


Дискретное уравнение для доступной потенциальной энергии как точное следствие конечно-разностных уравнений модели динамики моря

С. Г. Демьшев 

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

 demyshev@gmail.com

Поступила в редакцию 01.02.2022; одобрена после рецензирования 28.02. 2022;
принята к публикации 15.03.2022

Аннотация

Цель. Получено дискретное уравнение скорости изменения доступной потенциальной энергии в точном соответствии с конечно-разностной постановкой, что обеспечивает адекватное воспроизведение дискретной энергетики. Проведен анализ его слагаемых на основе результатов численного эксперимента с реалистичными атмосферными условиями.

Методы и результаты. На основе известных методов вычислительной математики (метод неопределенных коэффициентов, имитационное моделирование) получено конечно-разностное уравнение для доступной потенциальной энергии, которое соответствует его дифференциальному виду. В структуре уравнения появилось дополнительное слагаемое, обусловленное переходом к дискретной задаче, имеющее диффузионный вид. Анализ энергетики для гидрологической зимы 2011 г. в Черном море показал, что в верхнем слое наибольшие значения доступной потенциальной энергии наблюдаются в центральной области моря. Ниже горизонта 100 м доступная потенциальная энергия увеличивается по направлению к берегу, где наблюдается интенсивная мезомасштабная изменчивость. На глубине более 200 м наибольший запас этой энергии сосредоточен в Севастопольском и Батумском антициклонах. Работа основных сил (плавуности, адвекции и горизонтальной диффузии) имеет место в прибрежных областях моря.

Выводы. Полученное разностное уравнение скорости изменения доступной потенциальной энергии в точности соответствует дискретной постановке и поэтому адекватно отражает энергетику разностной задачи. На основе анализа уравнения показано, что на скорость изменения доступной потенциальной энергии в зимний период преобладающим образом влияет вихревая активность на свале глубин.

Ключевые слова: численное моделирование, доступная потенциальная энергия, потенциальная энергия, Черное море, циклоническая циркуляция, антициклонические вихри, дискретные уравнения, разностное уравнение

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГБУН ФИЦ МГИ по теме № 0555-2021-0004 «Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования».

Для цитирования: Демьшев С. Г. Дискретное уравнение для доступной потенциальной энергии как точное следствие конечно-разностных уравнений модели динамики моря // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т. 38, № 3. С. 239–255. doi:10.22449/0233-7584-2022-3-239-255

Discrete Equation for the Available Potential Energy as an Exact Consequence of the Numerical Model Equations

S. G. Demyshev ✉

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
✉ demyshev@gmail.com

Abstract

Purpose. The work is aimed at obtaining a discrete equation for the rate of the available potential energy change in strict accordance with the finite-difference formulation that ensures adequate reproduction of discrete energy, and at analyzing its terms based on the results of a numerical experiment with realistic atmospheric forcing.

Methods and Results. On the basis of the well-known methods of computational mathematics (method of indeterminate coefficients and imitation modeling), obtained was a finite-difference equation for the available potential energy which corresponded to its differential form. In the equation structure, an additional term which was conditioned by transition to a discrete problem and had a diffusion form appeared. Energy of the hydrological winter, 2011, in the Black Sea, having been analyzed, has shown that the available potential energy highest values in the upper layer took place in the central region of the sea. Below 100 m, the available potential energy increased towards the coast where intense mesoscale variability was observed. At the depths exceeding 200 meters, the available potential energy largest stock was concentrated in the Sevastopol and Batumi anticyclones. Action of the main forces, namely the forces of buoyancy, advection and horizontal diffusion, takes place in the coastal areas of the sea.

Conclusions. The resulting difference equation for the rate of the available potential energy change exactly corresponds to the discrete formulation and, therefore, accurately reflects the energy of the discrete problem. Analysis of the equation permitted to show that in winter, the rate of the available potential energy change is influenced predominantly by eddy activity at the depth slope.

Keywords: numerical simulation, available potential energy, potential energy, Black Sea, cyclonic circulation, anticyclonic eddies, discrete energy equation, difference equation

Acknowledgments: the investigation was carried out within the framework of the state assignment of FRC MHI on theme No. 0555-2021-0004 “Fundamental studies of oceanological processes determining state and evolution of marine environment under the influence of natural and anthropogenic factors, based on the observation and modeling methods”.

For citation: Demyshev, S.G., 2022. Discrete Equation for the Available Potential Energy as an Exact Consequence of the Numerical Model Equations. *Physical Oceanography*, 29(3), pp. 221-236. doi:10.22449/1573-160X-2022-3-221-236

Введение

В настоящее время все большее внимание уделяется анализу энергетики численных экспериментов по моделированию циркуляции в морях и океанах, поскольку он позволяет непосредственно оценить роль основных сил в процессах изменчивости циркуляции. Оценка баланса вихревой и средней энергии помогает понять, как взаимодействуют движения различных масштабов и какие силы являются определяющими в этом процессе.

В работе [1] рассчитываются компоненты бюджета кинетической энергии в моделях Мирового океана в зависимости от горизонтального разрешения и горизонтальной вязкости. При расчете энергетики прямые и обратные каскады энергии точнее описываются в модели, воспроизводящей структуры с размерами, меньшими бароклинного радиуса деформации Россби. На осно-

ве оценки сезонной изменчивости вихревой кинетической энергии в работе [2] анализируется мезомасштабная изменчивость поля скорости. Энергетический анализ течений в полужамкнутых морях позволяет изучать динамику течения Курошио [3], исследовать эволюцию вихревой активности в Красном море [4]. В работе [5] на основе вихреразрешающей модели анализируются причины и эволюция мезомасштабной изменчивости циркуляции Охотского моря. Для этого рассчитывается и анализируется бюджет кинетической энергии. Показано, что генерация мезомасштабных особенностей вдольбереговой циркуляции обусловлена главным образом бароклинной неустойчивостью.

В классической работе Э. Лоренца [6] вводится понятие доступной потенциальной энергии (ДПЭ) как части потенциальной энергии, которая может переходить в кинетическую и обратно. Сумма кинетической и ДПЭ – новый инвариант, который сохраняется при отсутствии внешних источников, трения и диффузии. Введя понятия средней по времени энергии и вихревой энергии как отклонения от средней [7, 8], можно построить энергетический цикл, который позволяет оценить процессы взаимодействия между средними и вихревыми движениями в морях и океанах. Традиционным методом аппроксимации уравнений для скорости изменения кинетической и ДПЭ является дискретизация дифференциальных энергетических уравнений. В этом случае, строго говоря, конечно-разностные уравнения энергетики не соответствуют дискретным уравнениям модели, что может приводить к неточным количественным оценкам. Более корректным подходом должен быть вывод энергетических уравнений из разностных уравнений задачи.

В работе [9] конечно-разностные уравнения для скорости изменения кинетической и потенциальной энергии были получены из исходной дискретной постановки и на их основе исследовались энергоактивные области климатической циркуляции Черного моря. Настоящая работа является продолжением этих исследований и посвящена выводу и анализу уравнения для ДПЭ как точного следствия дискретных уравнений модели. На примере зимнего периода 2011 г. рассчитываются энергетические слагаемые уравнения для ДПЭ и проводится анализ их структуры.

Уравнения модели и краевые условия

Уравнения модели динамики Черного моря в приближении Буссинеска, гидростатики и несжимаемости морской воды имеют вид [9]

$$u_t - (\xi + f)v + wu_z = -g\zeta_x - \frac{1}{\rho_0}(P' + E)_x + (vVu_z)_z - v_H \nabla^4 u, \quad (1)$$

$$v_t + (\xi + f)u + wv_z = -g\zeta_y - \frac{1}{\rho_0}(P' + E)_y + (vVv_z)_z - v_H \nabla^4 v, \quad (2)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (3)$$

$$P = g\rho_0\zeta + g \int_0^z \rho d\mu = g\rho_0\zeta + P', \quad (4)$$

$$T_t + (uT)_x + (vT)_y + (wT)_z = -\kappa^H \nabla^4 T + (\kappa^V T_z)_z, \quad (5)$$

$$S_t + (uS)_x + (vS)_y + (wS)_z = -\kappa^H \nabla^4 S + (\kappa^V S_z)_z, \quad (6)$$

$$\rho = \rho(T, S). \quad (7)$$

Обозначения в соотношениях (1)–(7) общепринятые [9]. Вид функции ρ в выражении (7) будет уточнен позднее.

При $z = 0$

$$v_v u_z = -\tau^x, \quad v_v v_z = -\tau^y, \quad w = -\zeta_t, \quad \kappa^V T_z = Q^T, \quad \kappa^V S_z = (Pr - Ev)S_0, \quad (8)$$

при $z = H(x, y)$

$$u = v = w = 0, \quad T_z = S_z = 0. \quad (9)$$

На твердых боковых стенках для меридиональных участков границы

$$u = \nabla^2 u = v_x = \nabla^2 v_x = 0, \quad T_x = S_x = 0, \quad (10.1)$$

для зональных –

$$v = \nabla^2 v = v_y = \nabla^2 v_y = 0, \quad T_y = S_y = 0. \quad (10.2)$$

На участках границы, где втекают реки и нижнебосфорское течение, поставим следующие условия:

для меридиональных участков

$$u = \nabla^2 u = v_y = \nabla^2 v_x = 0, \quad T = T^P, \quad S = S^P. \quad (11.1)$$

для зональных –

$$v = \nabla^2 v = u_y = \nabla^2 u_y = 0, \quad T = T^P, \quad S = S^P. \quad (11.2)$$

Для верхнебосфорского течения выполняются условия (10).

В соотношениях (8)–(11) использованы следующие обозначения: (τ^x, τ^y) – касательное напряжение трения ветра; $Q^T(x, y, t)$ – поток тепла; S_0 – соленость на поверхности моря, полученная в модели; $Pr(x, y, t)$ – осадки; $Ev(x, y, t)$ – испарение на поверхности моря; (T^P, S^P) – заданные по результатам наблюдений температура и соленость в устьях рек и в нижнебосфорском течении.

Уравнения (1)–(7) дополняются в соответствии с параметризацией Меллора – Ямады 2.5 [10] уравнениями для кинетической энергии турбулентности и макромасштаба турбулентности с соответствующими краевыми и начальными условиями.

Начальные условия для задачи (1)–(11) принимались в следующем виде [11]:

при $t = t_0$

$$(T, S) = (T^0, S^0), \quad u = u^0, \quad v = v^0, \quad \zeta = \zeta^0. \quad (12)$$

1. Вывод разностного уравнения скорости изменения ДПЭ

Рассмотрим задачу при отсутствии внешних сил и диффузии (в адиабатическом приближении).

Полагаем, что

$$\rho(x, y, z, t) = \rho^*(x, y, z, t) + \rho^s(z),$$

где

$$\rho^s(z) = \frac{1}{T} \int \left(\frac{1}{\Omega} \iint_S \rho(x, y, z, t) d\Omega \right) dt, \quad d\Omega = dx dy, \quad (13)$$

где Ω – область интегрирования на уровне z ; T – время интегрирования (в нашем случае равно одному году).

Введем обозначения:

$$A^{pe} = a^{pe} \left(\rho_z^s \right)^{-1}, \quad \text{где} \quad a^{pe} = g \frac{\left(\rho^* \right)^2}{2}.$$

Уравнение для плотности имеет вид

$$\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y + (w\rho)_z = 0. \quad (14)$$

Подставляя разложение (13) в выражение (14) получаем

$$\rho_t^* + u\rho_x^* + v\rho_y^* + w\rho_z^* + w\rho_z^s + \rho^*(u_x + v_y + w_z) = 0. \quad (15)$$

Преобразуя выражение (15), получаем уравнение для ДПЭ

$$A_t^{pe} + \left[(ua^{pe})_x + (va^{pe})_y + (wa^{pe})_z \right] \left(\rho_z^s \right)^{-1} + g\rho^* w + a^{pe} (u_x + v_y + w_z) \left(\rho_z^s \right)^{-1} = 0. \quad (16)$$

В дифференциальном виде в силу выполнения уравнения неразрывности последние слагаемые в уравнениях (15), (16) равны нулю. В разностной постановке это может быть не так вследствие несоответствия аппроксимации ρ_z^s как множителя для горизонтальной и вертикальной адвекции.

Введем следующие обозначения (для j, k – аналогично) для φ – произвольной сеточной функции, определенной в точках i, j, k (рис. 1):

$$z_{k+1/2} = \frac{z_{k+1} + z_k}{2}, \quad h_z^{k+1/2} = z_{k+1} - z_k, \quad h_z^k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2},$$

$$\delta_x \varphi_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1/2,j,k} - \varphi_{i-1/2,j,k}}{h_x}, \quad \nabla_{x,y}^2 \varphi_{i,j,k} = \delta_x^2 \varphi_{i,j,k} + \delta_y^2 \varphi_{i,j,k},$$

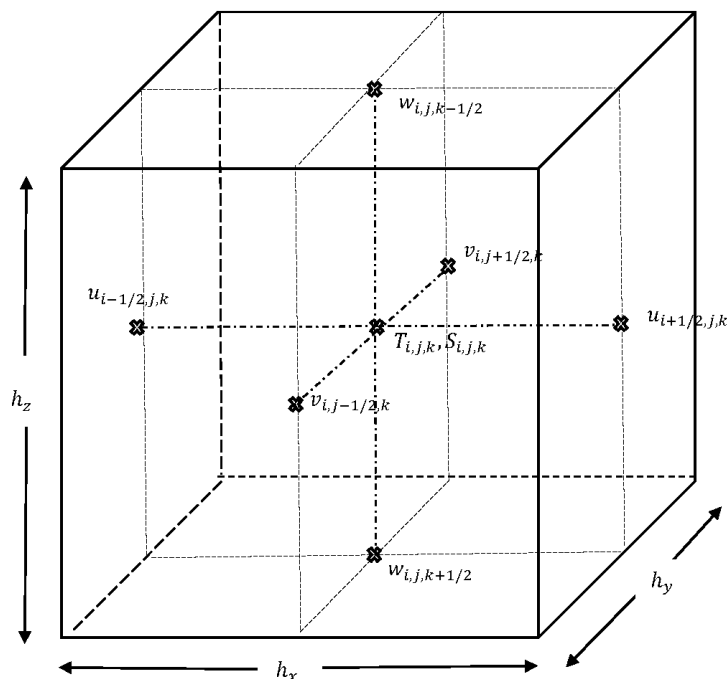
$$\nabla_{x,y}^4 \varphi_{i,j,k} = \nabla_{x,y}^2 \left(\nabla_{x,y}^2 \varphi_{i,j,k} \right).$$

Выпишем конечно-разностные аналоги уравнений (3), (5), (6):

$$\delta_x u_{i,j,k} + \delta_y v_{i,j,k} + \delta_z w_{i,j,k} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial T_{i,j,k}}{\partial t} + \delta_x (u_{i,j,k} T_{i,j,k}) + \delta_y (v_{i,j,k} T_{i,j,k}) + \delta_z (w_{i,j,k} T_{i,j,k}) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial S_{i,j,k}}{\partial t} + \delta_x (u_{i,j,k} S_{i,j,k}) + \delta_y (v_{i,j,k} S_{i,j,k}) + \delta_z (w_{i,j,k} S_{i,j,k}) = 0. \quad (19)$$



Р и с. 1. Схематическое изображение бокса (i, j, k) и пространственное распределение переменных

F i g. 1. Schematic image of the box (i, j, k) and spatial distribution of the variables

Уравнение для разностного аналога плотности в адиабатическом приближении имеет вид

$$\frac{\partial \rho_{i,j,k}}{\partial t} + \delta_x (u_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) + \delta_y (v_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) + \delta_z (w_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) = 0. \quad (20)$$

Введем дискретный аналог в разложении (13):

$$\rho_{k+1/2}^s = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \sum_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\Omega_{k+1/2}} \left(\sum_{i,j} \rho_{i,j,k+1/2} h_x h_y \right) h_t,$$

где h_t – шаг по времени; $\Omega_{k+1/2}$ – площадь поверхности на уровне $z_{k+1/2}$; t_1 – начальный, t_2 – конечный момент интегрирования.

Полагаем, что в дискретном виде разложение (13) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k} &= \rho_{i,j,k}^* + \rho_k^S, & \rho_{i+1/2,j,k} &= \rho_{i+1/2,j,k}^* + \rho_k^S, \\ \rho_{i,j+1/2,k} &= \rho_{i,j+1/2,k}^* + \rho_k^S, & \rho_{i,j,k+1/2} &= \rho_{i,j,k+1/2}^* + \rho_{k+1/2}^S. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя выражения (21) в формулу (20) и, учитывая разностные уравнения (17)–(19), получаем аналог уравнения (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{i,j,k}^*}{\partial t} + \delta_x (u_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) + \delta_y (v_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) + \delta_z (w_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) + \\ + \rho_k^S (\delta_x u_{i,j,k} + \delta_y v_{i,j,k} + \delta_z w_{i,j,k}) = -\overline{w_{i,j,k}}^z \delta_z \rho_k^S. \end{aligned} \quad (22)$$

Аппроксимации плотности в центре и на гранях бокса зависят от температуры и солености, которые в свою очередь удовлетворяют нелинейному уравнению состояния. Для того чтобы согласовать разностные аналоги $\rho_{i,j,k}$, $\rho_{i,j,k+1/2}$ с $T_{i,j,k}$, $T_{i,j,k+1/2}$, $S_{i,j,k}$, $S_{i,j,k+1/2}$, получены специальные соотношения [9]. Из них следует, что $\overline{\rho_k^S} \neq \rho_k^S$. Поэтому вид выражения (22), в котором последнее слагаемое в левой части равно нулю, обеспечивается аппроксимацией уравнения (21).

Полагаем, что уравнение состояния записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k} &= \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^1 a_{nm} T_{i,j,k}^n S_{i,j,k}^m = a_{00} + a_{10} T_{i,j,k} + a_{01} S_{i,j,k} + \\ &+ a_{11} T_{i,j,k} S_{i,j,k} + a_{20} T_{i,j,k}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда, рассматривая плотность как функционал от $T_{i,j,k}$ и $S_{i,j,k}$ и дифференцируя уравнение (23), получаем

$$\left(\rho_{i,j,k} \right)'_T = a_{10} + a_{11} S_{i,j,k} + 2a_{20} T_{i,j,k}, \quad \left(\rho_{i,j,k} \right)'_S = a_{01} + a_{11} T_{i,j,k}.$$

Выражения для расчета плотности на гранях бокса [9] имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{i+1/2,j,k} &= \alpha_{10} \overline{T_{i+1/2,j,k}}^x + \alpha_{01} \overline{S_{i+1/2,j,k}}^x + \alpha_{20} T_{i+1,j,k} T_{i,j,k} + \\ &+ \alpha_{11} \frac{T_{i,j,k} S_{i+1,j,k} + T_{i+1,j,k} S_{i,j,k}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,j+1/2,k} &= \alpha_{10} \overline{T_{i,j+1/2,k}}^y + \alpha_{01} \overline{S_{i,j+1/2,k}}^y + \alpha_{20} T_{i,j+1,k} T_{i,j,k} + \\ &+ \alpha_{11} \frac{T_{i,j,k} S_{i,j+1,k} + T_{i,j+1,k} S_{i,j,k}}{2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k+1/2} &= \alpha_{10} \overline{T_{i,j,k+1/2}}^z + \alpha_{01} \overline{S_{i,j,k+1/2}}^z + \alpha_{20} T_{i,j,k+1} T_{i,j,k} + \\ &+ \alpha_{11} \frac{T_{i,j,k} S_{i,j,k+1} + T_{i,j,k+1} S_{i,j,k}}{2}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом представления (24)

$$\rho_{i,j,k}^* = \overline{\rho_{i,j,k}^*}^x - \varphi_{i,j,k}^x, \quad \rho_{i,j,k}^* = \overline{\rho_{i,j,k}^*}^y - \varphi_{i,j,k}^y, \quad \rho_{i,j,k}^* = \overline{\rho_{i,j,k}^*}^z - \varphi_{i,j,k}^z, \quad (25)$$

$$\text{где } \varphi_{i,j,k}^x = \frac{h_x^2}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_T \delta_x^2 T_{i,j,k} + \left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_S \delta_x^2 S_{i,j,k} \right],$$

$$\varphi_{i,j,k}^y = \frac{h_y^2}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_T \delta_y^2 T_{i,j,k} + \left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_S \delta_y^2 S_{i,j,k} \right],$$

$$\varphi_{i,j,k}^z = \frac{h_z^k}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_T \delta_z \left(h_z^k \delta_z T_{i,j,k} \right) + \left(\rho_{i,j,k}^* \right)'_S \delta_z \left(h_z^k \delta_z S_{i,j,k} \right) \right].$$

Полагаем, что

$$A_{i,j,k}^{pe} = a_{i,j,k}^{pe} \left(\delta_z \rho_k^s \right)^{-1}, \quad \text{где } a_{i,j,k}^{pe} = g \frac{\left(\rho_{i,j,k}^* \right)^2}{2}, \quad (26)$$

$$a_{i+1/2,j,k}^{pe} = g \frac{\left(\rho_{i+1/2,j,k}^* \right)^2}{2}, \quad a_{i,j+1/2,k}^{pe} = g \frac{\left(\rho_{i,j+1/2,k}^* \right)^2}{2},$$

$$a_{i,j,k+1/2}^{pe} = g \frac{\left(\rho_{i,j,k+1/2}^* \right)^2}{2}.$$

Проведя простые преобразования, мы получаем следующее уравнение (аналог уравнения (16)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i,j,k}^{pe}}{\partial t} &+ \left\{ \delta_x \left(u_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe} \right) + \delta_y \left(v_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe} \right) + \delta_z \left(w_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe} \right) \right\} \left(\delta_z \rho_k \right)^{-1} + \\ &+ \frac{g}{2} \left[\rho_{i+1/2,j,k}^* \rho_{i-1/2,j,k}^* \delta_x u_{i,j,k} + \rho_{i,j+1/2,k}^* \rho_{i,j-1/2,k}^* \delta_y v_{i,j,k} + \right. \\ &\left. + \rho_{i,j,k+1/2}^* \rho_{i,j,k-1/2}^* \delta_z w_{i,j,k} \right] \left(\delta_z \rho_k \right)^{-1} = \end{aligned} \quad (27)$$

$$= -g \overline{w_{i,j,k}}^z \rho_{i,j,k}^* + g \left[\varphi_{i,j,k}^x \delta_x (u_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) + \varphi_{i,j,k}^y \delta_y (v_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) + \varphi_{i,j,k}^z \delta_z (w_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*) \right] (\delta_z \rho_k)^{-1}.$$

Рассмотрим слагаемые в этом уравнении. Первые два в левой части уравнения (27) понятны. Третий член в квадратных скобках не имеет аналога в дифференциальном уравнении и является дополнительным разностным слагаемым после умножения выражения (22) на разложение (25). Его происхождение связано с принятым в формулах (26) представлением ДПЭ на гранях бокса, которое, строго говоря, может быть и другим. Поэтому кажется возможным найти подходящие выражения для $a_{i+1/2,j,k}^{pe}$, $a_{i,j+1/2,k}^{pe}$, $a_{i,j,k+1/2}^{pe}$, чтобы точнее аппроксимировать уравнение (16).

Первое слагаемое в правой части уравнения (27) описывает работу силы плавучести, второе – дополнительный член, который, учитывая разложение (25), имеет диффузионный вид. Оценки показывают, что его величина на порядок меньше физической диффузии. Поэтому если его включить в диффузионное слагаемое, то результат решения изменится незначительно.

Перепишем уравнения (20), (27) с учетом диффузии:

$$\frac{\partial \rho_{i,j,k}}{t} + \delta_x (u_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) + \delta_y (v_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) + \delta_z (w_{i,j,k} \rho_{i,j,k}) = \left(D_V^{\rho} + D_H^{\rho} \right)_{i,j,k}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial A_{i,j,k}^{pe}}{\partial t} + \left\{ \delta_x (u_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) + \delta_y (v_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) + \delta_z (w_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) \right\} (\delta_z \rho_k)^{-1} + g \overline{w_{i,j,k}}^z \rho_{i,j,k}^* + \omega_{i,j,k} = \left(D_V^{ape} + D_H^{ape} \right)_{i,j,k}, \quad (29)$$

где в разностную диффузию по горизонтали и вертикали включены соответствующие слагаемые, а $\omega_{i,j,k}$ имеет очевидный вид.

Перепишем уравнение (29) в символьном виде:

$$\frac{\partial A_{i,j,k}^{pe}}{\partial t} + \alpha_{i,j,k} + b_{i,j,k} + \omega_{i,j,k} = \left(D_V^{ape} + D_H^{ape} \right)_{i,j,k}. \quad (30)$$

В уравнениях (28)–(30) введены обозначения

$$\alpha_{i,j,k} = \left\{ \delta_x (u_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) + \delta_y (v_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) + \delta_z (w_{i,j,k} a_{i,j,k}^{pe}) \right\} (\delta_z \rho_k)^{-1},$$

$$b_{i,j,k} = -g \overline{w_{i,j,k}}^z \rho_{i,j,k}^*.$$

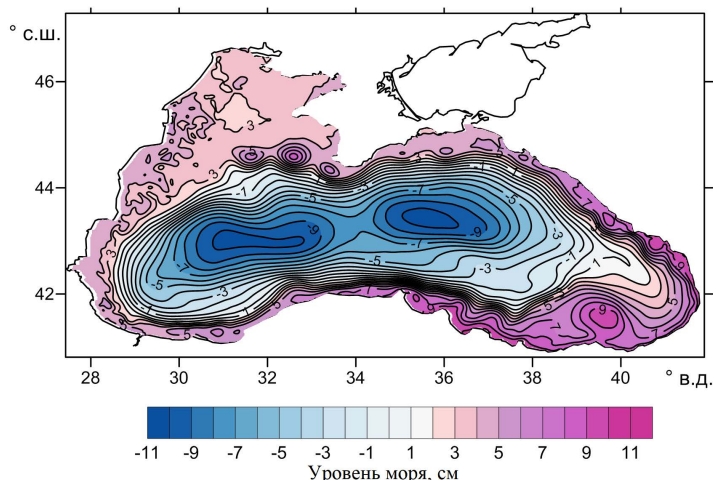
$$\begin{aligned}
\left(D_V^{\rho}\right)_{i,j,k} &= \alpha_{10} \delta_z [\kappa_{i,j,k}^V (\delta_z T_{i,j,k})] + \alpha_{01} \delta_z [\kappa_{i,j,k}^V (\delta_z S_{i,j,k})] + \\
&+ 2\alpha_{20} [\delta_z [\kappa_{i,j,k}^V \overline{T_{i,j,k}}^z (\delta_z T_{i,j,k})] + \\
&+ \alpha_{11} \left[T_{i,j,k} \delta_z [\kappa_{i,j,k}^V (\delta_z S_{i,j,k})] + S_{i,j,k} \delta_z [\kappa_{i,j,k}^V (\delta_z T_{i,j,k}) \right], \\
\left(D_H^{\rho}\right)_{i,j,k} &= \kappa^H (\alpha_{10} \nabla_{xy}^2 T_{i,j,k} + \alpha_{01} \nabla_{xy}^2 S_{i,j,k} + 2\alpha_{20} T_{i,j,k} \nabla_{xy}^2 T_{i,j,k} + \\
&+ \alpha_{11} [T_{i,j,k} \nabla_{xy}^2 S_{i,j,k} + S_{i,j,k} \nabla_{xy}^2 T_{i,j,k}]), \\
\left(D_V^{ape}\right)_{i,j,k} &= g \rho_{i,j,k}^* \left(D_V^{\rho}\right)_{i,j,k} \left(\delta_z \rho_k^S\right)^{-1} + \\
&+ g \frac{h_z^k}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_T \delta_z \left(h_z^k \delta_z T_{i,j,k}\right) + \left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_S \delta_z \left(h_z^k \delta_z S_{i,j,k}\right) \right] \delta_z \left(w_{i,j,k} \rho_{i,j,k}^*\right) \left(\delta_z \rho_k\right)^{-1}, \\
\left(D_H^{ape}\right)_{i,j,k} &= g \rho_{i,j,k}^* \left(D_H^{\rho}\right)_{i,j,k} \left(\delta_z \rho_k^S\right)^{-1} + \\
&+ g \left\{ \frac{h_x^2}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_T \delta_x^2 T_{i,j,k} + \left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_S \delta_x^2 S_{i,j,k} \right] + \right. \\
&\left. + \frac{h_y^2}{4} \left[\left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_T \delta_y^2 T_{i,j,k} + \left(\rho_{i,j,k}^*\right)'_S \delta_y^2 S_{i,j,k} \right] \right\} \left(\delta_z \rho_k^S\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

3. Результаты численных расчетов

Для анализа слагаемых уравнения скорости изменения ДПЭ (29), которые дают основной вклад в энергетический цикл, воспользуемся результатами расчетов циркуляции Черного моря для реалистических атмосферных условий 2011 г. [11]. Разрешение по горизонтали составляло $1,6 \times 1,6$ км, по вертикали расчет проводился на 27 горизонтах. Поля для начальных условий (12) соответствовали 1 января 2011 г.

Заметим, что ρ_k^S рассчитывали как средний профиль по вертикали за год.

Для примера рассмотрим режим зимней циркуляции. В 2011 г. он характеризовался наличием на протяжении всего года отчетливо выраженного Основного Черноморского течения, которое интенсифицировалось в зимне-весенний и ослабевало в летне-осенний период (рис. 2). По его периферии наблюдались антициклонические вихри различного горизонтального масштаба и интенсивности. Подробно динамика течений Черного моря в 2011 г. рассмотрена в работе [11], поэтому перейдем к анализу изменчивости ДПЭ в это время года.



Р и с. 2. Приведенный уровень моря (в см) на 1 февраля 2011 г.

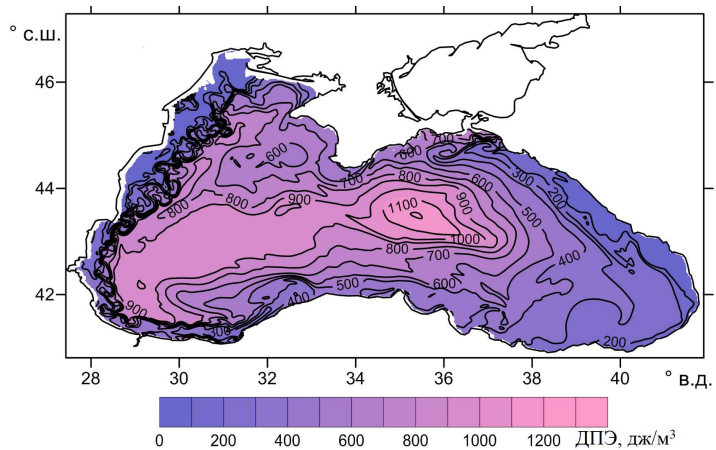
F i g. 2. Reducible sea level (cm) on February 1, 2011

На рис. 3 приводится горизонтальная структура ДПЭ на середину гидрологической зимы 2011 г. Средняя по горизонту ДПЭ уменьшается с глубиной и ниже горизонта 50 м ее значения на порядок меньше, чем в верхнем 30-метровом слое.

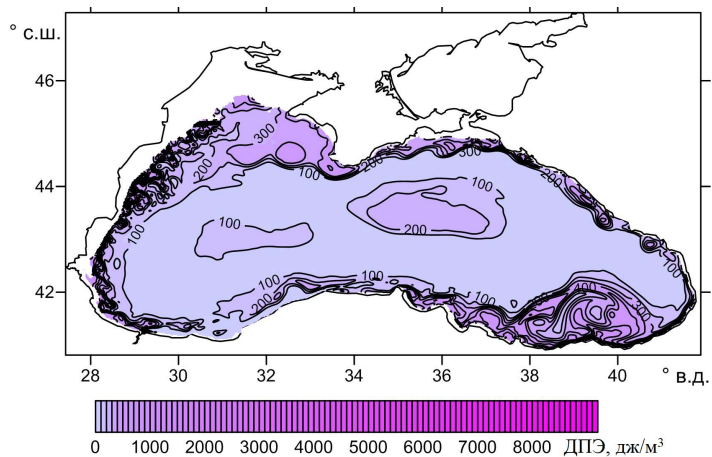
В верхнем 30-метровом слое в центральной области моря (рис. 3, *a*), соответствующей центру циклонического круговорота, наблюдаются большие значения ДПЭ, которые уменьшаются к периферии области. Ниже имеет место обратная тенденция – в центре моря меньшие значения, чем на его периферии (рис. 3, *b*, *c*). Причем в глубинных слоях (ниже горизонта 200 м) наибольший запас ДПЭ имеет место в антициклонических круговоротах (Севастопольском и Батумском). Локальный максимум ДПЭ на горизонте 50 м (рис. 3, *b*) обусловлен втоком мраморноморских вод.

Рассмотрим структуру основных энергетических слагаемых в уравнении (29). Базовой характеристикой энергообмена является работа силы плавучести, которая представлена на рис. 4.

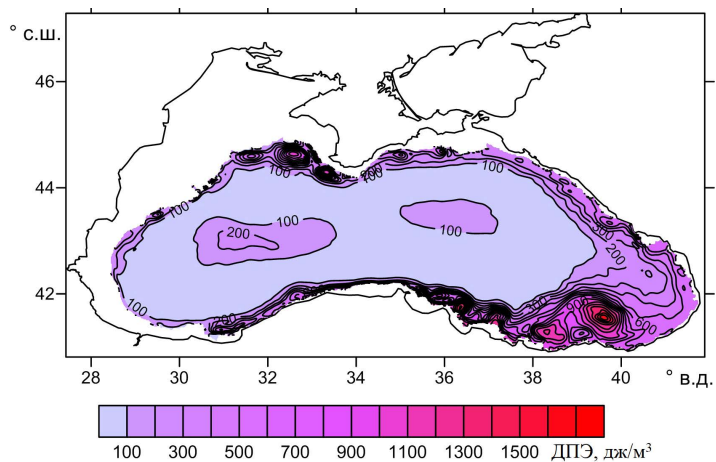
Наблюдаются две отчетливо различающиеся области обмена между кинетической и ДПЭ: центральная часть моря, где этот процесс происходит довольно слабо, и прибрежная область моря, характеризующаяся интенсивной работой силы плавучести. Причем по глубине картины энергообмена качественно различаются. В верхнем 10–30-метровом слое (рис. 4, *a*) основная работа силы плавучести сосредоточена вдоль западного свала глубин, где наблюдаются зоны перехода из ДПЭ в кинетическую энергию и наоборот, что свидетельствует о возможном развитии различного типа неустойчивости на западном свале глубин. На нижележащих горизонтах области интенсивной работы силы плавучести наблюдаются не только у западного берега, но и в восточных областях – около Анатолийского и Кавказского побережий (рис. 4, *b*, *c*). На глубинах 200–300 м в зоне Севастопольского и Батумского антициклонов имеет место четко выраженный переход энергии от кинетической в ДПЭ, что свидетельствует о процессах бароклинной неустойчивости для этого периода времени (рис. 4, *c*).



a



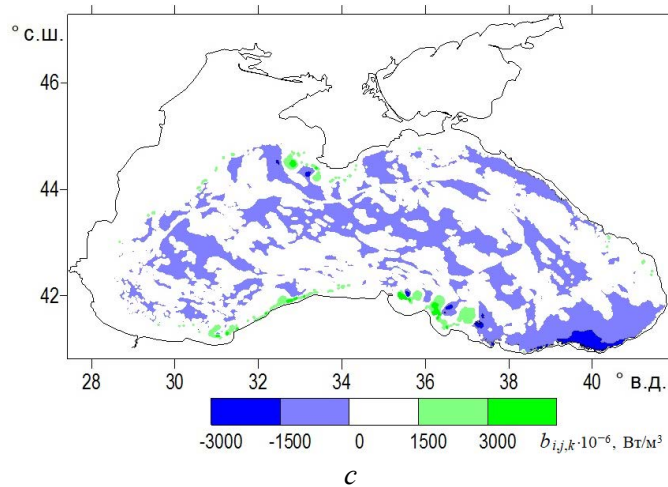
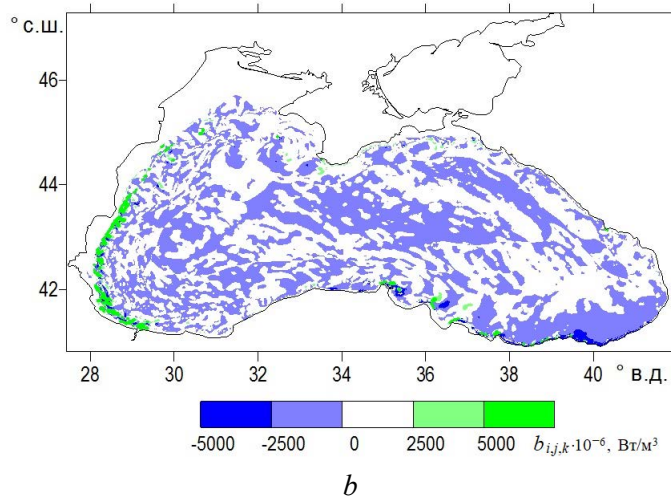
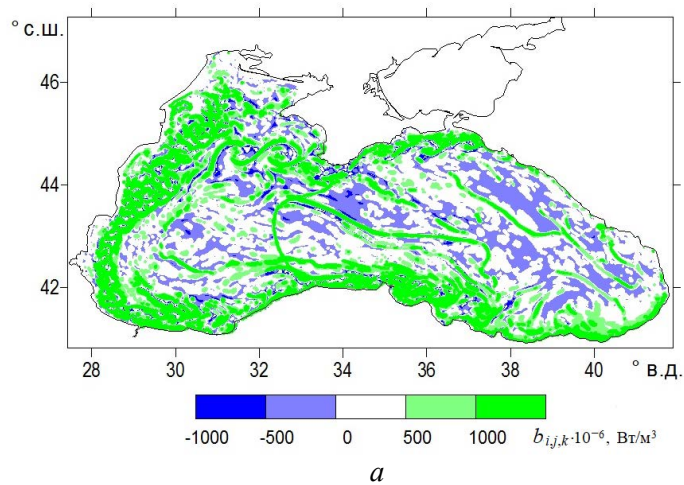
b



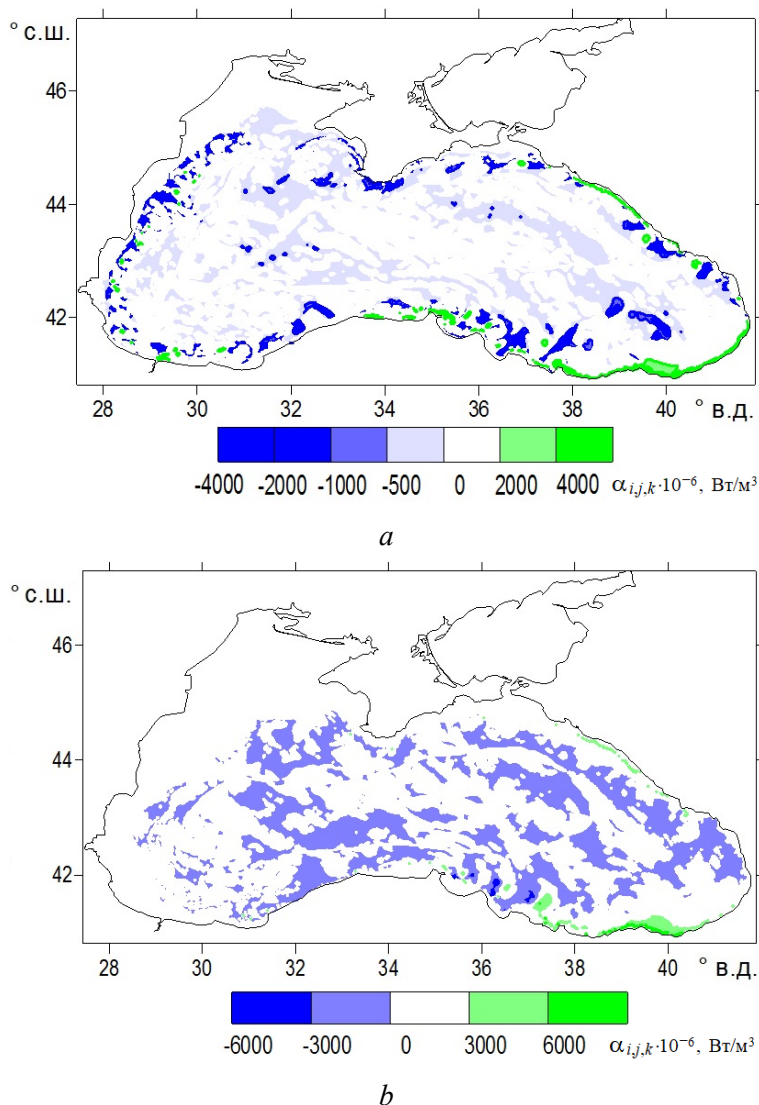
c

Р и с. 3. ДПЭ (дж/м³) на горизонтах 20 (а), 50 (b) и 300 м (с)

Fig. 3. Available potential energy at the 20 (a), 50 (b) and 300 m (c) horizons



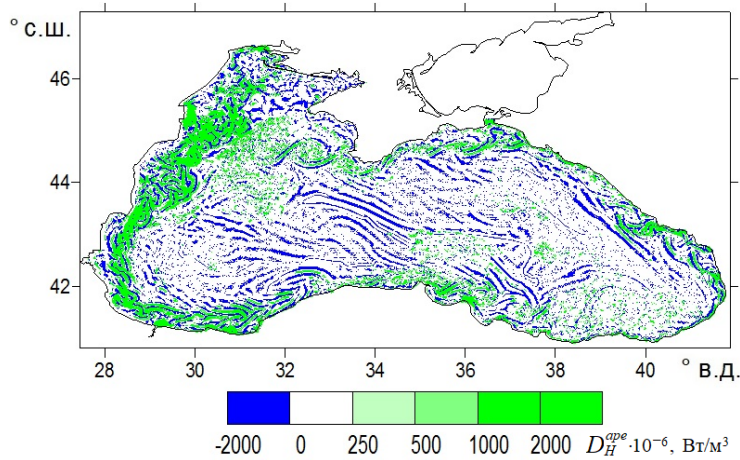
Р и с. 4. Работа силы плавучести на горизонтах 20 (a), 50 (b) и 300 м (c)
Fig. 4. Action of the buoyancy force at the 20 (a), 50 (b) and 300 m (c) horizons
 МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 38 № 3 2022



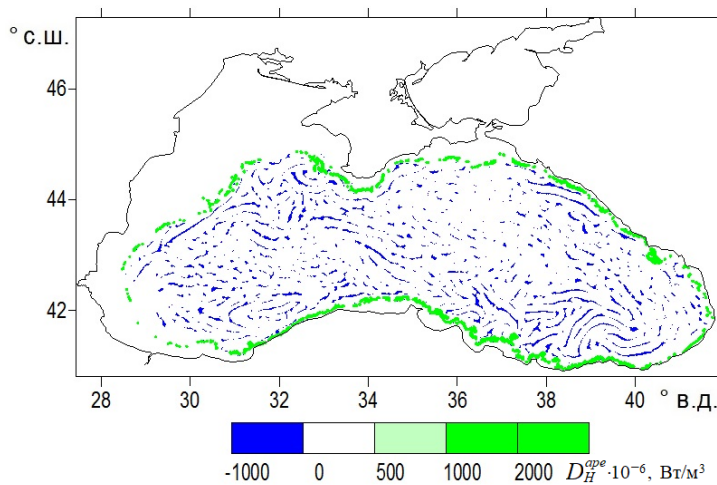
Р и с. 5. Адвекция ДПЭ на горизонтах 50 (a) и 300 м (b)
Fig. 5. Available potential energy advection at the 50 (a) and 300 m (b) horizons

Перенос ДПЭ в результате адвекции (рис. 5) наиболее интенсивно происходит в прибрежной зоне моря. В верхнем 50-метровом слое он сосредоточен у западного побережья, в нижних слоях – вдоль Анатолийского берега (рис. 5, a). В отличие от работы силы плавучести в области Севастопольского и Батумского антициклонов влияние адвекции мало и довольно однородно по горизонтали, что свидетельствует о незначительной роли адвективных сил в процессе эволюции этих круговоротов, по крайней мере в этот период времени. Ниже горизонта 200 м (рис. 5, b) наибольший адвективный перенос имеет место в районе Анатолийского побережья (зона мезомасштабных вихрей) и в области Севастопольского антициклона.

Наибольшая горизонтальная диффузия наблюдается в верхнем слое моря (рис. 6, *a*), что обусловлено двумя факторами – значительными горизонтальными градиентами в поле плотности и вхождением рек, в первую очередь Дуная. Ясно, что по сравнению с центральной частью бассейна вдольбереговая зона характеризуется большим значением диффузионного потока. Особенно ярко это процесс проявляется в глубинных слоях (рис. 6, *b*), где диффузия ДПЭ сосредоточена около боковых границ в виде узкой полосы.



a



b

Рис. 6. Горизонтальная диффузия ДПЭ на горизонтах 5 (*a*) и 300 м (*b*)

Fig. 6. Horizontal diffusion of available potential energy at the 5 (*a*) and 300 m (*b*) horizons

Структура вертикальной диффузии ДПЭ определяется в первую очередь потоками тепла, осадков и испарения на поверхности моря. Поэтому наибольшие ее значения наблюдаются в верхнем 20-метровом слое. Ниже значения D_V^{ape} уменьшаются на порядок.

Заключение

Для вывода дискретного уравнения скорости изменения ДПЭ использовалась переопределенная сетка, на которой вводились новые неизвестные, связанные дополнительными соотношениями (21), (25), (26). Эти связи были выбраны так, чтобы выполнялись некоторые свойства дифференциальной задачи. Формулы (21) обеспечивают соответствие уравнений (15) и (22), выражения (25), (26) приводят к конечно-разностному уравнению (27), которое включает слагаемое, не присутствующее в дифференциальной постановке и имеющее диффузионный вид. Поскольку оно на порядок меньше физической диффузии, то его можно интерпретировать как дополнительную диффузию, которая, по крайней мере на относительно коротком интервале интегрирования, не влияет на результаты расчета.

Исходя из сказанного, можно утверждать, что задача получения дискретного уравнения для ДПЭ, обладающего теми же характеристиками, что и непрерывный случай, выполнена частично. Необязательно, чтобы ДПЭ на границах бокса принимала вид аппроксимации (26). Можно предположить, что существует подходящий выбор выражения (26), которое позволит обеспечить выполнение основных свойств дифференциального уравнения.

Полученное разностное уравнение (29) в точности соответствует дискретной постановке и поэтому адекватно отражает энергетику разностной задачи. В середине гидрологической зимы в Черном море наибольшие значения ДПЭ наблюдаются в верхнем слое в центральной области моря. Ниже горизонта 100 м картина меняется на противоположную – ДПЭ увеличивается по направлению к берегу, где наблюдается интенсивная мезомасштабная изменчивость. На глубине более 200 м наибольший запас ДПЭ сосредоточен в Севастопольском и Батумском антициклонах. Поэтому для зимнего периода характерно, что запас ДПЭ в верхнем слое моря имеет место в центральной части циклонических круговоротов, на глубине примерно 100 м и более он содержится в области синоптических и мезомасштабных вихрей.

Работа основных сил (плавучести, адвекции и горизонтальной диффузии) сосредоточена в прибрежных областях моря. Таким образом, на скорость изменения ДПЭ в зимний период преобладающим образом влияет вихревая активность на свале глубин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kjellsson J., Zanna L.* The Impact of Horizontal Resolution on Energy Transfers in Global Ocean Models // *Fluids*. 2017. Vol. 2, iss. 3. 45. <https://doi.org/10.3390/fluids2030045>
2. Seasonal variability of eddy kinetic energy in a global high-resolution ocean model / J. K. Rieck // *Geophysical Research Letters*. 2015. Vol. 42, iss. 21. P. 9379–9386. <https://doi.org/10.1002/2015GL066152>
3. *Yang Y., San Liang X.* On the seasonal eddy variability in the Kuroshio Extension // *Journal of Physical Oceanography*. 2018. Vol. 48, iss. 8. P. 1675–1689. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0058.1>
4. The eddy kinetic energy budget in the Red Sea / P. Zhan [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2016. Vol. 121, iss. 7. P. 4732–4747. <https://doi.org/10.1002/2015JC011589>

5. *Stepanov D. V., Diansky N. A., Fomin V. V.* Eddy energy sources and mesoscale eddies in the Sea of Okhotsk // *Ocean Dynamics*. 2018. Vol. 68, iss. 7. P. 825–845. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1167-3>
6. *Lorenz E. N.* Available potential energy and the maintenance of the general circulation // *Tellus*. 1955. Vol. 7, iss. 2. P. 157–167. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v7i2.8796>
7. *Holland W. R.* Energetics of baroclinic oceans // *Numerical models of ocean circulation : proceedings of a symposium held at Durham, New Hampshire, October 17-20, 1972*. Washington : National Academy Press, 1975. P. 168–177.
8. Eddies and the general circulation of an idealized oceanic gyre: a wind and thermally driven primitive equation numerical experiment / A. Robinson [et al.] // *Journal of Physical Oceanography*. 1977. Vol. 7, iss. 2. P. 182–207. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1977\)007<0182:EATGCO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1977)007<0182:EATGCO>2.0.CO;2)
9. *Демьшев С. Г.* Энергетика климатической циркуляции Черного моря. Ч. I. Дискретные уравнения скорости изменения кинетической и потенциальной энергий // *Метеорология и гидрология*. 2004. № 9. P. 65–80.
10. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a Turbulence Closure Model for Geophysical Fluid Problems // *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1982. Vol. 20, no. 4. P. 851–875.
11. *Demyshev S. G., Dymova O. A.* Numerical analysis of the Black Sea currents and mesoscale eddies in 2006 and 2011 // *Ocean Dynamics*. 2018. Vol. 68, iss. 10. P. 1335–1352. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1200-6>

Об авторе:

Демьшев Сергей Германович, главный научный сотрудник, заведующий отделом теории волн, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), доктор физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-5405-2282**, demyshev@gmail.ru