

## Транспортные свойства внутренних волн

В приближении Буссинеска асимптотическим методом многомасштабных разложений определяются средние течения, индуцированные внутренней волной за счет нелинейности при учете турбулентной вязкости и диффузии. Получены погранслоиные решения, декремент затухания волны, тангенциальные напряжения у дна. Находится донная концентрация взвешенных волной наносов, когда тангенциальные напряжения превышают критические значения, соответствующие началу движения наносов. В диффузионном приближении определяется вертикальное распределение концентрации наносов, взвешенных волной.

### Введение

Исследование волнового массопереноса в придонном слое моря в настоящее время приобрело особую актуальность в связи с важной ролью процессов седиментации и осадконакопления на шельфе, которые необходимо учитывать при строительстве и эксплуатации буровых платформ, донных транспортных магистралей и трубопроводов. Транспорт наносов обычно связывают с поверхностными волнами, однако их влияние распространяется до глубин, составляющих половину длины волны [1], для Черного моря – 20 – 30 м. На больших глубинах сильно проявление внутренних и топографических волн. В работах [2, 3] определялись средние течения, индуцированные пакетами внутренних волн за счет нелинейности без учета турбулентной вязкости и диффузии. Физической причиной существования средних течений являются волновые напряжения [4], которые отличны от нуля при зависимости огибающей от пространственно-временных координат. Индуцированные эйлеровы течения следует отличать от скорости стокова дрейфа, который присутствует и в слабонелинейной плоской волне [5, 6]. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из эйлеровой скорости индуцированного среднего течения и скорости стокова дрейфа [6, 7]. В предельном случае слабонелинейной плоской волны вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа равна нулю. Учет турбулентной вязкости и диффузии при-

водит к тому, что волновое напряжение  $\frac{\partial u_1 u_3}{\partial x_3}$  и вертикальная компонента

скорости стокова дрейфа в слабонелинейной плоской волне отличны от нуля [8]. При этом определялись вертикальные потоки тепла, соли, импульса [8]. В настоящей работе находятся средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности при учете турбулентной вязкости и диффузии. В придонном пограничном слое сильные сдвиги волновой скорости обуславливают большие тангенциальные напряжения, которые приводят к взмучиванию донных осадков. Если тангенциальные напряжения у дна превышают критические значения, соответствующие началу движения наносов, волна взмучивает донный осадочный материал, осуществляя его перенос. В данной работе перенос наносов связывается со средними течениями, индуцированными внутренней волной за счет нелинейности.

## Постановка задачи

Рассматриваются свободные внутренние волны в приближении Буссинеска при реальной стратификации и учете коэффициентов турбулентного обмена.

Исходная нелинейная система уравнений гидродинамики для волновых возмущений при учете турбулентной вязкости и диффузии решается асимптотическим методом многомасштабных разложений [2] с введением «медленных» переменных  $\xi = \varepsilon^2 x$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$ , функцией которых является огибающая ( $\varepsilon$  – крутизна волны). В первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение. Следуя асимптотическому методу Люстерника – Вишика [9, 10], находим пограничное решение, обусловленное турбулентной вязкостью, и декремент затухания волны на турбулентности. Во втором порядке малости по крутизне волны решаются краевые задачи по определению вертикальной структуры второй гармоники и неосциллирующей поправки к функции тока, обусловленной нелинейностью.

Принимая в качестве исходных уравнений для волновых возмущений уравнение Навье – Стокса для неоднородной жидкости, введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\omega_*}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{H}, \quad \tilde{\omega} = \omega_* \omega, \quad \tilde{u}_1 = u_1 H \omega_*, \quad \tilde{u}_3 = u_3 H \omega_*, \quad \tilde{P} = \bar{\rho}_0 H^2 \omega_*^2 P, \\ \tilde{\rho} &= \bar{\rho}_0 \omega_*^2 \frac{H \rho}{g}, \quad \tilde{x}_i = H x_i, \quad \tilde{K}_i = K_i \mu, \quad \tilde{M}_i = M_i \mu \quad (i = 1, 3). \end{aligned}$$

Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в безразмерных переменных в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 K_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \varepsilon_2^2 K_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \varepsilon_2^2 K_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + 2\varepsilon_2^2 \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \rho, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \varepsilon_2^2 M_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( M_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) - u_3 \frac{d\rho_0}{dx_3}, \quad (1в)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1г)$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение силы тяжести;  $x_1, x_3$  – горизонтальная и вертикальная координаты, вертикальная ось направлена вверх;  $\rho$  и  $P$  – волновые возмущения плотности и давления;  $\bar{\rho}_0$  – характерная средняя плотность воды;  $u_1, u_3$  – горизонтальная и вертикальная компоненты волновых возмущений скорости;  $K_1, K_3, M_1, M_3$  – горизонтальные и вертикальные коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии соответственно;  $H$  – глубина океана;

$\omega_*$  – характерная частота волны;  $\varepsilon_2^2 = \frac{\mu}{H^2 \omega_*}$  – малый параметр, пропорциональный  $\mu$  – значению горизонтальной турбулентной вязкости.

В качестве граничных условий на свободной поверхности используем кинематическое и динамическое условия:

$$-P + \eta g_1 + 2\varepsilon_2^2 K_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2a)$$

$$K_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + K_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad (2б)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = u_3, \quad (2в)$$

где  $\eta$  – вертикальное смещение свободной поверхности;  $g_1 = \frac{g}{\omega_*^2 H}$ . Первые два условия определяют отсутствие нормальных и тангенциальных напряжений на свободной поверхности.

На дне приемем условие прилипания

$$u_3(-1) = u_1(-1) = 0. \quad (3a)$$

Граничные условия по плотности при  $x_3 = 0$ :

$$\rho(0) + \eta \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad (3б)$$

где  $\zeta_3 = \eta$  – возвышение свободной поверхности; на дне

$$\rho(-1) = 0. \quad (3в)$$

Пусть  $\psi(x_1, x_3, t)$  – функция тока, которая определяет поле волновых орбитальных скоростей. Волновые возмущения компонент скорости выразим через  $\psi$ :

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (4)$$

Система уравнений (1) после данной подстановки преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J_{x_1, x_3}(\Delta \psi, \psi) = \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (K_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (K_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}) \right] + \\ + \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (K_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (K_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}) \right], \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J_{x_1, x_3}(\rho, \psi) - \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} (M_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1}) - \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (M_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}) - \frac{d\rho_0}{dx_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad (5б)$$

где  $J_{x_1, x_3}(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial b}{\partial x_3} - \frac{\partial a}{\partial x_3} \frac{\partial b}{\partial x_1}$  – якобиан по переменным  $x_1, x_3$ .

Чтобы исключить  $P$  и  $\zeta_i$  из граничных условий, продифференцируем уравнение (2а) по  $x_1$  и  $t$ . Используя уравнение (1а), перепишем первое и второе граничные условия на свободной поверхности через функцию тока  $\psi$ :

при  $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - K_1 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_3} - K_3 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_3^3} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - K_1 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_3} - K_3 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_3^3} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3 \partial x_1} - K_1 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^3} - K_3 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_3^2 \partial x_1} - \rho \right) \right] - \\ & - g_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - 2K_3 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_3 \partial t \partial x_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$K_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - K_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0; \quad (6b)$$

при  $x_3 = -1$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \psi = 0. \quad (6b)$$

Систему (5) будем решать асимптотическим методом многомасштабных разложений с введением «медленных» переменных  $\xi, \tau$  ( $\xi = \varepsilon^2 x, \tau = \varepsilon^2 t$ ) и «быстрой» переменной  $\theta$  – фазы волны ( $k = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$ ) [1]:

$$\psi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \psi_n(\xi, \tau, x_3, \theta), \quad (7a)$$

$$\rho = \sum_{n=1} \varepsilon^n \rho_n(\xi, \tau, x_3, \theta). \quad (7b)$$

Подставляя разложение (7) в систему (5) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , с точностью до  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll \varepsilon_2^2$  получим:

$$\begin{aligned} & -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi_1 = k \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} + k \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( K_1 k^3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( K_3 k \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial x_3} \right) \right] \times \\ & \times \varepsilon_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ k^2 K_1 \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( K_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} \right) \right] \varepsilon_2^2, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$-\omega \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} - k \frac{\partial}{\partial \theta} (M_1 k \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta}) \varepsilon_2^2 - \frac{\partial}{\partial x_3} (M_3 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_3}) \varepsilon_2^2 - \frac{d\rho_0}{dx_3} k \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0. \quad (86)$$

Решение уравнений (8) будем искать в следующем виде:

$$\psi_1 = A \varphi_1(x_3) e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad (9a)$$

$$\rho_1 = An_1(x_3) e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad (96)$$

здесь к.с. – комплексно-сопряженные слагаемые.

Подставляя (9) в (8), получим уравнения для  $\varphi_1$  и связь между  $n_1(x_3)$  и  $\varphi_1(x_3)$ :

$$k^2 \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_1 = [-\omega i + \varepsilon_2^2 M_1 k^2 - \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} (M_3 \frac{d}{dx_3})] [\omega i (\frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} - k^2 \varphi_1) - \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} [K_1 k^2 \frac{d\varphi_1}{dx_3} - \frac{d}{dx_3} (K_3 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2})] + \varepsilon_2^2 k [K_1 k^3 \varphi_1 - K_3 k \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2}]], \quad (10a)$$

$$(i\omega - k^2 M_1 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} (M_3 \frac{d}{dx_3})) n_1 = -ik \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_1. \quad (106)$$

Уравнения (8) следует дополнить граничными условиями, которые вытекают из (6):

при  $x_3 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial x_3} - K_1 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x_1^2 \partial x_3} - \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3} K_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2}] - g_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} - 2K_3 \varepsilon_2^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_3 \partial t \partial x_1^2} = 0, \quad (11a)$$

$$K_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_3^2} - K_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} = 0; \quad (116)$$

при  $x_3 = -1$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = \psi_1 = 0. \quad (11b)$$

С точностью до  $\varepsilon$  граничные условия для  $\varphi_1$ ,  $n_1$  будут иметь следующий вид:

при  $x_3 = 0$

$$\frac{kg_1}{\omega} \varphi_1 + \frac{\omega}{k} \frac{d\varphi_1}{dx_3} - ikK_1 \varepsilon_2^2 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \frac{i}{k} \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} (K_3 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2}) - 2ik\varepsilon_2^2 K_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} = 0, \quad (12a)$$

$$K_3 \frac{d^2 \psi_1}{dx_3^2} + K_1 k^2 \varphi_1 = 0; \quad (126)$$

при  $x_3 = -1$

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx_3} = 0. \quad (12в)$$

Граничные условия для функции  $n_1$  имеют вид:

при  $x_3 = 0$

$$n_1(0) + \frac{k}{\omega} \varphi_1(0) \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0; \quad (13а)$$

при  $x_3 = -1$

$$n_1(-1) = 0. \quad (13б)$$

Уравнение (10а) при малом  $\varepsilon_2$  будем решать асимптотическим методом Люстерника – Вишика [9, 10], разлагая  $\varphi_1, n_1, \omega$  в асимптотические ряды:

$$\varphi_1(x_3) = \sum_{i=0} \varphi_{1i}(x_3) \varepsilon_2^i + \varepsilon_2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i v_i^1 \left( \frac{x_3+1}{\varepsilon_2} \right) + \varepsilon_2^2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i v_i^0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon_2} \right), \quad (14а)$$

$$n_1(x_3) = \sum_{i=0} n_{1i} \varepsilon_2^i + \varepsilon_2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i w_i^1 \left( \frac{x_3+1}{\varepsilon_2} \right) + \varepsilon_2^2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i w_i^0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon_2} \right), \quad (14б)$$

$$\omega = \omega_{01} + \sum_{i=1} \varepsilon_2^i \omega_{i1}. \quad (14в)$$

Здесь  $v_i^1 \left( \frac{x_3+1}{\varepsilon_2} \right)$  – погранслойные решения в окрестности дна,  $v_i^0 \left( \frac{x_3}{\varepsilon_2} \right)$  – в окрестности свободной поверхности. Введение погранслойных решений необходимо для удовлетворения граничных условий (12).

Подставляя разложения (14) в (10а), получим краевую задачу для  $\varphi_{10}$  в нулевом порядке малости по параметру  $\varepsilon_2$ :

$$\frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} + k^2 \frac{(N^2 - \omega_{01}^2)}{\omega_{01}^2} \varphi_{10} = 0, \quad (15а)$$

где  $-\frac{d\rho_0}{dx_3} = N^2$  – квадрат частоты Брента – Вайсяля;

$$n_{10} = -\varphi_{10} \frac{k}{\omega_{01}} \frac{d\rho_0}{dx_3}. \quad (15б)$$

Граничные условия для  $\varphi_{10}$  будут иметь вид:

$$\varphi_{10} \Big|_{x_3=-1} = 0, \quad (16а)$$

$$-\omega_{01}^2 \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} + g_1 k^2 \varphi_{10} \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (166)$$

Краевая задача (15а), (16) имеет счетный набор собственных функций – набор мод, причем каждому значению волнового числа  $k$  соответствует определенная частота  $\omega_{01}$  для данной моды.

Следующий член в разложении (14)  $\varphi_{11}$  определяется из уравнения

$$\frac{d^2 \varphi_{11}}{dx_3^2} - \frac{k^2}{\omega_{01}^2} \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_{11} - k^2 \varphi_{11} = -\omega_{11} \left( \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} - k^2 \varphi_{10} \right) \frac{2}{\omega_{10}} = f(x_3), \quad (17)$$

граничные условия при  $x_3 = 0$

$$\frac{d\varphi_{11}}{dx_3} - \frac{g_1}{\omega_{01}^2} k^2 \varphi_{11} = 2\omega_{11} \frac{d\varphi_{10}}{\omega_{01} dx_3} = \beta_{12}, \quad (18a)$$

при  $x_3 = -1$

$$\varphi_{10} = 0. \quad (18b)$$

Условие разрешимости краевой задачи (17), (18)

$$\int_{-1}^0 f \varphi_{10} dx_3 = -\beta_{12} \varphi_{10}(0). \quad (19)$$

Данное условие при  $\omega_{11} \neq 0$ , вообще говоря, не выполняется, и краевая задача (17), (18) решений не имеет.

Следующее приближение  $\varphi_{12}$  по параметру  $\varepsilon_2$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 \left[ -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right] \varphi_{12} - \frac{d\rho_0}{dx_3} k^2 \varphi_{12} &= (-\omega_{21} - iM_1 k^2 + i \frac{d}{dx_3} (M_3 \frac{d}{dx_3})) \times \\ \times \left( \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} - k^2 \varphi_{10} \right) \omega_{01} + \omega_{01} \left[ (k^2 \varphi_{10} - \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2}) \omega_{21} + \right. & \\ \left. + i \frac{d}{dx_3} \left( \frac{d}{dx_3} (K_3 \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2}) - K_1 k^2 \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} \right) + ik \left( K_1 k^3 \varphi_{10} - kK_3 \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} \right) \right] &= \Phi. \end{aligned} \quad (20a)$$

Граничные условия для  $\varphi_{12}$  имеют вид:

при  $x_3 = 0$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dx_3} - \frac{g_1 k^2}{\omega_{01}^2} \varphi_{12} = \gamma_{12}, \quad (20b)$$

$$\text{где } \gamma_{12} = \frac{i}{\omega_{01}} \left( \frac{d}{dx_3} K_3 \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} - K_1 k^2 \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} \right) - iK_3 2 \frac{k^2}{\omega_{01}} \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} - 2 \frac{\omega_{21}}{\omega_{01}} \varphi_{10} \frac{d\varphi_{10}}{dx_3};$$

при  $x_3 = -1$

$$\varphi_{12} = 0. \quad (20в)$$

Из условия разрешимости краевой задачи (20)

$$\int_{-1}^0 \Phi \varphi_{10} dx_3 = -\gamma_{12} \varphi_{10}(0) \omega_{01}^2 \quad (21)$$

найдем выражение для  $\omega_{21}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{21} = & -i \left[ 2 \frac{k^2}{\omega_{01}} \int_{-1}^0 N^2 \varphi_{10}^2 dx_3 - 2 \omega_{01} \frac{d\varphi_{10}(0)}{dx_3} \varphi_{10}(0) \right]^{-1} \left\{ \int_{-1}^0 \left[ -M_1 k^2 + \frac{d}{dx_3} M_3 \frac{d}{dx_3} \right] \times \right. \\ & \times \left( \frac{k^2}{\omega_{01}} N^2 \varphi_{10} \right) + \omega_{01} \left[ \frac{d}{dx_3} \left( -K_1 k^2 \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} + \frac{d}{dx_3} K_3 \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} \right) + \right. \\ & \left. + k^2 \left( K_1 k^2 \varphi_{10} - K_3 \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} - 2 \frac{dK_3}{dx_3} \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} \right) \right] \varphi_{10} dx_3 + \\ & \left. + \left[ \left( -K_1 k^2 \frac{d\varphi_{10}(0)}{dx_3} + \frac{d}{dx_3} K_3 \frac{d^2 \varphi_{10}(0)}{dx_3^2} \right) \omega_{01}^{-1} - 2K_3 \frac{k^2}{\omega_{01}} \frac{d\varphi_{10}(0)}{dx_3} \right] \varphi_{10}(0) \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Погранслоное решение в окрестности дна  $x_3 = -1$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^6 v_0^1}{\partial \eta_1^6} + \frac{\partial^4 v_0^1}{\partial \eta_1^4} i \omega_{01} \frac{M_3 + K_3}{M_3 K_3} - \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial \eta_1^2} \omega_{01}^2 \frac{1}{M_3 K_3} = 0$ ,

где  $\eta_1 = \frac{(x_3 + 1)}{\varepsilon_2}$ . Решение данного уравнения имеет вид

$$v_0^1 = A_0^1 + B_0^1 \eta_1 + C_0^1 \exp(\lambda_1 \eta_1) + D_0^1 \exp(-\lambda_1 \eta_1) + F_0^1 \exp(\lambda_2 \eta_1) + G_0^1 \exp(-\lambda_2 \eta_1), \quad (23)$$

где  $\lambda_1 = \left( \frac{\omega_{01}}{2M_3} \right)^{1/2} (1-i)$ ,  $\lambda_2 = \left( \frac{\omega_{01}}{2K_3} \right)^{1/2} (1-i)$ .

При удалении от дна погранслоное решение  $v_0^1$  должно затухать, это имеет место при  $A_0^1 = B_0^1 = C_0^1 = F_0^1 = 0$ . Из граничных условий (12в) найдем  $G_0^1$  и  $D_0^1$ :

$$G_0^1 = -D_0^1, \quad D_0^1 = \frac{d\varphi_{10}(-1)}{dx_3} \frac{(-1)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Уравнение для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к функции тока находится из уравнения второго приближения по параметру  $\varepsilon$ , осредненного по периоду волны. Как и при отсутствии турбулентности, неосциллирующую поправку к функции тока  $C(x_3, \tau, \varepsilon)$  следует



скасть в виде  $C = c(x_3)A_1A_1^*$ , где  $A_1 = A \exp(\delta \omega t)$ ;  $\delta \omega = \frac{\varepsilon_2^2 \omega_{21}}{i}$ ;  $\delta \omega$  – декремент затухания волны на турбулентности. Функция  $c(x_3)$  удовлетворяет краевой задаче [8]

$$\varepsilon_2^2 \frac{d^2}{dx_3^2} \left( K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right) = ki \frac{d}{dx_3} \left( (-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2}) \varphi_1 \varphi_1^* \right) + \text{к.с.} \quad (24)$$

Уравнение (24) следует дополнить граничными условиями, вытекающими из (2),(3):

при  $x_3 = 0$

$$\varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} \left( K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right) = ik \varphi_1^* \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} + \text{к.с.}, \quad (25a)$$

$$\frac{d^2 c}{dx_3^2} = 0; \quad (25b)$$

при  $x_3 = -1$

$$\frac{dc}{dx_3} = c = 0. \quad (25b)$$

Горизонтальная компонента скорости индуцированного волной среднего течения определялась через функцию  $c(x_3)$ :  $\bar{u}_{ind} = |\varepsilon A_1|^2 \frac{dc}{dx_3}$ .

При отсутствии турбулентности, т.е. когда  $K_i = M_i = 0$ , неосциллирующая поправка к функции тока  $C(\xi, \tau, x_3)$  находится из условия отсутствия секулярных слагаемых в четвертом порядке малости по  $\varepsilon$  [1]. При наличии турбулентности неосциллирующая поправка  $C$  находится уже во втором порядке малости по  $\varepsilon$ . Ясно, что картина индуцируемых течений отличается от невязкого случая. Предельного перехода от вязкого к невязкому случаю существовать не может, т.к. исходным является предположение, что характерный масштаб вязкого затухания волны существенно меньше масштаба огибающей пакета (т.е. по сути рассматривается предельный случай плоской волны).

Индукцированные волной течения присутствуют только в области пакета, т.к.  $C$  пропорциональна  $|A^2|$ ; после прохождения пакета невозмущенный профиль среднего течения восстанавливается. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из суммы скорости стокова дрейфа и скорости среднего эйлера течения, индуцированного волной. Средняя скорость стокова дрейфа частиц жидкости за счет осциллирующей части волнового поля определяется по формуле [5]:

$$\mathbf{u}_s = \int_0^t \mathbf{u} dt' \nabla \mathbf{u}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{u}$  – поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает осреднение по периоду волны. Горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа с точностью до членов, квадратичных по крутизне волны, будет иметь вид:

$$u_{1s} = \varepsilon^2 \frac{k}{\omega_{01}} \frac{d}{dx_3} (\varphi_1 \frac{d\varphi_1^*}{dx_3}) A_1 A_1^* + \text{к.с.}, \quad (27a)$$

вертикальная компонента –

$$u_{3s} = 2\varepsilon^2 \varepsilon_2^2 \frac{k^2}{\omega_{01}^2} A_1 A_1^* \delta\omega \frac{d}{dx_3} (\varphi_1 \varphi_1^*). \quad (27b)$$

При отсутствии турбулентности ( $K_i = M_i = 0$ )  $\delta\omega = 0$ . В предельном случае плоской волны вертикальная компонента скорости стокова дрейфа у фиксированной моды равна нулю, т.к. пропорциональна  $\frac{\partial(A_1 A_1^*)}{\partial\xi}$ .

Чтобы оценить коэффициент вертикального турбулентного обмена, применим формулу Р.В. Озмидова [11] для скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon_t$  и выражение для  $K_3$ :

$$\varepsilon_t^{1/2} = L_0 N^{3/2}, \quad K_3 = c_1 \varepsilon_t^{1/3} L_0^{4/3}. \quad (28)$$

Для оценки  $L_0$  применим формулу Бэлла [12]:

$$L_0 = N_* / (N\beta_0), \quad (29)$$

где  $N_* = 3$  цикл/ч,  $\beta_0 = 1 \text{ м}^{-1}$ ,  $c_1 = 0,1$ . Используя (28), (29), найдем зависимость  $\varepsilon_t$  и  $K_3$  от  $N$ :

$$\varepsilon_t = \frac{N_*^2 N}{\beta_0}, \quad K_3 = \frac{c_1 N_*^2}{\beta_0^2 N}. \quad (30)$$

Будем полагать, что теряемая волной энергия целиком переходит в турбулентность и далее расходуется на работу турбулентности против сил плавучести и на диссипацию в тепло. Таким образом, скорость диссипации волновой энергии, проинтегрированная по глубине, равна интегральной величине работы турбулентности против сил плавучести  $M_3 N^2$  и скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon_t$ :

$$2|\delta\omega| \int_0^H E dz = \int_0^H (M_3 N^2 + \varepsilon_t) dz. \quad (31)$$

Здесь  $E = \varepsilon^2 A_1 A_1^* \left[ k^2 (1 + 2 \frac{N^2}{\omega^2}) \varphi_1 \varphi_1^* + \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d\varphi_1^*}{dz} \right]$  – плотность энергии волны,  $z = (x_3 + 1)H$ . Уравнение (31) позволяет найти коэффициент горизонтального турбулентного обмена  $K_1$ .

Определим осредненное за период волны тангенциальное напряжение дна:

$$\tau = \overline{\rho_0} K_3 \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2}. \quad (32)$$

Если  $\tau$  превышает критическое значение  $\tau_0$ , соответствующее началу движения наносов, то волна взмучивает наносы, осуществляя их горизонтальный перенос.

В стационарном и горизонтально-однородном случае уравнение вертикальной диффузии для средней концентрации наносов  $n(z)$  имеет вид [13]:

$$\frac{d}{dz} \left( (\overline{w} - w_g) n(z) \right) = \frac{d}{dz} \left( M_3 \frac{d}{dz} n(z) \right), \quad (33)$$

где  $w_g$  – гидравлическая крупность наносов;  $\overline{w}$  – вертикальная компонента скорости течения, индуцированного волной за счет нелинейности. Решение уравнения (33), затухающее при удалении от дна, имеет вид:

$$n(z) = n_0 \exp \left( \int_0^z \frac{\overline{w} - w_g}{M_3} dz \right). \quad (34)$$

Здесь  $n_0$  – концентрация наносов у дна, которая находится из следующего граничного условия. Пусть  $F$  – вертикальный поток наносов у дна, тогда, следуя работе [13],

$$F = \chi(\tau - \tau_0) - w_g n_0. \quad (35)$$

С другой стороны, вертикальный поток наносов равен

$$F = (\overline{w} - w_g) n_0 - M_3 \partial n_0 / \partial z. \quad (36)$$

Учитывая, что у дна  $\overline{w} = 0$ , найдем:

$$\partial n_0 / \partial z = -\chi(\tau - \tau_0) / M_3. \quad (37)$$

Из (34), (37) получим:

$$n_0 = \chi(\tau - \tau_0) / w_g. \quad (38)$$

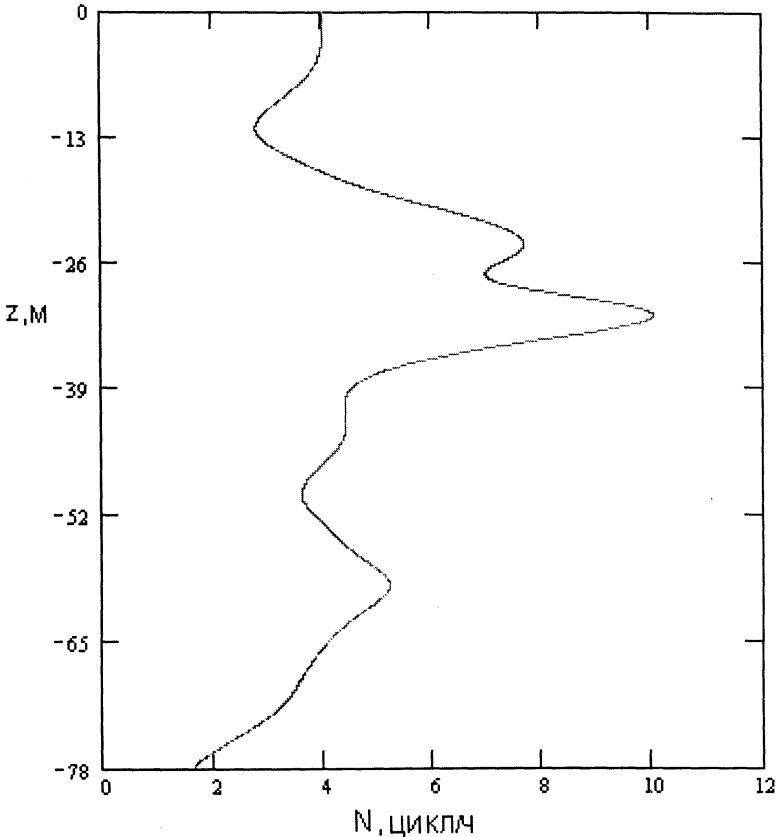
Таким образом, донная концентрация взвешенных волной наносов пропорциональна превышению тангенциального напряжения критического значения, соответствующего началу движения наносов.

Расход наносов определяется по формуле

$$G = \int_0^H n(\overline{u}_{инд}(z) + \overline{u}_{1s}) dz. \quad (39)$$

## Результаты расчетов

Расчет средних течений, индуцированных волной за счет нелинейности, сделаем для северо-западного шельфа Черного моря при стратификации, показанной на рис. 1. Коэффициент вертикальной турбулентной вязкости определялся по формуле (30), горизонтальной турбулентной вязкости – из уравнения (31) при условии  $M_3 = 0,5K_3$ ,  $M_1 = 0,5K_1$ . Вертикальное распределение  $K_3$  показано на рис. 2.

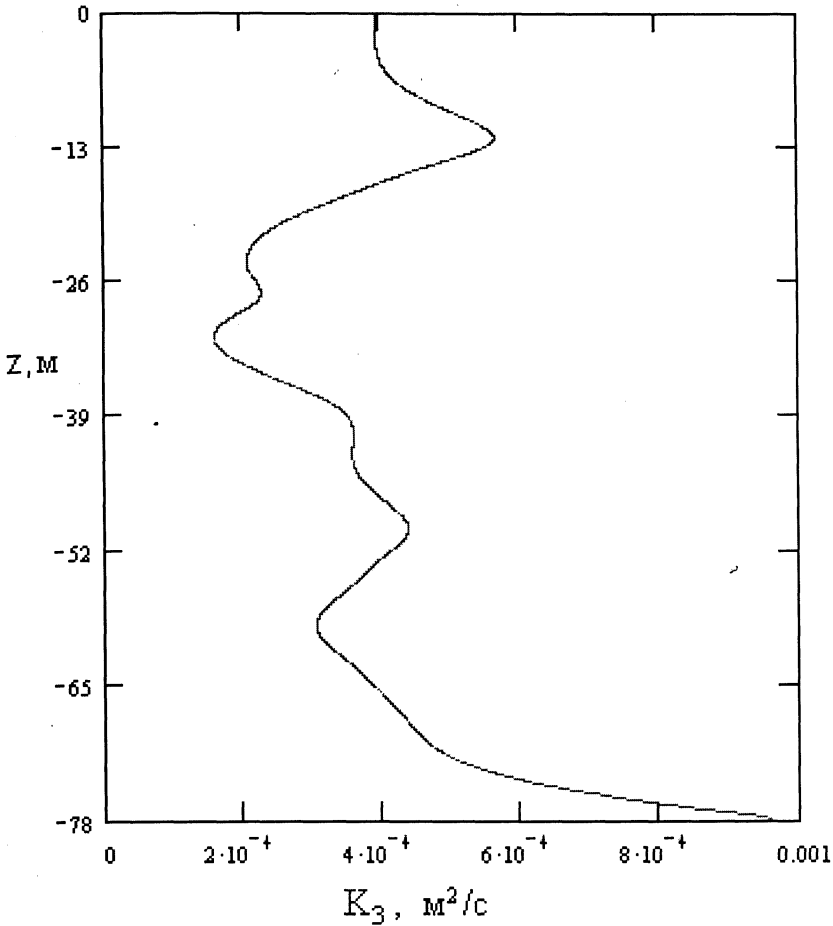


Р и с. 1. Средний профиль частоты Брента – Вайсяля

Краевая задача (15а), (16) решалась численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Собственное значение (величина квадрата волнового числа) находилось методом пристрелки. Определялась собственная функция  $\varphi_{10}(z)$  низшей моды. У получасовых внутренних волн низшей моды  $k = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ .

Краевую задачу (20) для определения  $\varphi_{12}$  также решаем численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Из условия разрешимости (19) краевой задачи (20) находим декремент затухания волны  $\delta\omega = \varepsilon_2^2 \omega_{21} / i$ . Для получасовых внутренних волн низшей моды  $\delta\omega = -1,34 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$ . Находилось единственное решение краевой задачи (20), ортогональное нетриви-

альному решению однородной краевой задачи (15а), (16) – собственной функции внутренних волн низшей моды.



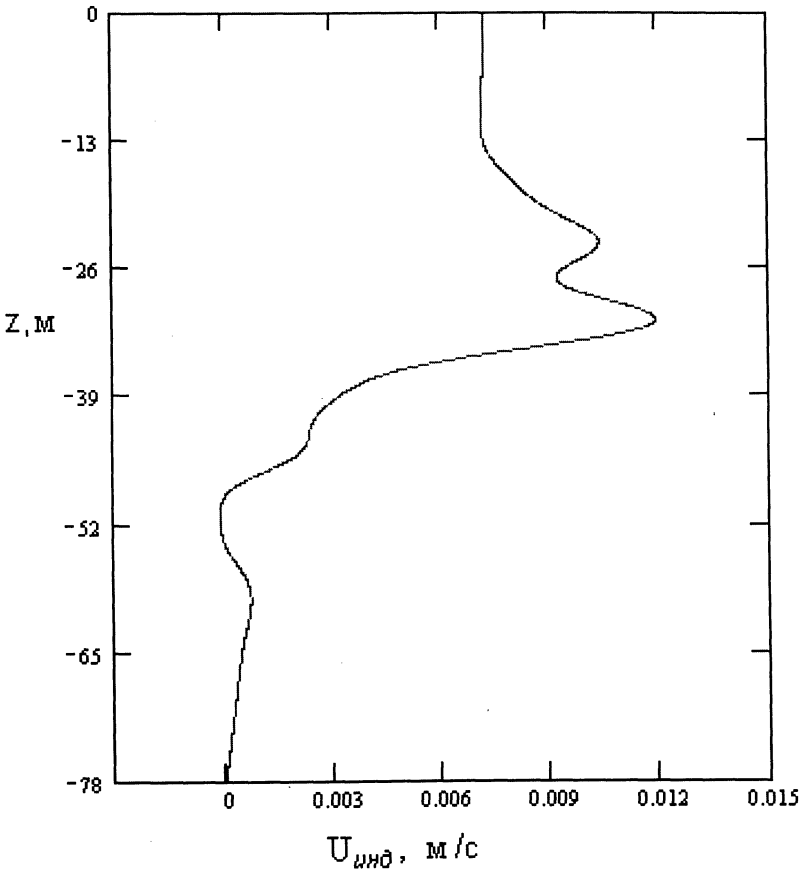
Р и с. 2. Зависимость от глубины коэффициента вертикального турбулентного обмена

Краевая задача (24), (25) для вертикальной структуры индуцированного течения решалась аналитически, интегралы, определяющие функцию  $c(z)$ , рассчитывались численно. Нормирующий множитель  $\varepsilon A_1$  находился по известной максимальной амплитуде вертикальных смещений  $\zeta_0$ :

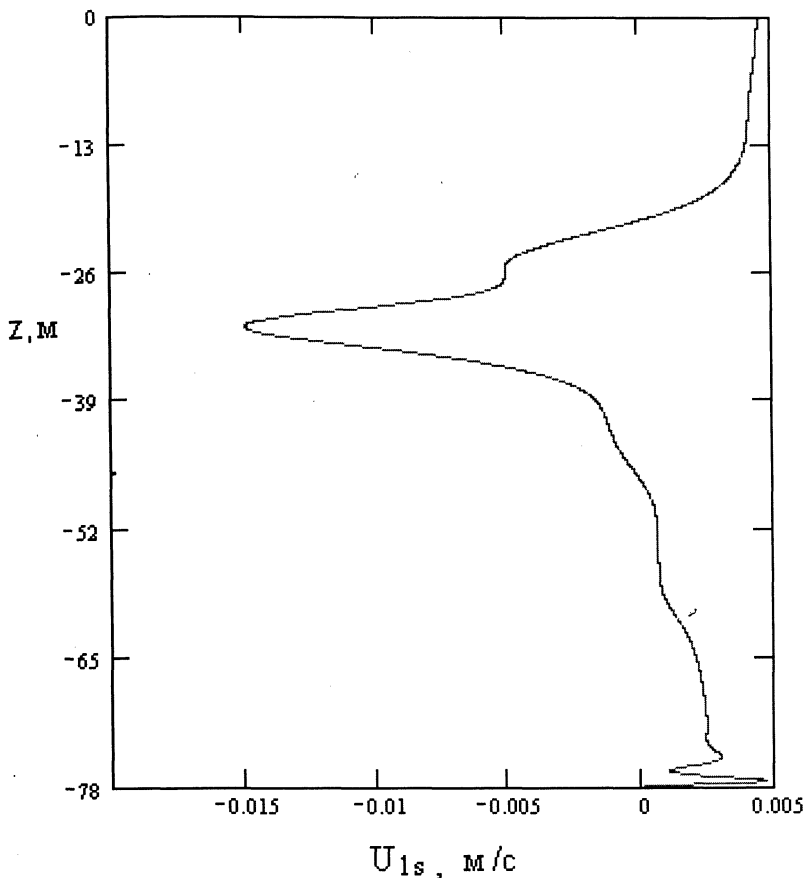
$$\varepsilon A_1 = \frac{\omega \zeta_0}{2k \max \phi},$$

где  $\max(\phi) = \max(\varphi_{10} + \varepsilon_2^2 \varphi_{12})$  – максимальное значение амплитуды функции тока с учетом поправки, связанной с вязкостью. Горизонтальная компонента скорости индуцированного волной среднего течения определялась через функцию  $c(z)$ :  $\bar{u}_{ind} = |\varepsilon A_1|^2 \frac{dc}{dz}$ .

Вертикальная структура эйлерова индуцированного течения для волны с  $\omega = 2$  цикл/ч,  $\zeta_0 = 5$  м показана на рис. 3. Коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости  $K_1$  равен  $0,86 \text{ м}^2/\text{с}$ . Профиль горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа (27а) изображен на рис. 4. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из эйлеровой скорости индуцированного течения и скорости стокова дрейфа:  $\bar{u} = \bar{u}_{\text{инд}} + \bar{u}_{1s}$ . График суммарной скорости показан на рис. 5. Основной вклад в горизонтальный перенос частиц жидкости у дна вносит скорость стокова дрейфа. Средневзвешенный диаметр донных осадков  $d$  рассматриваемой акватории Черного моря составляет  $0,03 \text{ мм}$  [14], гидравлическая крупность наносов –  $0,078 \text{ см/с}$ , коэффициент  $\chi$  в формуле для донной концентрации наносов (38) –  $5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{см}^2$  [13].



Р и с. 3. Вертикальный профиль горизонтальной эйлеровой скорости среднего течения, индуцированного волной

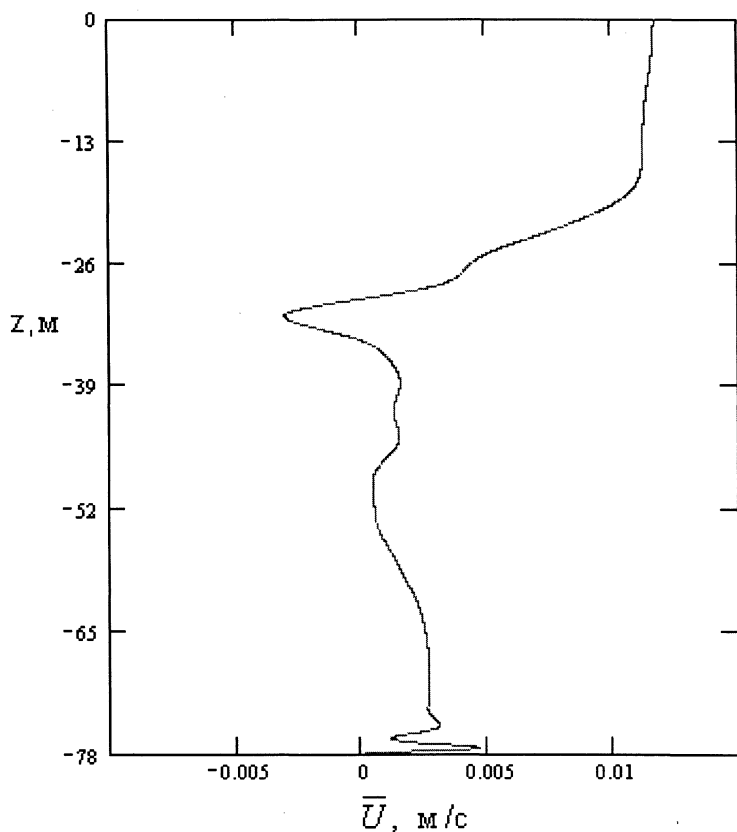


Р и с. 4. Вертикальное распределение горизонтальной скорости стокова дрейфа

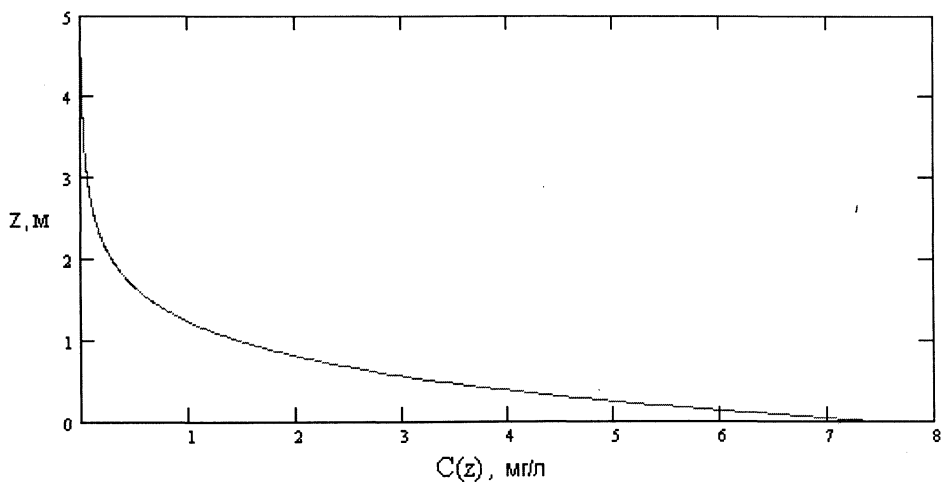
Критическое тангенциальное напряжение  $\tau_0$ , соответствующее началу движения наносов, равно  $1 \text{ дин/см}^2$  [13,15,16]. Максимальная амплитуда волны  $\zeta_{0кр}$ , при которой тангенциальное напряжение (32) равно критическому, составляет 4,5 м. Если максимальная амплитуда волны  $\zeta_0$  равна 5 м, то  $\tau = 1,115 \text{ дин/см}^2$ . Донная концентрация  $n_0$  взвешенных волной наносов (38) при  $\zeta_0 = 5 \text{ м}$  составляет 7,4 мг/л. В работе рассмотрен предельный случай сла-

бонелинейной плоской волны, когда  $\frac{\partial(A_1 A_1^*)}{\partial \xi}$  близко к нулю и вертикальной

скоростью индуцированного течения  $\bar{w}$  можно пренебречь. Вертикальное распределение концентрации наносов, взвешенных волной, показано на рис. 6. Величина расхода наносов (39) равна  $5,3 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ . Интегральный поток наносов положительный, т.е. сонаправлен с горизонтальным волновым вектором. Зависимость критической амплитуды волны низшей моды, при которой начинается движение наносов, от частоты волны изображена на рис 7.

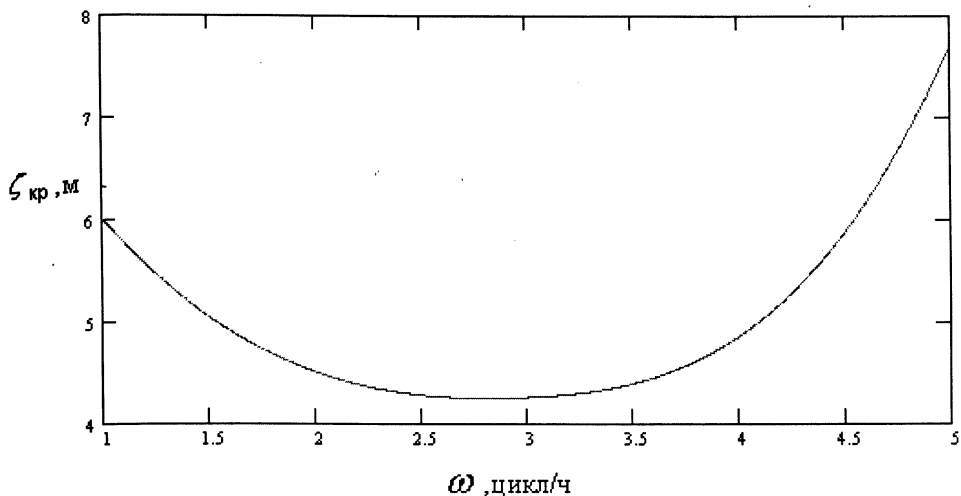


Р и с. 5. Вертикальное распределение суммарной горизонтальной скорости дрейфа частиц жидкости



Р и с. 6. Вертикальный профиль концентрации наносов, взвешенных волной





**Р и с. 7.** Зависимость критической амплитуды волны, соответствующей началу движения наносов, от ее частоты

### Выводы

1. Асимптотическим методом многомасштабных разложений во втором порядке малости по крутизне волны получены средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности. Определены горизонтальная и вертикальная составляющие скорости стокова дрейфа, суммарная горизонтальная скорость дрейфа частиц жидкости.

2. Получены погранслойные волновые решения и тангенциальные напряжения у дна. Если донные тангенциальные напряжения превышают критическое значение, соответствующее началу движения наносов, волна взмучивает донный осадочный материал, осуществляя его перенос средними течениями, индуцированными за счет нелинейности. Определяющий вклад в перенос у дна вносит скорость стокова дрейфа.

3. Донная концентрация взвешенных волной наносов пропорциональна превышению тангенциальными напряжениями критических значений, соответствующих началу движения наносов. Вертикальное распределение их концентрации у дна находилось в диффузионном приближении. Концентрация взвешенных волной наносов достаточно быстро убывает при удалении от дна. Расход наносов положителен, т.е. сонаправлен с горизонтальным волновым вектором и совпадает с направлением распространения волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ястребов В.С., Парамонов А.Н., Онищенко Э.Л. Исследование придонного слоя буксируемыми аппаратами. – М.: ИО АН СССР, 1989. – 128 с.
2. Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. – 1976. – 12, №3. – С. 293 – 301.
3. Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. Appl. Math. – 1977. – 56. – P. 241 – 266.

4. *Езерский А.Б., Панко В.В.* Лабораторное исследование потенциальных течений, индуцированных пакетом поверхностных волн // Изв. АН СССР. ФАО. – 22, №9. – 1986. – С. 979 – 986.
5. *Longuet-Higgins M.S.* On the transport of mass by time varying current//Deep-Sea Res. – 1969. – 16, №5. – Р.431 – 447.
6. *Дворянинов Г.С.* Эффекты волн в пограничных слоях атмосферы и океана. – Киев: Наук. думка, 1982. – 176 с.
7. *Madsen O.S.* Mass transport in deep-water waves // J.Phys.Oceanogr. – 1978. – 8, №6. – Р. 1009 – 1015.
8. *Пантелеев Н.А., Слепышев А.А.* Тепломассоперенос слабонелинейными внутренними волнами при наличии турбулентности// Морской гидрофизический журнал. – 1995. – №4 – С. 3 – 23.
9. *Задорожный А.И.* Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море // Морские гидрофизические исследования. – 1975. – №3. – С. 96 – 110.
10. *Черкесов Л.В.* Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 259 с.
11. *Озмидов Р.В.* О турбулентном обмене в устойчиво стратифицированном море // Изв. АН СССР. ФАО. – 1965. – 1, №8. – С. 853 – 860.
12. *Bell I.H.* Internal wave-turbulence interpretation of ocean fine structure // Geophys. Res. Lett. – 1974. – №6. – Р. 253 – 255.
13. *Шатино Г.И., Аквис Т.М., Пыхов Н.В., Анциферов С.М.* Перенос мелкодисперсного осадочного материала мезомасштабными течениями в шельфово-склоновой зоне моря // Океанология. – 2000. – 40, №3. – С. 333 – 339.
14. *Щербаков Ф.А, Куприн П.Н., Потапова Л.И. и др.* Осадконакопление на континентальной окраине Черного моря. – М.: Наука, 1978. – 210 с.
15. *Uncles R.J., Stephens J.A.* Distribution of suspended sediment at high water in a macrotidal estuary // J.Geophys. Res. – 1989. – 94, №C2 – Р. 14395 – 14405.
16. *Van Rijn L.* Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. –Amsterdam: Aqual Publ., 1993. – 720 p.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 04.07.06  
После доработки 20.10.06

ABSTRACT In the Boussinesque approximation the mean currents induced by an internal wave due to non-linearity with an allowance for viscosity and diffusion are determined by the asymptotic method of multi-scale expansions. Boundary layer solutions, decrement of the wave attenuation and near-bottom tangential tension are defined. The bottom concentration of the wave-suspended bed load when the tangential tensions exceed the critical values corresponding to the beginning of the load motion is found. In the diffusion approximation the vertical distribution of the wave-suspended load concentrations is determined.