

Статистическое описание морской поверхности двухкомпонентной гауссовой смесью

А. С. Запевалов [✉], А. С. Князьков

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия,
[✉] sevzepter@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2022; одобрена после рецензирования 11.04.2022;
принята к публикации 04.05.2022.

Аннотация

Цель. Анализ возможности использования двухкомпонентной гауссовой смеси с неравными дисперсиями для аппроксимации функции плотности вероятностей (*PDF*) возвышений морской поверхности – цель данной работы.

Методы и результаты. Гауссова смесь строится в форме суммы гауссианов с разными весами. Для построения двухкомпонентной гауссовой смеси, учитывая условие, налагаемое на весовые коэффициенты, необходимо задать пять параметров. Для их расчета используются первые четыре статистических момента возвышений морской поверхности. Пятый параметр применяется для выполнения условия одномодальности распределения. Для оценки возможности применения аппроксимаций в форме гауссовой смеси проведено их сравнение с аппроксимацией, построенной на основе распределения Грама – Шарлье, которая ранее тестировалась на данных прямых волновых измерений. Показано, что при положительных значениях коэффициента эксцесса в области изменения случайной величины с единичной дисперсией $|\xi| < 3$ два типа аппроксимаций близки, при отрицательных значениях коэффициента эксцесса заметные расхождения наблюдаются в области $|\xi| < 1$ (здесь ξ нормированное на среднеквадратическое значение возвышение поверхности). Также показано, что аппроксимация *PDF* в форме гауссовой смеси при нулевом значении коэффициента асимметрии может быть получена только при отрицательном значении коэффициента эксцесса.

Выводы. В настоящее время для аппроксимации *PDF* возвышений и уклонов морской поверхности обычно используются модели, построенные на основе усеченных рядов Грама – Шарлье. Их недостатком является ограниченный диапазон, в котором может быть описано распределение моделируемой характеристики. Гауссовы смеси свободны от указанного недостатка. Разработана процедура расчета их параметров. Для уточнения условий, в которых могут использоваться гауссовы смеси, необходимо прямое сопоставление с данными волновых измерений.

Ключевые слова: морская поверхность, плотность вероятностей, гауссова смесь, распределение Грама – Шарлье, асимметрия, эксцесс

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0555-2021-0004.

Для цитирования: Запевалов А. С., Князьков А. С. Статистическое описание морской поверхности двухкомпонентной гауссовой смесью // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т 38, № 4. С. 422–431. doi:10.22449/0233-7584-2022-4-422-431

Statistical Description of the Sea Surface by a Two-Component Gaussian Mixture

A. S. Zapevalov , A. S. Knyazkov

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
 sevzepter@mail.ru

Abstract

Purpose. The aim of the study is to analyze the possibility of applying the two-component Gaussian mixture with unequal dispersions in order to approximate the probability density function (*PDF*) of the sea surface elevations.

Methods and Results. The Gaussian mixture is constructed in the form of a sum of the Gaussians with different weights. Construction of the two-component Gaussian mixture with the regard for the condition imposed on the weight coefficients requires presetting of five parameters. The first four statistical moments of the sea surface elevations are applied for their calculation. The fifth parameter is used to fulfill the condition of unimodal distribution. To assess the possibility of using the approximations in the form of the Gaussian mixture, they were compared with the approximation based on the Gram-Charlier distribution, which was previously tested with direct wave measurement data. It is shown that at positive values of the kurtosis coefficient, in the range of a random value variation with a unit dispersion $|\xi| < 3$, two types of approximations are close; whereas at negative values of the kurtosis coefficient, noticeable discrepancies are observed in the area $|\xi| < 1$ (here ξ is the surface elevation normalized to the RMS value). Besides, it is also demonstrated that at the zero skewness coefficient, the *PDF* approximation in the form of the Gaussian mixture can be obtained at the negative kurtosis coefficient only.

Conclusions. At present, the models based on the truncated Gram-Charlier series, are usually applied to approximate the *PDF* elevations and slopes of the sea surface. Their disadvantage consists in the limited range, in which the distribution of the simulated characteristic can be described. The Gaussian mixtures are free from this disadvantage. A procedure for calculating their parameters is developed. To clarify the conditions under which the Gaussian mixtures can be used, direct comparison with the wave measurement data is required.

Keywords: sea surface, probability density function, Gaussian mixture, Gram-Charlier distribution, skewness, kurtosis

Acknowledgements: the study was carried out within the framework of the state assignment on theme No. 0555-2021-0004.

For citation: Zapevalov, A.S. and Knyazkov, A.S., 2022. Statistical Description of the Sea Surface by a Two-Component Gaussian Mixture. *Physical Oceanography*, 29(4), pp. 395-403. doi:10.22449/1573-160X-2022-4-395-403

Введение

При описании функции плотности вероятностей (*PDF*) возвышений, создаваемых морскими поверхностными волнами, наибольшее распространение получили аппроксимации, построенные на основе рядов Грама – Шарлье [1]. Принципиальная проблема применения этих аппроксимаций связана с тем, что на практике ряды Грама – Шарлье используются в усеченной форме, что позволяет описывать распределение только в ограниченной области изменения случайной величины [2]. Необходимость решения широкого круга прикладных задач, в первую очередь связанных с дистанционным зондированием океана из космоса [3–5], привела к поиску новых подходов к построению аппроксимации *PDF* возвышений морской поверхности.

Недавно для моделирования возвышений морской поверхности было предложено использовать гауссовы смеси [6], которые уже давно получили широкое распространение в других областях при проведении фундаментальных и прикладных исследований [7–9]. Ранее гауссовы смеси использовались для аппроксимации *PDF* уклонов морской поверхности [10, 11].

В общем случае задачи определения числа мод и границ областей одно-модальности для гауссовой смеси не решены [12, 13], поэтому необходима проверка корректности ее использования для каждой физической задачи. Целью настоящей работы является анализ возможности использования и ограничений для двухкомпонентной гауссовой смеси с разными дисперсиями при аппроксимации *PDF* возвышений морской поверхности. Анализ проводится для диапазонов изменения третьего и четвертого статистических моментов возвышений морской поверхности, определенных по данным измерений на Черном море [14].

Двухкомпонентная гауссова смесь

Двухкомпонентная гауссова смесь случайной величины ξ имеет следующий вид [13]:

$$P_s(\xi) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(\xi - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(\xi - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (1)$$

где α_i – вес i -й компоненты ($i = 1, 2$), $\alpha_i \in (0, 1)$; m_i – математическое ожидание; σ_i^2 – дисперсия. Весовые коэффициенты удовлетворяют условию

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (2)$$

Для построения модели (1), учитывая условие (2), необходимо найти пять параметров: m_1 , m_2 , σ_1^2 , σ_2^2 , α_1 . В работе [6] предложено рассчитывать их по первым пяти статистическим моментам возвышений морской поверхности. Недостаток такого подхода состоит в том, что по данным натуральных измерений определяются статистические моменты не старше четвертого порядка. Поэтому, следуя [11], для расчета параметров модели будем использовать первые четыре статистических момента, оставляя пятый параметр (α_1) свободным. Параметр α_1 будем варьировать для удовлетворения в *PDF* условия одномодальности.

Статистические моменты случайной величины ξ определены как

$$\mu_j = \int \xi^j P(\xi) d\xi.$$

Для двухкомпонентной гауссовой смеси

$$\mu_j = \alpha_1 \mu_{j,1} + \alpha_2 \mu_{j,2}, \quad (3)$$

где $\mu_{j,i} = \int \xi^j P_i(\xi) d\xi$, $P_i(\xi)$ – первое и второе слагаемые в модели (1).

Общая система для расчета параметров гауссовой смеси была предложена в работе [15]. Далее будем полагать, что дисперсия анализируемой случайной величины ξ равна единице. Принимая средний уровень поверхности равным нулю, учитывая (2) и (3), получаем систему уравнений для расчета параметров модели (1):

$$\alpha_1 m_1 + (1 - \alpha_1) m_2 = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_1 (m_1^2 + \sigma_1^2 - 1) + (1 - \alpha_1) (m_2^2 + \sigma_2^2 - 1) = 0, \quad (5)$$

$$\alpha_1 (m_1^3 + 3m_1 \sigma_1^2 - \mu_3) + (1 - \alpha_1) (m_2^3 + 3m_2 \sigma_2^2 - \mu_3) = 0, \quad (6)$$

$$\alpha_1 (m_1^4 + 6m_1^2 \sigma_1^2 + 3\sigma_1^4 - \mu_4) + (1 - \alpha_1) (m_2^4 + 6m_2^2 \sigma_2^2 + 3\sigma_2^4 - \mu_4) = 0. \quad (7)$$

Параметры μ_3 и $\mu_4 - 3$ являются коэффициентами асимметрии и эксцесса соответственно. Систему (4) – (7) будем исследовать при значениях $-0,2 < \mu_3 < 0,4$, $-0,4 < \mu_4 - 3 < 0,4$, что для Черного моря соответствует диапазонам их изменения для ветровых волн и зыби [14].

Следуя подходу [16], сведем систему (4) – (7) к одному уравнению, последовательно исключая неизвестные. Из уравнения (4) имеем $m_2 = \alpha_1 m_1 / (\alpha_1 - 1)$, тогда из уравнений (5) – (7), введя промежуточную неизвестную

$$\beta = \frac{(m_1^2 + \sigma_1^2 - 1)}{m_1} = \frac{(m_2^2 + \sigma_2^2 - 1)}{m_2}, \quad (8)$$

получаем

$$\frac{m_1^3 + 3m_1 \sigma_1^2 - \mu_3}{m_1} = \frac{m_2^3 + 3m_2 \sigma_2^2 - \mu_3}{m_2}, \quad (9)$$

$$\frac{m_1^4 + 6m_1^2 \sigma_1^2 + 3\sigma_1^4 - \mu_4}{m_1} = \frac{m_2^4 + 6m_2^2 \sigma_2^2 + 3\sigma_2^4 - \mu_4}{m_2}. \quad (10)$$

Используя уравнение (8), выразим дисперсии:

$$\sigma_1^2 = m_1 \beta + 1 - m_1^2, \quad \sigma_2^2 = m_2 \beta + 1 - m_2^2.$$

Подставив выражения для σ_1^2 и σ_2^2 в (9), (10), после преобразований получаем

$$m_1 m_2 (3\beta - 2(m_1 + m_2)) = -\mu_3, \quad m_1 m_2 (3\beta^2 - 2(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)) = -\mu_4 + 3.$$

После симметричной замены переменных вида $w = m_1 + m_2$ и $v = m_1 m_2$ имеем

$$3\beta v - 2vw = -\mu_3, \quad 3\beta^2 v - 2v(w^2 - v) = -\mu_4 + 3.$$

Объединяя эти два уравнения, получаем
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 38 № 4 2022

$$6v^3 - 2v^2w^2 - 4vw\mu_3 + 3(\mu_4 - 3)v + \mu_3^2 = 0.$$

Обратной заменой выразим переменные w и v через m_1 и окончательно получаем

$$2\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha_1^2 - 1)m_1^6 - 4\mu_3\alpha_1(2\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 1)^2m_1^3 + 3(\mu_4 - 3)\alpha_1(\alpha_1 - 1)^3m_1^2 + \mu_3^2(\alpha_1 - 1)^4 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, исходная система уравнений (8) – (11) сведена к одному уравнению шестой степени относительно переменной m_1 с известными величинами μ_3, μ_4 и свободным параметром α_1 .

Рассмотрим общие свойства разряженного полинома (11) при изменении его коэффициентов. В общем виде

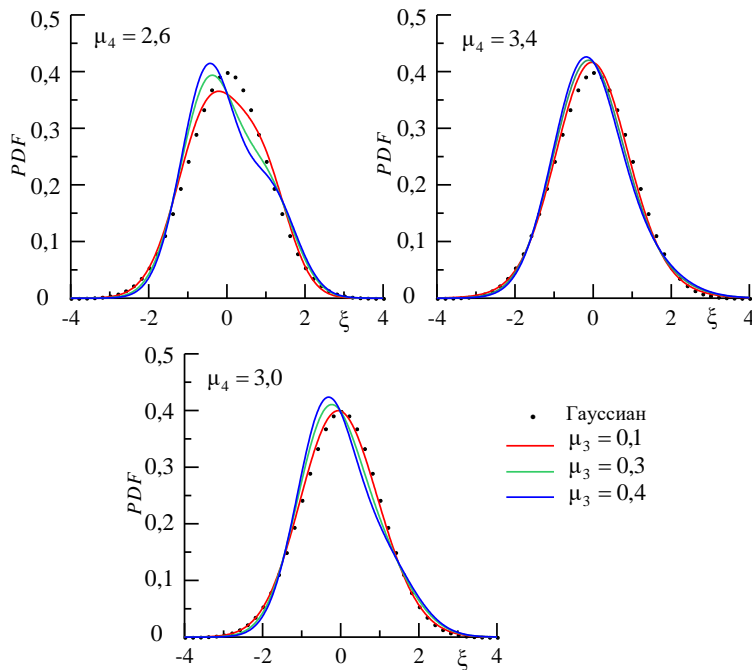
$$b_0m_1^6 + b_3m_1^3 + b_4m_1^2 + b_6 = 0, \quad (12)$$

где $b_0 = 2\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha_1^2 - 1)$; $b_3 = -4\mu_3\alpha_1(2\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 1)^2$; $b_4 = 3(\mu_4 - 3)\alpha_1(\alpha_1 - 1)^3$; $b_6 = \mu_3^2(\alpha_1 - 1)^4$. В диапазоне $\alpha_1 \in (0, 1)$ всегда $b_0 < 0$, $b_6 \geq 0$, причем $b_6 = 0$ только при $\mu_3 = 0$. В случае, когда $b_6 > 0$, из четности степени полинома по правилу Декарта уравнение (12) имеет как положительные, так и отрицательные вещественные корни, так как в ряду его коэффициентов обязательно есть смена знака. При $b_3 > 0$ и $b_4 < 0$ число перемен знака равно трем, а в остальных случаях – только единице. Знак коэффициента b_4 зависит только от знака $\mu_4 - 3$, b_3 может менять знак при изменении как μ_3 , так и α_1 .

Рассмотрим отдельно случай, когда $\mu_3 = 0$. Уравнение (12) примет вид $m_1^2(b_0m_1^4 + b_4) = 0$. Так как $b_0 < 0$, то оно имеет ненулевые вещественные решения только для положительных значений b_4 , что соответствует условию $\mu_4 - 3 < 0$. Таким образом, при $\mu_3 = 0$ и $\mu_4 - 3 > 0$ модель двухкомпонентной смеси не имеет вещественных решений и в принципе не может быть использована. Это ограничение двухкомпонентных смесей получено в общем виде для любого процесса с указанными значениями μ_3 и μ_4 .

Значения m_1 , удовлетворяющие (11), находим численно методом Ньютона для заданных μ_3 и μ_4 , варьируя α_1 . Некоторые из получаемых решений должны быть исключены исходя из условия положительности σ_1^2 и σ_2^2 . Для найденных значений m_1 , удовлетворяющих (11), и соответствующих α_1 с использованием исходной системы (4) – (7) вычислялись m_2 , σ_1^2 , σ_2^2 и строилась *PDF* гауссовой смеси. В общем случае модель (1) может быть как одномодальной, так и бимодальной [13, 17]. Поскольку распределение возвышений ветровых волн является одномодальным, то дополнительно анализировалась производная *PDF* и выбирались только значения параметров, когда $P_s(\xi)$ имеет единственный экстремум (это эквивалентно условию одномодальности).

Наряду с симметрией относительно троек чисел $(m_1, \sigma_1^2, \alpha_1)$ и $(m_2, \sigma_2^2, \alpha_2)$ система уравнений (8) – (10) имеет дополнительное свойство симметрии: замена (m_1, m_2, μ_3) на $(m_1, m_2, -\mu_3)$ дает идентичные решения, поэтому анализ достаточно проводить только для положительных значений μ_3 , т. е. для положительных значений коэффициента асимметрии. Аппроксимации *PDF* в форме (1) представлены на рис. 1.



Р и с. 1. Аппроксимации *PDF* гауссовой смесью
F i g. 1. *PDF* approximations by the Gaussian mixture

Сравнение с распределением Грама – Шарлье

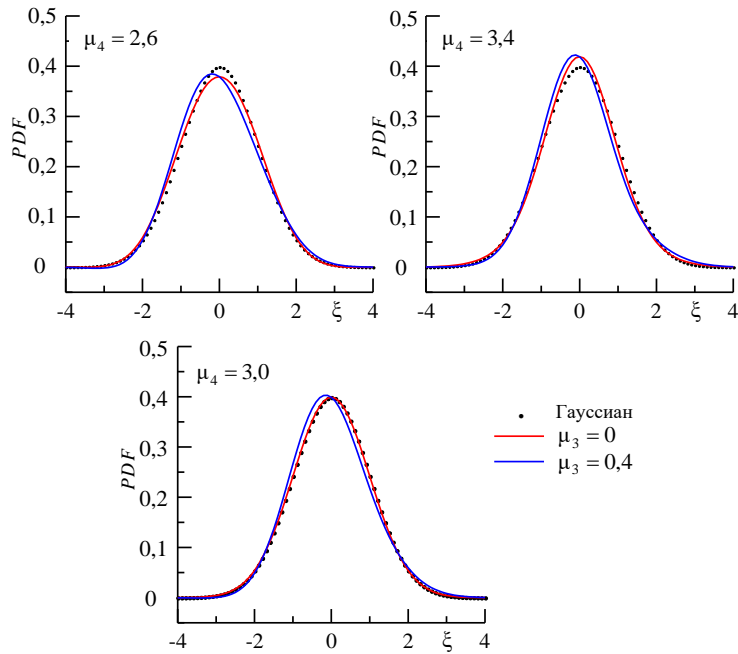
Морское поверхностное волнение является квазигауссовым процессом [1, 18, 19]. Функция плотности вероятностей подобного процесса с единичной дисперсией может быть представлена в следующем виде [2]:

$$P_{G-C}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i H_i(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right), \quad (13)$$

где C_i – коэффициенты ряда; H_i – ортогональные полиномы Эрмита i -го порядка. Коэффициенты C_i рассчитываются по статистическим моментам. Поскольку для возвышений морской поверхности известны статистические моменты только до четвертого порядка включительно, вместо (13) получаем

$$P_{G-C}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \left\{ 1 + \frac{\mu_3}{6} H_3(\xi) + \frac{(\mu_4-3)}{24} H_4(\xi) \right\}. \quad (14)$$

Аппроксимации PDF в форме (14) представлены на рис. 2. Разложение функции в ряд, включающий относительно небольшое число членов, приводит к сужению области, где справедлива данная аппроксимация [2]. В частности, видно, что функция $P_{G-C}(\xi)$ при значениях μ_3 и μ_4 , определенных в натуральных экспериментах, может принимать отрицательные значения.



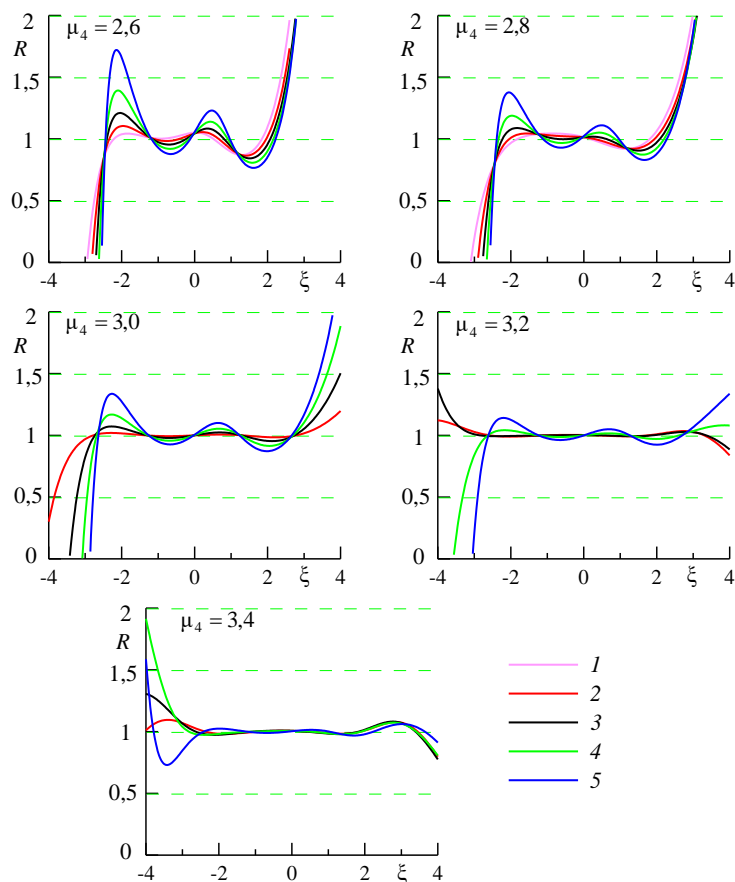
Р и с. 2. Аппроксимации PDF распределением Грама – Шарлье

Fig. 2. PDF approximation by the Gram – Charlier distribution

Ранее аппроксимация (14) сравнивалась с эмпирическими PDF возвышенной морской поверхности, полученными по измерениям морских волн, проведенным на стационарной океанографической платформе Морского гидрофизического института [20]. Средняя по ансамблю ситуаций относительная ошибка ε для диапазона $|\xi| < 3$ лежит в пределах $-0,02 \dots 0,07$. Разброс значений ε в области $|\xi| < 1$ не превышает уровня 0,08, за пределами указанной области разброс быстро растет.

Верифицированная по данным натуральных измерений аппроксимация (14) может быть использована для предварительной оценки корректности $P_S(\xi)$. Отношение $R(\xi) = P_{G-C}(\xi)/P_S(\xi)$ представлено на рис. 3. Видно, что в случае, когда эксцесс меньше нуля, функции $P_S(\xi)$ и $P_{G-C}(\xi)$ заметно различаются. Причем различия наблюдаются даже в области $|\xi| < 1$, где, как отмечено выше, наблюдалось совпадение $P_{G-C}(\xi)$ с данными волновых измерений.

При положительных значениях эксцесса в области $|\xi| < 3$ функции $P_S(\xi)$ и $P_{G-C}(\xi)$ близки.



Р и с. 3. Зависимости соотношения $R = P_{G-C}/P_S$ от параметров μ_3 и μ_4 . Кривые 1–5 соответствуют значениям μ_3 от 0 до 0,4 с шагом 0,1

Fig. 3. Dependences of ratio $R = P_{G-C}/P_S$ on the parameters μ_3 and μ_4 . Curves 1–5 correspond to the μ_3 values from 0 to 0.4 with a step 0.1

Оценка достоверности аппроксимации *PDF* возвышений морской поверхности гауссовой смесью путем сравнения с распределением, построенным на основе усеченного ряда Грама – Шарлье, является предварительной. Следующим шагом должно быть прямое сравнение $P_S(\xi)$ с эмпирическими *PDF* возвышений морской поверхности.

Заключение

Основные результаты проведенного исследования следующие.

1. Разработана методика расчета параметров двухкомпонентной гауссовой смеси для аппроксимации *PDF* возвышений морской поверхности. Ана-

лиз проводился для диапазонов изменений третьего (μ_3) и четвертого (μ_4) статистических моментов возвышений морской поверхности, определенных по данным прямых волновых измерений на Черном море.

2. Выделены свойства симметрии уравнений для гауссовой смеси, сокращающие объем вычислений. В общем виде показано, что аппроксимации *PDF* в форме гауссовой смеси в частном случае $\mu_3 = 0$ могут быть получены только при условии $\mu_4 < 3$.

3. Проведено сравнение аппроксимации *PDF* в форме двухкомпонентной гауссовой смеси и аппроксимации, построенной на основе усеченных рядов Грама – Шарлье. При $\mu_4 > 3$ в области $|\xi| < 3$ аппроксимации близки, при $\mu_4 < 3$ наблюдаются значительные расхождения. Для уточнения условий, в которых могут использоваться гауссовы смеси, необходимо прямое сопоставление с данными волновых измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Longuet-Higgins M. S. The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1963. Vol. 17, iss. 3. P. 459–480. <https://doi.org/10.1017/S0022112063001452>
2. Kwon O. K. Analytic expressions for the positive definite and unimodal regions of Gram-Charlier series // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 2022. Vol. 51, iss. 15. P. 5064–5084. doi:10.1080/03610926.2020.1833219
3. Cox C., Munk W. Measurements of the Roughness of the Sea Surface from Photographs of the Sun's Glitter // *Journal of the Optical Society of America*. 1954. Vol. 44. P. 838–850. <https://opg.optica.org/josa/abstract.cfm?URI=josa-44-11-838>
4. Bréon F. M., Henriot N. Spaceborne observations of ocean glint reflectance and modeling of wave slope distributions // *Journal of Geophysical Research. Oceans*. 2006. Vol. 111, iss. C6. C06005. <https://doi.org/10.1029/2005JC003343>
5. Pokazeev K. V., Zapevalov A. S., Pustovoytenko V. V. The simulation of a radar altimeter return waveform // *Moscow University Physics Bulletin*. 2013. Vol. 68. P. 420–425. <https://doi.org/10.3103/S0027134913050135>
6. Gao Z., Sun Z., Liang S. Probability density function for wave elevation based on Gaussian mixture models // *Ocean Engineering*. 2020. Vol. 213. 107815. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107815>
7. Teicher H. Identifiability of finite mixtures // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1963. Vol. 34, iss. 4. P. 1265–1269. doi: 10.1214/aoms/1177703862
8. Ray S., Ren D. On the upper bound of the number of modes of a multivariate normal mixture // *Journal of Multivariate Analysis*. 2012. Vol. 108. P. 41–52. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2012.02.006>
9. Améndola C., Engström A., Haase C. Maximum number of modes of Gaussian mixtures // *Information and Reference: A Journal of the IMA*. 2020. Vol. 9, iss. 3. P. 587–600. <https://doi.org/10.1093/imaiai/iaz013>
10. Tatarskii V. I. Multi-Gaussian Representation of the Cox–Munk Distribution for Slopes of Wind-Driven Waves // *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*. 2003. Vol. 20, iss. 11. P. 1697–1705. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(2003\)020<1697:MR0TCD>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(2003)020<1697:MR0TCD>2.0.CO;2)
11. Зapeвалов А. С., Патнер Ю. Б. Аналитическая модель плотности вероятностей уклонов морской поверхности // *Морской гидрофизический журнал*. 2003. № 1. С. 3–17.
12. Апрашова Н. Н., Сорокин С. В. Заметки о гауссовых смесях. Москва : Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2015. 144 с. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33609.34404>

13. *Aprausheva N. N., Sorokin S. V.* Exact equation of the boundary of unimodal and bimodal domains of a two-component Gaussian mixture // *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2013. Vol. 23. P. 341–347. <https://doi.org/10.1134/S1054661813030024>
14. *Запевалов А. С., Гармаишов А. В.* Появление отрицательных значений коэффициента асимметрии морских поверхностных волн // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2022. Т. 58, № 3. С. 310–317. <https://doi.org/10.31857/S0002351522030130>
15. *Pearson K.* Contributions to the mathematical theory of evolution // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. (A.). 1894. Vol. 185. P. 71–110. <https://doi.org/10.1098/rsta.1894.0003>
16. *Cohen A. C.* Estimation in Mixtures of Two Normal Distributions // *Technometrics*. 1967. Vol. 9, iss. 1. P. 15–28. doi: 10.1080/00401706.1967.10490438
17. *Carreira-Perpiñán M. Á.* Mode-finding for mixture of Gaussian distributions // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2000. Vol. 22, iss. 11. P. 1318–1323. doi:10.1109/34.888716
18. *Запевалов А. С., Гармаишов А. В.* Асимметрия и эксцесс поверхностных волн в прибрежной зоне Черного моря // *Морской гидрофизический журнал*. 2021. Т. 37, № 4. С. 447–459. <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2021-4-447-459>
19. *Бабанин А. В., Полников В. Г.* О негауссовости ветровых волн // *Морской гидрофизический журнал*. 1994. № 3. С. 79–82.
20. *Запевалов А. С., Большаков А. Н., Смоллов В. Е.* Моделирование плотности вероятностей возвышений морской поверхности с помощью рядов Грама – Шарлье // *Океанология*. 2011. Т. 51, № 3. С. 432–439.

Об авторах:

Запевалов Александр Сергеевич, главный научный сотрудник, отдел дистанционных методов исследований, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), доктор физико-математических наук, **Scopus Author ID: 7004433476**, **Web of Science ResearcherID: V-7880-2017**, sevzepter@mail.ru

Князьков Александр Сергеевич, ведущий инженер, центр коллективного пользования, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), **ORCID ID: 0000-0003-1119-1757**, fizfak83@yandex.ru