

Трансформация кинетической и потенциальной энергии при вытягивании мезомасштабного вихря

В. В. Жмур^{1,2,3}, В. С. Травкин^{1,✉}, Т. В. Белоненко¹,
Д. А. Арутюнян³

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

³ Московский физико-технический институт, Москва, Россия

✉ vtravkin99@gmail.com

Поступила в редакцию 12.04.2022; одобрена после рецензирования 27.05.2022;
принята к публикации 25.06.2022.

Аннотация

Цель. Вытягиванием мезомасштабного вихря мы называем процесс его удлинения, так что продольный масштаб становится больше поперечного. Целью данной работы является исследование трансформации энергии вихря, который в процессе эволюции изменяет свою форму путем вытягивания, а также верификация теории на основе сравнения результатов с оценками, полученными по натурным данным.

Методы и результаты. Теоретически установлено, что при вытягивании вихря уменьшаются его кинетическая и потенциальная энергия. Показано, что при деформации вихря баротропным потоком вертикальная полуось, а также произведение горизонтальных полуосей и, соответственно, эффективный радиус не изменяются. Отмечается, что в процессе эволюции в период 4–24 апреля 2012 г. вихрь, который изначально имел круглую форму в горизонтальном плане, вытягивается таким образом, что к концу периода его продольный масштаб в 4 раза превышает поперечный. При этом эффективный радиус в целом меняется незначительно, и его значения в начале и в конце жизненного цикла вихря близки по величине. Установлено, что увеличение параметра сплюснутости вихря связано с увеличением частоты Вэйсяля – Брента. Изменение энергии вихря при его трансформации анализируется в зависимости от параметров, характеризующих форму вихря, а также от частоты Вэйсяля – Брента. Верификация теоретических выводов проводится для мезомасштабного вихря, который был расположен в Лофотенской котловине Норвежского моря в период 4–24 апреля 2012 г. Анализ кинетической и потенциальной энергии проводится по данным океанического реанализа *GLORYS12V1*.

Выводы. Показано, что в целом потенциальная энергия вихря в 1,5 раза превышает его кинетическую энергию. При вытягивании вихря кинетическая энергия уменьшается в 3 раза, потенциальная – в среднем в 1,7 раза. Суммарная энергия вихря уменьшилась в 2,3 раза. Оценки коэффициентов уменьшения энергии вихря, сделанные на основе натурных данных, качественно подтверждают теоретические выводы. Некоторое несоответствие количественных оценок может быть обусловлено неточностью практического определения масштабов вихря по натурным данным.

Ключевые слова: мезомасштабные вихри, кинетическая и потенциальная энергия, кинетическая энергия, потенциальная энергия, вихрь, Лофотенский вихрь, вытягивание вихря, параметр сплюснутости, *GLORYS12V1*, Лофотенская котловина

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 22-27-00004 и по теме государственного задания ИО РАН № 0128-2021-0002.

Для цитирования: Трансформация кинетической и потенциальной энергии при вытягивании мезомасштабного вихря / В. В. Жмур [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т. 38, № 5. С. 466–480. doi:10.22449/0233-7584-2022-5-466-480

Transformation of Kinetic and Potential Energy during Elongation of a Mesoscale Vortex

V. V. Zhmur^{1,2,3}, V. S. Travkin^{1,✉}, T. V. Belonenko¹,
D. A. Arutyunyan³

¹ St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

² P. P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

³ Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

✉ vtravkin99@gmail.com

Abstract

Purpose. The process of mesoscale vortex stretching is called elongation so that its longitudinal scale becomes larger than the transverse one. The work is aimed at studying the energy transformation of a vortex that changes its shape by stretching during evolution, and also at verifying the theory by comparing the results with the estimates obtained from the field data.

Methods and Results. It is revealed theoretically that a vortex stretching is accompanied by a decrease in its kinetic and potential energy. It is shown that when a vortex is deformed by a barotropic flow, the vertical semi-axis, the product of the horizontal semi-axes, and, agreeably, the effective radius does not change. The vortex which initially had a round shape in the horizontal plane, in the process of its evolution on April 4–24, 2012 was noted to be stretched in such a way that by the end of the deformation period, its longitudinal scale became 4 times longer than the transverse one. At that, the effective radius changes insignificantly, and its values at the beginning and at the end of the vortex life cycle are close in magnitude. An increase in the vortex compression parameter is found to be related to an increase in the Väisälä – Brunt frequency. The change in the vortex energy during its transformation is analyzed depending both on the parameters characterizing the vortex shape, and on the Väisälä – Brunt frequency. The theoretical conclusions were verified using the mesoscale vortex located in the Lofoten basin (the Norwegian Sea) on April 4–24, 2012. The kinetic and potential energy was analyzed using the data of oceanic reanalysis *GLORYS12V1*.

Conclusions. It is shown that, in general, the vortex potential energy exceeds its kinetic one by 1.5 times. When the vortex is elongated, its kinetic energy decreases by 3 times, and its potential energy – on average by 1.7 times. The vortex's total energy has decreased by 2.3 times. The coefficient estimates of relative attenuation of different types of vortex energy inferred from *GLORYS12V1*, qualitatively confirm the theoretical conclusions. Some discrepancies in the quantitative estimates can be conditioned by inaccuracy in practical determining the vortex scales derived from the *in-situ* data.

Keywords: mesoscale vortex, kinetic and potential energy, kinetic energy, potential energy, vortex, Lofoten vortex, vortex elongation, oblateness parameter, *GLORYS12V1*, Lofoten basin

Acknowledgments: the work was carried out with financial support of the Russian Science Foundation, grant No. 22-27-00004, and within the framework of the state assignment of IO RAS on theme No. 0128-2021-0002.

For citation: Zhmur, V.V., Travkin, V.S., Belonenko, T.V. and Arutyunyan, D.A., 2022. Transformation of Kinetic and Potential Energy during Elongation of a Mesoscale Vortex. *Physical Oceanography*, 29(5), pp. 449-462. doi:10.22449/1573-160X-2022-5-449-462

Введение

В 1948 г. С. А. Чаплыгин опубликовал работу¹, в которой рассмотрел деформацию 2D-вихря Кирхгофа потоком с постоянным сдвигом. Позднее эти исследования были развиты для плоской гидродинамики в работе С. Кида [1], для 3D-вихрей – в работах В. В. Жмура и соавторов [2, 3], где рассмотрена

¹ Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. Т. 2. 643 с.
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 38 № 5 2022

динамика вихрей при различных фоновых условиях². Показано, что при деформации граница вихря имеет три варианта поведения: вращение, нутационные колебания и неограниченное вытягивание. Поведение вихря в баротропном фоновом потоке и в течениях с вертикальным сдвигом различное. При наличии фонового течения в определенных условиях вихрь, деформируясь, может быть вытянут в нить. В указанных теориях при деформации вихря его граница остается в 2D-случае эллиптической, в 3D-случае – эллипсоидальной. При вытягивании вихря в горизонтальном плане, т. е. при увеличении продольного размера относительно поперечного, индуцированное им движение жидкости уменьшается. С физической точки зрения режим неограниченного вытягивания соответствует уничтожению вихря течением.

Целью данной работы является исследование энергии вихря при его трансформации путем вытягивания, а также верификация теории на основе сравнения результатов с оценками, полученными по натурным данным.

Уменьшение орбитальных скоростей влечет за собой уменьшение кинетической энергии вихря. Однако оказалось, что при вытягивании вихря также уменьшается и потенциальная энергия.

Полная энергия вихря в океане H определяется по формуле

$$H = \frac{1}{2} \iiint \left[\rho_{\Sigma}(x, y, z) (u^2(x, y, z) + v^2(x, y, z)) + \frac{g^2}{\rho_0(z)} \frac{\rho^2(x, y, z)}{N^2(x, y, z)} \right] dx dy dz, \quad (1)$$

где ρ_0 – средняя плотность морской воды по глубине моря; u и v – зональная и меридиональная компоненты скорости потока; g – ускорение свободного падения; N – частота Вайсяля – Брента; $\rho = (\rho_{\Sigma} - \rho_0)$ – отклонение текущей плотности ρ_{Σ} от ρ_0 . Границы интегрирования определяются масштабами вихря [4], горизонтальные границы определяются по изолиниям нулевой относительной

завихренности $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$; по глубине интеграл берется от 0 до 1000 м. Первое

слагаемое в формуле (1) – кинетическая энергия, второе – доступная потенциальная энергия вихря.

Формулы преобразования

Безразмерный параметр ε характеризует степень вытягивания вихря и определяется через отношение его горизонтальных масштабов $\varepsilon = \frac{a}{b} \geq 1$, где

a, b – горизонтальные полуоси ядра эллипсоида: a – большая, b – малая полуось; c – вертикальная полуось вихря. При помощи c вводится безразмерный

параметр вертикальной сплюснутости ядра вихря: $K = \frac{N c}{f r_0}$, где $r_0 = \sqrt{ab}$ –

² Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика полуэллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. XXIX, вып. 2. С. 205–211; Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика мезомасштабного вихревого образования в поле течения крупного интенсивного вихря // Океанология. 1990. Т. 30, вып. 2. С. 170–178; Жмур В. В., Панкратов К. К. Дальнее взаимодействие ансамбля квазигеострофических вихрей. Гамильтонова формулировка // Известия Академии наук. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 9. С. 972–981.

эффективный радиус вихря; f – параметр Кориолиса; N – средняя по глубине в слое 0–1000 м частота Вайсяля – Брента. Установлено, что при деформации вихря баротропным потоком вертикальная полуось, а также произведение полуосей a, b и, соответственно, r_0 не изменяются. Следовательно, параметр вертикальной сплюснутости ядра K также сохраняется при деформации вихря баротропным потоком [2]. Однако последнее верно при предположении о неизменности частоты Вайсяля – Брента. Если эта частота во время жизненного цикла вихря изменяется, то, соответственно, будет меняться и параметр вертикальной сплюснутости ядра вихря K .

При помощи нетривиальных преобразований формула для энергии (1) может быть преобразована в виде зависимости от ε и параметра сплюснутости K , причем существуют несколько эквивалентных вариантов формул зависимости полной энергии вихря как функции от (ε, K) [2, 5–12]. Ниже приведены два варианта энергетических соотношений, тождественных друг другу:

$$H(\varepsilon, K) = \frac{2}{15} \pi \rho_0 r_0^3 c^2 \sigma^2 \frac{N}{f} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 + \nu\mu + 1)(K^2 + \mu)}}, \quad (2)$$

$$H(\varepsilon, K) = \frac{3}{40\pi} \rho_0 \frac{V_0^2 \sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 + \nu\mu + 1)(K^2 + \mu)}}, \quad (3)$$

здесь σ – потенциальная завихренность по Россби [3]; $\nu = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \geq 2$ – еще один

безразмерный параметр горизонтального удлинения вихря; $V_0 = \frac{4}{3} \pi abc$ –

объем вихревого ядра. В системе координат с двумя горизонтальными осями (x, y) и вертикальной осью z потенциальная завихренность σ выражается через функцию тока $\psi(x, y, z, t)$, где t – время [13]:

$$\sigma = \Delta_h \psi(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z}.$$

Здесь $\Delta_h \psi = \text{rot}_z \vec{u}$. В общем случае частота Вайсяля – Брента $N(z)$ зависит от вертикальной координаты z . Чем длиннее вихрь, тем больше ε и ν . Таким образом, длинным вихрям соответствуют очень большие значения ε и ν и следовательно – меньшая энергия.

Формулы (2) и (3) учитывают полную энергию вихря, включая кинетическую и доступную потенциальную энергию ядра, а также энергию внешней жидкости, захваченной в движение вихря. Теория эллипсоидальных вихрей [2] позволяет рассчитать отдельно кинетическую, доступную потенциальную и полную энергию ядра вихря. Общая механическая энергия H_{core} , а также кинетическая H_{core}^k и доступная потенциальная энергия вихря H_{core}^p , заключенная в объеме вихревого ядра, могут быть представлены как функции параметров

(ε, K). В результате аналитических расчетов на выходе получим следующие соотношения:

– кинетическая энергия вихревого ядра

$$H_{core}^k(\varepsilon, K) = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 a b K^2 \left\{ \left(\varepsilon \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

– доступная потенциальная энергия вихревого ядра

$$H_{core}^p(\varepsilon, K) = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 a b K^4 \left(\int_0^\infty \frac{1}{K^2 + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2, \quad (5)$$

– механическая энергия вихревого ядра

$$H_{core} = H_{core}^k + H_{core}^p,$$

где

$$H_{core}(\varepsilon, K) = \frac{1}{40} \rho_0 \sigma^2 V_0 a b K^2 \left\{ \left(\varepsilon \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 + \left. + K^2 \int_0^\infty \frac{1}{K^2 + \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(\varepsilon + \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mu \right) (K^2 + \mu)}} \right)^2 \right\}. \quad (6)$$

Согласно теории, при удлинении вихря баротропным потоком изменяются только ν или ε в интегралах (2) – (6), а все остальные характеристики не изменяются. При удлинении вихря знаменатель в подынтегральной функции растет, значит, сам интеграл при удлинении уменьшается. Это означает, что при вытягивании вихря уменьшается как кинетическая, так и доступная потенциальная энергия, а также механическая энергия вихревого ядра. Максимальное значение энергии (2) – (6) при фиксированном K соответствует круглым в плане вихрям с $\varepsilon = 1$ или $\nu = 2$. При изменении фоновой частоты Вайсяля – Брента будет меняться и параметр K .

Для исследования рассматривается эволюция мезомасштабного вихря, расположенного в Лофотенской котловине Норвежского моря. Будучи топографически обособленным районом, Лофотенская котловина формирует благоприятные условия для генерации множества мезомасштабных вихрей [14, 15]. Вихри извлекают из ветвей Норвежского течения часть теплой и соленой атлантической воды и перераспределяют ее по всей котловине³. За счет вихревой активности Лофотенская котловина является одним из самых динамически активных регионов Мирового океана⁴. Ее энергетика рассматривалась в работе [16].

Среди множества мезомасштабных вихрей Лофотенской котловины для анализа был выбран вихрь, который в процессе своего жизненного цикла существенно изменяет свою форму. Исследуемый вихрь существовал 4–24 апреля 2012 г. и в течение трех недель эволюции изменял форму от круглой в горизонтальном плане до вытянутой, так что его продольный масштаб становился больше поперечного в несколько раз. В работе анализируются графики кинетической и потенциальной энергии вихря и другие характеристики.

Данные и метод идентификации

Для исследования используются данные глобального океанического реанализа *GLORYS12V1*. Массив предоставляется Морской службой Коперникус (*Copernicus Marine Service – CMEMS*). Данные имеют пространственное разрешение $1/12^\circ$ по широте и долготе и 50 уровней по вертикали, что позволяет успешно использовать их для изучения мезомасштабных структур Мирового океана. Реанализ *GLORYS12V1* ассимилирует вдольтрековые данные с альтиметров высокого разрешения, а также спутниковые наблюдения температуры поверхности моря, концентрации морского льда и *in situ* профилей температуры и солености. Основой реанализа является модель *NEMO*, где реанализ *ECMWF ERA-Interim* используется в качестве форсинга. Временное разрешение данных составляет одни сутки.

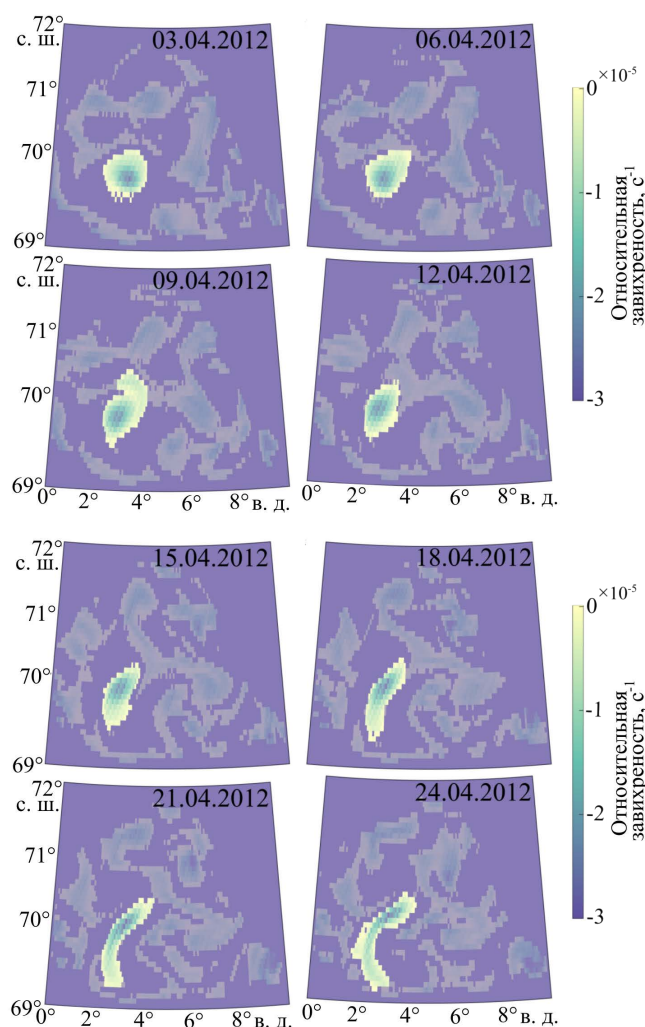
Так как данные *GLORYS12V1* широко используют ассимиляцию спутниковой и *in situ* информации, в работе они называются «натурными».

³ Evaluation of heat and salt transports by mesoscale eddies in the Lofoten Basin / T. Belonenko [et al.] // Russian Journal of Earth Sciences. 2020. Vol. 20, no. 6. ES6011. doi:10.2205/2020ES000720

⁴ Volkov D. L., Belonenko T. V., Foux V. R. Puzzling over the dynamics of the Lofoten Basin – a sub-Arctic hot spot of ocean variability // Geophysical Research Letters. 2013. Vol. 40, iss. 4. P. 738–743. <http://dx.doi.org/10.1002/grl.50126>

Результаты

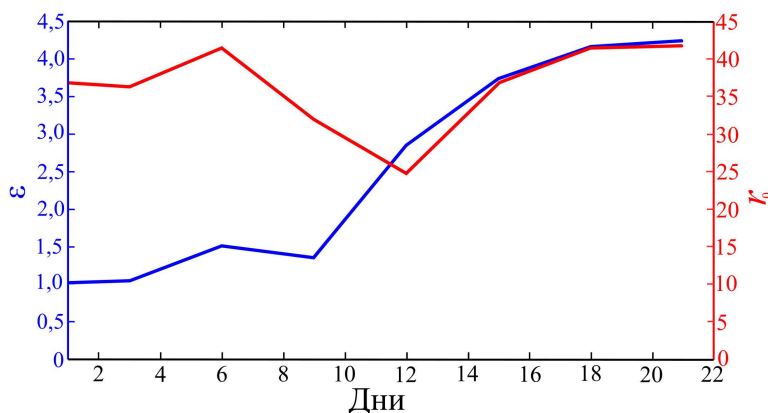
На рис. 1 показан жизненный цикл мезомасштабного антициклонического вихря в Лофотенской котловине в терминах относительной завихренности. Для визуализации области анализируемого вихря и исключения фрагментов других гидродинамических структур были построены маски для каждого момента времени. Последовательность изображений позволяет проследить эволюцию вихря, в которой происходит вытягивание его формы. Видно, что в начале цикла, 4 апреля 2012 г., вихрь круглый в горизонтальном плане, но постепенно он начинает вытягиваться, так что к 18 апреля его длина в несколько раз превышает ширину. К 21 апреля 2012 г. вихрь еще более вытягивается в продольном направлении, а к 24 апреля, выгибаясь под влиянием течений, на горизонте вихрь имеет форму подковы.



Р и с. 1. Эволюция вихря в Лофотенской котловине в период 3–24 апреля 2012 г. Шкала показывает значения относительной завихренности, горизонт 541 м

F i g. 1. Vortex evolution in the Lofoten basin on April 3–24, 2012. The scale shows the relative vorticity values; the horizon is 541 m

На рис. 2 представлены характеристики вихря: параметр вытянутости и эффективный радиус $r_0 = \sqrt{ab}$. В начальный момент вихрь круглый и $\varepsilon = 1$. В процессе жизненного цикла вихрь постепенно вытягивается, так что его продольный масштаб становится больше поперечного в 4 раза. Отметим, однако, что при этом эффективный радиус в целом меняется незначительно, и его значения в начале и в конце жизненного цикла вихря близки по величине.



Р и с. 2. Безразмерный параметр вытянутости вихря по горизонтали ε (синяя кривая) и его эффективный радиус $r_0 = \sqrt{ab}$ (красная кривая). По оси x показаны дни жизненного цикла вихря от начала измерений в период 4–24 апреля 2012 г.

F i g. 2. Dimensionless parameter of the vortex horizontal elongation ε (blue curve) and its effective radius $r_0 = \sqrt{ab}$ (red curve). The x -axis shows the days of the vortex life cycle from the beginning of measurements on April 4–24, 2012

На рис. 3 показаны частота Вэйсяля – Брента и безразмерный параметр вертикальной сплюснутости вихревого ядра (в расчетах вертикальная полуось принималась равной 400 м) [13]. Видно, что в процессе жизненного цикла обе характеристики увеличиваются. Увеличение частоты Вэйсяля – Брента, возможно, связано с периодом наблюдения (апрель), т. е. жизненный цикл вихря протекает в период перехода от зимней стратификации вод к летней. В начале жизненного цикла в вихре еще сохраняется зимняя стратификация с влиянием зимней конвекции, в то время как к концу цикла происходит усиление стратификации вод⁵ и увеличение частоты N [16].

Покажем, что увеличение параметра K связано с увеличением частоты Вэйсяля – Брента N . Выразим размер вертикальной полуоси c через объем ядра вихря V_0 и параметр $r_0 = \sqrt{ab}$. В результате получим соотношение

$$K = \frac{N}{f} \frac{3V_0}{4\pi r_0^3}. \quad (7)$$

⁵ Федоров А. М., Баимачников И. Л., Белоненко Т. В. Зимняя конвекция в Лофотенской котловине по данным буев ARGO и гидродинамического моделирования // Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле. 2019. Т. 64, № 3. С. 491–511. <https://doi.org/10.21638/spbu07.2019.308>

Согласно оценкам, представленным на рис. 2, характерный эффективный радиус r_0 хотя и незначительно, но меняется в процессе деформации вихря, однако его начальное и конечное значения почти совпадают. Естественно полагать, что объем ядра вихря V_0 тоже не меняется (или меняется незначительно). В результате получается, что единственный параметр, из-за которого может измениться K , это частота Вэйсälä – Брента N . Из графика на рис. 3 видно, что параметр K увеличивается практически синфазно с частотой Вэйсälä – Брента, что также подтверждается формулой (7). Это дает основания считать, что рост K обусловлен исключительно увеличением N .

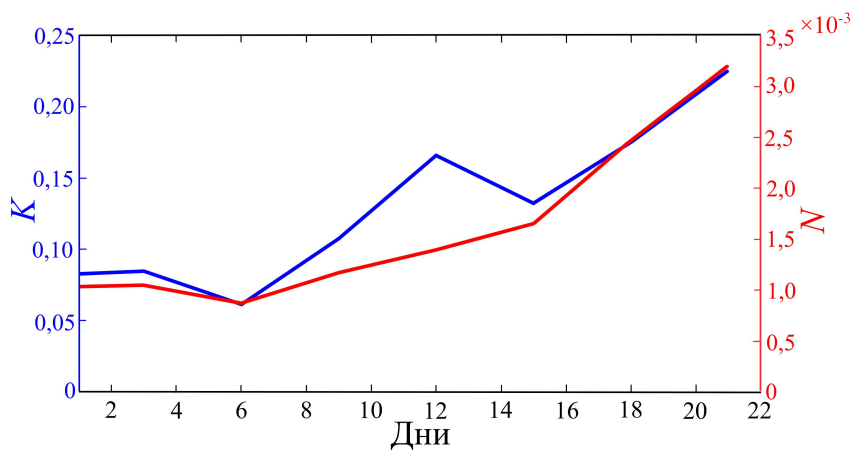
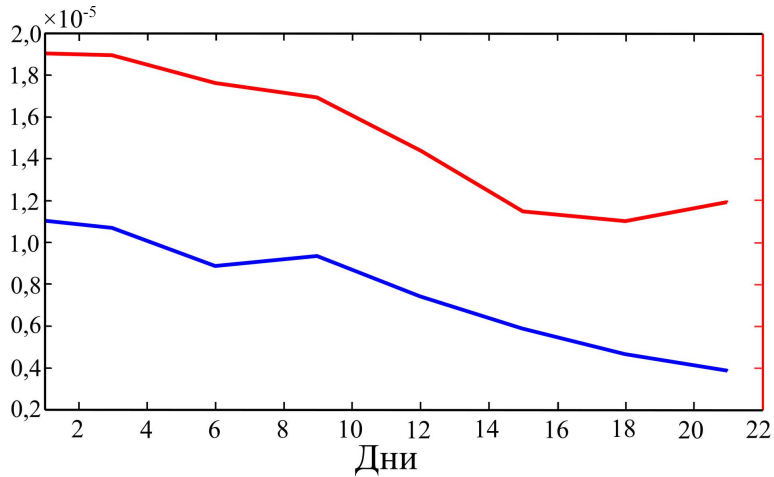


Рис. 3. Безразмерный параметр вертикальной сплюснутости вихревого ядра K (синяя кривая) и частота Вэйсälä – Брента N (красная кривая). По оси абсцисс показаны дни жизненного цикла вихря от начала измерений в период 4–24 апреля 2012 г.

Fig. 3. Dimensionless parameter of the vortex core vertical oblateness K (blue curve) and the Väisälä – Brunt frequency N (red curve). The abscissa axis shows the days of the vortex life cycle from the beginning of measurements on April 4–24, 2012

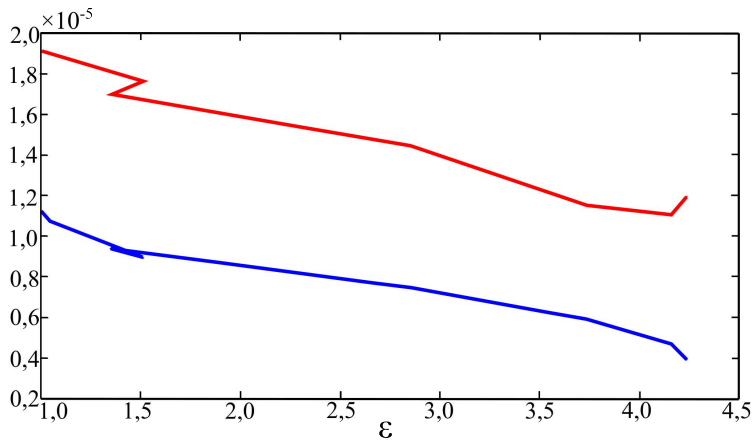
Далее мы анализируем по отдельности оценки первого (кинетическая энергия) и второго (потенциальная энергия) слагаемых в формуле (1). В горизонтальном плане область интегрирования ограничена областью вихря (см. рис. 1), по глубине интеграл традиционно берется в диапазоне 0–1000 м (см. обзор в [16]).

Результаты представлены на рис. 4. Видно, что потенциальная энергия вихря в 1,5 раза превышает его кинетическую энергию. Отметим, что в течение жизненного цикла вихря его энергия уменьшается, причем кинетическая энергия уменьшается в 3 раза, потенциальная – в среднем в 1,7 раза. Суммарная энергия вихря уменьшилась в 2,3 раза. Это уменьшение энергии связано с изменением формы вихря и его вытягиванием. Меньшая скорость уменьшения потенциальной энергии по сравнению с кинетической, очевидно, связана с частотой Вэйсälä – Брента, увеличение которой к концу периода замедляет уменьшение потенциальной энергии вихря.



Р и с. 4. Кинетическая (синяя кривая) и потенциальная (красная кривая) энергия вихря (Дж). По оси x показаны дни жизненного цикла вихря от начала измерений в период 4–24 апреля 2012 г.
F i g. 4. Kinetic (blue curve) and potential (red curve) energy of the vortex (J). The x -axis shows the days of the vortex life cycle from the beginning of measurements on April 4–24, 2012

На рис. 5 показано изменение потенциальной и кинетической энергии вихря в зависимости от его вытянутости ε по горизонтали. Судя по графикам, энергия уменьшается (практически линейно) с увеличением параметра вытянутости.



Р и с. 5. Зависимость кинетической (синяя кривая) и потенциальной (красная кривая) энергии от безразмерного параметра горизонтальной вытянутости ε по натурным данным
F i g. 5. Dependence of kinetic (blue curve) and potential (red curve) energy on the dimensionless parameter of horizontal elongation ε inferred from the *in-situ* data

Согласно рис. 4 и 5, полная энергия вихря при его вытягивании уменьшилась примерно в 2,3 раза. Попробуем теперь, исходя из теоретических соображений, оценить степень уменьшения энергии вихря $H(\varepsilon, K)$ за счет изменения ε и K . За рассмотренный жизненный цикл вихрь в плоскости параметров

(ε, K) переместился из точки (1; 0,08) в точку (4,3; 0,23). Согласно расчетам по натурным данным (на основе реанализа *GLORYS12V1*), отношение конечной энергии к ее начальному значению составляет величину $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)} = \frac{1}{2,3} = 0,43$.

Рассчитаем конечную энергию вихря, нормированную на ее начальное значение, по формулам (2), (3) с учетом (4). В результате получим $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)} = 0,80$. Как

видим, расчетное теоретическое значение $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)}$ отличается от его прак-

тической оценки почти в два раза при качественном соответствии и уменьшении энергии вихря при его вытягивании. Аналогично рассчитаем уменьшение энергии ядра вихря $H_{core}(\varepsilon, K)$ при изменении параметров (ε, K) согласно формуле (6) с учетом (7) с нормировкой на начальное значение энергии ядра: $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)} = 0,53$. Как видим, при учете только энергии вихревого ядра по-

тери относительной энергии 0,53 стали существенно ближе к ее практическому значению 0,43. Разницу можно объяснить тем, что, по-видимому, при вычислении энергии по натурным данным учитывалась в основном энергия ядра, а энергия внешней вращающейся жидкости игнорировалась.

Расчет изменения относительной кинетической энергии ядра, согласно теоретическому соотношению (4), дает значение $\frac{H_{core}^k(4,3;0,23)}{H_{core}^k(1;0,08)} = 0,53$, его

оценка по натурным данным составляет 0,33. Аналогичное теоретическое изменение доступной потенциальной энергии, согласно (5), составляет $\frac{H_{core}^p(4,3;0,23)}{H_{core}^p(1;0,08)} = 0,54$. Аналогичная оценка по натурным данным 0,59. Оценки

коэффициентов относительного уменьшения энергии вихря приведены в таблице.

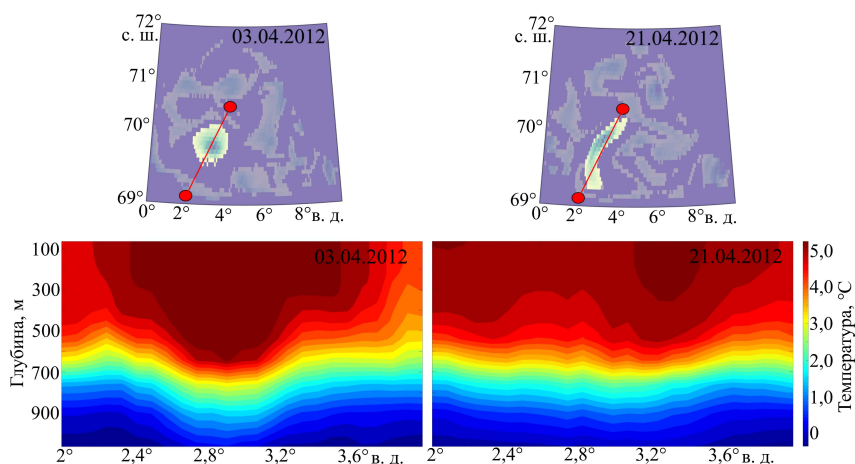
Таким образом, можно сделать качественный вывод об уменьшении всех видов энергии вихря при его удлинении. Это верно как теоретически, так и согласно натурным данным. Что касается количественных оценок, то о почти полном совпадении теоретических и практических расчетов можно говорить, когда оценивается энергия ядра вихря. Наибольшее отличие теоретических и практических оценок наблюдается в изменении общей энергии вихря. Некоторые количественные отличия оценок могут быть связаны с неточностью практического определения масштабов вихря по натурным данным.

Оценки коэффициентов относительного ослабления различных типов энергии вихря при его переходе по параметрам (ε, K) из состояния $(1; 0,08)$ в $(4,3; 0,23)$
Coefficient estimates of relative attenuation of different types of vortex energy during its transition by the parameters (ε, K) from the state $(1; 0.08)$ to the state $(4.3; 0.23)$

Относительная общая энергия вихря $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)}$ / The relative total energy of the vortex $\frac{H(4,3;0,23)}{H(1;0,08)}$	Относительная общая энергия ядра вихря $\frac{H_{core}(4,3;0,23)}{H_{core}(1;0,08)}$ / The relative total energy of the vortex core $\frac{H_{core}(4,3;0,23)}{H_{core}(1;0,08)}$	Относительная кинетическая энергия ядра вихря $\frac{H_{core}^k(4,3;0,23)}{H_{core}^k(1;0,08)}$ / The relative kinetic energy of the vortex core $\frac{H_{core}^k(4,3;0,23)}{H_{core}^k(1;0,08)}$	Относительная доступная потенциальная энергия ядра вихря $\frac{H_{core}^p(4,3;0,23)}{H_{core}^p(1;0,08)}$ / The Relative available potential energy of the vortex core $\frac{H_{core}^p(4,3;0,23)}{H_{core}^p(1;0,08)}$
По натурным данным / Based on <i>in-situ</i> data			
	0,43	0,33	0,59
Теория / Theory			
0,80	0,53	0,53	0,54

Трансформация ядра вихря при его вытягивании также подтверждается анализом изменения термохалинных характеристик вихря в процессе его эволюции. На рис. 6, где представлены температурные профили в вихре (продольные разрезы), видно, что при вытягивании вихря область ядра, ограниченная значениями 5°C , сжимается в несколько раз. И если в начальный момент времени (4 апреля 2012 г.), когда вихрь еще имел круглую форму, изотерма 5°C распространялась до 600 м, то к 21 апреля она простирается до ~ 300 м, т. е. область, ограниченная этой изотермой, сокращается по глубине вдвое. В то же время область ядра, ограниченная изотермой $4,5^{\circ}\text{C}$, наоборот, растягивается вдоль вихря в продольном направлении при его вытягивании. Похожие изменения характеризуют и расположение изопикн на разрезах (не показаны). Отметим, что на рис. 6 вихрь представляет собой не эллипсоид, а, скорее, полуэллипсоид, однако в этом никакого противоречия нет, так как теория эллипсоидальных вихрей распространяется и на случаи подповерхностных вихрей, когда в качестве модели вихря рассматривается полуэллипсоид (см., напр., [13]).

Таким образом, наряду с уменьшением кинетической и потенциальной энергии в вихре происходит трансформация ядра, при которой область с максимальными значениями уменьшается в размерах, но растягивается с меньшими значениями температуры в продольном направлении вихря.



Р и с. 6. Температурные профили (вертикальные разрезы) (°C) в вихре за 3 и 21 апреля 2012 г.
Fig. 6. Temperature profiles (vertical sections) (°C) in the vortex for April 3 and 21, 2012

Выводы

В работе анализируется трансформация энергии мезомасштабного вихря, который в процессе эволюции изменяет свою форму путем вытягивания. Из анализа формул следует, что при такой трансформации уменьшается его кинетическая и доступная потенциальная энергия. Также установлено, что при деформации вихря баротропным потоком произведение горизонтальных полуосей и, соответственно, эффективный радиус изменяются незначительно. Изменение энергии вихря при его трансформации анализируется в зависимости от следующих параметров: ϵ , характеризующего отношение его горизонтальных осей, и $K = \frac{N c}{f r_0}$ – параметра сплюснутости вихря. Общая механическая

энергия вихря и отдельно его кинетическая и доступная потенциальная энергия, заключенные в объеме вихревого ядра, рассматриваются как функции параметров (ϵ , K). Экспериментально доказано уменьшение энергии при увеличении ϵ .

Для верификации теоретических выводов проанализирована эволюция энергии мезомасштабного вихря, расположенного в Лофотенской котловине Норвежского моря. Исследование проводилось по данным реанализа *GLORYS12V1*. Показано, что в процессе эволюции в период 4 – 24 апреля 2012 г. вихрь, который изначально имел круглую форму в горизонтальном плане, вытягивается, так что его продольный масштаб в 4 раза превышает поперечный. Отметим, однако, что при этом эффективный радиус в целом меняется незначительно, и его значения в начале и в конце жизненного цикла вихря близки по величине. Установлено, что увеличения параметра K рассматриваемого вихря связано с увеличением частоты Вайсяля – Брента N .

Сравнение графиков кинетической и потенциальной энергии показывает, что потенциальная энергия вихря в 1,5 раза превышает его кинетическую энергию. Уменьшение энергии в процессе трансформации вихря происходит по-

разному: кинетическая энергия уменьшается в 3 раза, потенциальная – в среднем в 1,7 раза. Суммарная энергия вихря уменьшилась в 2,3 раза. Это уменьшение энергии связано с изменением формы вихря и его вытягиванием. Отмечается почти линейное уменьшение потенциальной и кинетической энергии вихря в зависимости от параметра вытянутости ϵ . Оценки коэффициентов относительного ослабления различных типов энергии вихря при его переходе по параметрам (ϵ , K), сделанные на основе натурных данных, качественно подтверждают теоретические выводы. Неполное соответствие количественных оценок может быть обусловлено неточностью практического определения масштабов вихря по натурным данным.

Теория эллипсоидальных вихрей – на сегодня единственная теория, позволяющая провести аналитическое исследование вихрей в океане. При этом анализируемые характеристики, например энергия, описываются громоздкими интегралами. Если отказаться от представлений о мезомасштабных вихрях как эллипсоидальных, то мы будем иметь дело с интегро-дифференциальными уравнениями, которые невозможно не только решать, но и с их помощью даже проводить какие-либо оценки. Вместе с тем мы уверены, что использование теории эллипсоидальных вихрей имеет хорошие перспективы для анализа, в частности, мезомасштабных антициклонов в океане, и показали это в ряде работ. Однако мы отдаем себе отчет в том, что такой анализ ограничен качеством данных, с одной стороны, и представлениями о вихрях как о неких идеальных геометрических телах – с другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kida S.* Motion of an Elliptic Vortex in Uniform Shear Flow // *Journal of Physical Society of Japan.* 1981. Vol. 50, iss. 10. P. 3517–3520. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3517>
2. *Жмур В. В.* Мезомасштабные вихри океана. М. : ГЕОС, 2010. 290 с.
3. *Жмур В. В., Новоселова Е. В., Белonenko Т. В.* Потенциальная завихренность в океане: подходы Эртеля и Россби с оценками для Лофотенского вихря // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана.* 2021. Т. 57, № 6. С. 721–732. doi:10.31857/S0002351521050151
4. *Sandalyuk N. V., Bosse A., Belonenko T. V.* The 3-D Structure of Mesoscale Eddies in the Lofoten Basin of the Norwegian Sea: A Composite Analysis from Altimetry and In Situ Data // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* 2020. Vol. 125, iss. 10. e2020JC016331. <https://doi.org/10.1029/2020JC016331>
5. О мезомасштабных неоднородностях океана / Ю. А. Иванов [и др.] // *Доклады Академии наук СССР.* 1986. Т. 289, № 3. С. 706–709.
6. *Гидрофизические исследования по программе «Мезополигон».* М. : Наука, 1988. 263 с.
7. *Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С.* Синоптические вихри в океане. Л. : Гидрометеоиздат, 1987. 509 с.
8. *Коротяев Г. К.* Теоретическое моделирование синоптической изменчивости океана. Киев : Наукова думка, 1988. 157 с.
9. *Коротяев Г. К., Чепурин Г. А.* Модель динамики изолированного бароклинного вихря // *Вопросы динамики океана.* Л. : Гидрометеоиздат, 1984. С. 143–156.
10. *McWilliams J. C.* Submesoscale, coherent vortices in the ocean // *Reviews of Geophysics.* 1985. Vol. 23. P. 165–182. doi:10.1029/RG023i002p00165
11. *Polvani L. M., Flierl G. R.* Generalized Kirchhoff vortices // *The Physics of Fluids.* 1986. Vol. 29, iss. 8. P. 2376–2379. <https://doi.org/10.1063/1.865530>

12. *Meacham S. P.* Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in stratified fluid // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1992. Vol. 16, iss. 3–4. P. 189–223. [https://doi.org/10.1016/0377-0265\(92\)90007-G](https://doi.org/10.1016/0377-0265(92)90007-G)
13. *Жмур В. В., Новоселова Е. В., Белоненко Т. В.* Особенности формирования поля плотности в мезомасштабных вихрях Лофотенской котловины. Часть 2 // *Океанология*. 2022. Т. 62, № 3. С. 341–356. doi:10.31857/S0030157422030170
14. Statistical analysis of long-lived mesoscale eddies in the Lofoten basin from satellite altimetry / S. Gordeeva [et al.] // *Advances in Space Research*. 2021. Vol. 68, iss. 2. P. 364–377. doi:10.1016/j.asr.2020.05.043
15. Analysis of mesoscale eddies in the Lofoten Basin based on satellite altimetry / V. A. Zinchenko [et al.] // *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2019. Vol. 12, iss. 3. P. 46–54. doi:10.7868/S2073667319030067
16. *Травкин В. С., Белоненко Т. В.* Исследование вихревой изменчивости в Лофотенской котловине на основе анализа доступной потенциальной и кинетической энергии // *Морской гидрофизический журнал*. 2021. Т. 37, № 3. С. 318–332. doi:10.22449/0233-7584-2021-3-318-332

Об авторах:

Жмур Владимир Владимирович, руководитель лаборатории, главный научный сотрудник, ИО РАН им. П. П. Ширшова (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36), доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, **ORCID ID: 0000-0001-8217-0932**, **WoS ResearcherID: P-9738-2015**, **Scopus Author ID: 6602162918**, zhmur-vladimir@mail.ru

Травкин Владимир Станиславович, инженер-исследователь, кафедра океанологии, СПбГУ (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9), v.travkin@spbu.ru

Белоненко Татьяна Васильевна, профессор, кафедра океанологии, СПбГУ (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9), доктор географических наук, **ORCID ID: 0000-0003-4608-7781**, **WoS ResearcherID: K-2162-2013**, **Scopus Author ID: 6507005889**, t.v.belonenko@spbu.ru

Арутюнян Давид Арменович, аспирант Московского физико-технического института (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9), arutyunyan.da@phystech.edu