат, 1979. 280 с.
10. *Elsayed M. A. K.* Wavelet bicoherence analysis of wind–wave interaction // *Ocean Engineering*. 2006. Vol. 33, iss. 3–4. P. 458–470. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.04.013>
11. *Schulte J. A.* Wavelet analysis for non-stationary, nonlinear time series // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2016. Vol. 23, iss. 4. P. 257–267. <https://doi.org/10.5194/npg-23-257-2016>
12. Abrupt Climate Change / R. B. Alley [et al.] // *Science*. 2003. Vol. 299, iss. 5615. P. 2005–2010. doi:10.1126/science.1081056
13. *MacCarone T. J.* The biphasic explained: understanding the asymmetries in coupled Fourier components of astronomical time series // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. Vol. 435, iss. 4. P. 3547–3558. <https://doi.org/10.1093/mnras/stt1546>
14. *Серебряный А. Н., Пао К. П.* Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // *Доклады Академии наук*. 2008. Т. 420, № 4. С. 543–547.
15. *Torrence C., Compo G. P.* A practical guide to wavelet analysis // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 1998. Vol. 79, iss. 1. P. 61–78. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2)
16. *Жегулин Г. В.* Использование вейвлет-анализа для оценки связи гидрологических и гидрооптических колебаний в диапазоне внутренних волн по данным натурных наблюдений в Белом море // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 3. С. 48–56.
17. *Grinsted A., Moore J. C., Jevrejeva S.* Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2004. Vol. 11, iss. 5/6. P. 561–566. <https://doi.org/10.5194/npg-11-561-2004>
18. *Kunsch H. R.* The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations // *The Annals of Statistics*. 1989. Vol. 17, no. 3. P. 1217–1241. doi:10.1214/aos/1176347265

19. *Schulte J. A., Najjar R. G., Lee S.* Salinity and streamflow variability in the Mid-Atlantic region of the United States and its Relationship With Large-Scale Atmospheric Circulation Patterns // *Journal of Hydrology*. 2017. Vol. 550. P. 65–79. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.03.064>
20. *Schulte J. A.* Higher-order Wavelet Analysis. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/54671-higher-order-wavelet-analysis> (date of access: 29.12.2019).
21. *Зимин А. В.* Субприливные процессы и явления в Белом море. М. : ГЕОС, 2018. 220 с.
22. Короткопериодные внутренние волны в Белом море: оперативный подспутниковый эксперимент летом 2012 г. / А. В. Зимин [и др.] // *Исследование Земли из космоса*. 2014. № 3. С. 41–55. doi:10.7868/S0205961414030087
23. *Филлипс О. М.* Взаимодействие волн // *Нелинейные волны* / Ред. С. Лейбович, А. Сибасс. М. : Мир, 1977. С. 197–220.
24. *Сапрыкина Я. В., Штремель М. Н., Кузнецов С. Ю.* О возможности параметризации бифазы при трансформации волн в береговой зоне моря // *Океанология*. 2017. Т. 57, № 2. С. 284–296. doi:10.7868/S0030157416060137
25. *Жегулин Г. В., Зимин А. В., Родионов А. А.* Анализ дисперсионных зависимостей и вертикальной структуры внутренних волн в Белом море по экспериментальным данным // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 4. С. 47–59.
26. SAR observing large-scale nonlinear internal waves in the White Sea / I. Kozlov [et al.] // *Remote Sensing of Environment*. 2014. Vol. 147. P. 99–107. doi:10.1016/j.rse.2014.02.017
27. *Сапрыкина Я. В., Кузнецов С. Ю., Дивинский Б. В.* Влияние процессов нелинейной трансформации волн в береговой зоне моря на высоту обрушающихся волн // *Океанология*. 2017. Т. 57, № 3. С. 425–436. doi:10.7868/S0030157417020186
28. *Elgar S., Guza R. T.* Observation of bispectra of shoaling surface gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1985. Vol. 161. P. 425–448. doi:10.1017/S0022112085003007
29. *Elgar S., Guza R. T.* Nonlinear model predictions of bispectra of shoaling surface gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1986. Vol. 167. P. 1–18. doi:10.1017/S0022112086002690

*Об авторах:*

**Жегулин Глеб Викторович**, младший научный сотрудник, Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36), **Scopus Author ID: 57195070290**, [gleb-jegulin@rambler.ru](mailto:gleb-jegulin@rambler.ru)

**Зимин Алексей Вадимович**, главный научный сотрудник, Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36), профессор Санкт-Петербургского государственного университета (199034, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9), **WoS ResearcherID: C-5885-2014**, **Scopus Author ID: 55032301400**, [zimin2@mail.ru](mailto:zimin2@mail.ru)