

УДК 551.466.8

А.А. Слепышев, В.О. Подрыга

## К теории нестационарных слабонелинейных захваченных топографических волн

В приближении Буссинеска исследованы захваченные топографические волны над наклонным дном при реальной стратификации. Определены средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности, и неосциллирующая поправка к средней плотности. Получено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей. По данным эксперимента в Норвежском море сделана оценка периодов и амплитуд захваченных топографических волн. Получено пространственное распределение амплитуд скорости и индуцированного за счет нелинейности среднего течения. Исследована модуляционная неустойчивость этих волн. Показано, что захваченные топографические волны модуляционно неустойчивы.

В динамике придонного слоя моря важную роль играют захваченные топографические волны. Баротропные топографические волны, типа захваченных берегом шельфовых и волн Кельвина, достаточно хорошо изучены [1 – 3]. При исследовании бароклинических топографических волн возникают трудности разделения горизонтальной и вертикальной структуры движений вследствие наклона дна [4 – 7]. При малом наклоне возможно разделение на моды колебаний при учете наклона дна в граничном условии [7, 8]. Энергия бароклинических топографических волн в коротковолновом приближении в стратифицированном море сконцентрирована у дна, т.е. волны захватываются дном [7, 8]. Амплитуды волновых скоростей максимальны у дна, поэтому эти волны оказывают активное динамическое воздействие на подстилающую поверхность, вызывая взмучивание и перенос осадочного материала. Наблюдение захваченных топографических волн затруднено в связи со сложностью проведения измерений в придонном слое, однако имеются едва ли не единичные случаи регистрации этих волн, в частности на шельфе Перуанского побережья [5].

Нелинейные эффекты при распространении как поверхностных, так и внутренних волн проявляются в генерации средних на масштабе волны течений [9]. Огибающая узкоспектрального волнового пакета удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера [10]. Поверхностные волны на глубокой воде модуляционно неустойчивы, такая неустойчивость внутренних волн существенно перемежаема по масштабам. В длинноволновом пределе внутренние волны устойчивы к продольной модуляции [10].

Теория нестационарных слабонелинейных внутренних волн над плоским дном предложена в работах [10, 11]. Среднее течение, индуцированное захваченной топографической волной, при постоянной частоте Брента – Вейселя определялось в [12]. В настоящей работе исследуются нелинейные эффекты

© А.А. Слепышев, В.О. Подрыга, 2008

при распространении захваченных топографических волн над плоским наклонным дном при реальной стратификации, получено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета.

### Постановка задачи

Рассматриваются свободные захваченные наклонным дном топографические волны над плоским склоном. Уклон дна предполагается малым и учитывается в граничном условии. Система нелинейных уравнений гидродинамики решается асимптотическим методом многомасштабных разложений, в первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение. Во втором порядке малости по крутизне волны  $\varepsilon$  находятся решения второго приближения и среднее течение, индуцированное волной за счет нелинейности. Условие разрешимости неоднородной краевой задачи для амплитуды вертикальной компоненты скорости в третьем порядке по  $\varepsilon$  дает эволюционное уравнение для огибающей.

Исходная система уравнений движения для волновых возмущений в приближении Буссинеска с учетом вращения Земли имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] &= -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \mathbf{g} \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u} \nabla \rho) + u_3 \frac{d\rho_0}{dx_3} &= 0, \\ \nabla \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $P$  – волновые возмущения скорости течения, плотности и давления;  $\rho_0(x_3)$  – средняя невозмущенная плотность. Ось  $x_1$  направлена вдоль изобат, ось  $x_2$  – в сторону уменьшения глубины. Систему уравнений (1) необходимо дополнить граничными условиями «твердой крышки» на поверхности и наклонном дне:  $u_3|_{x_3=H} = 0$ ,  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{x_3=0} = 0$ . Из системы (1) следует уравнение для вертикальной компоненты скорости (вертикальная ось направлена вверх):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial t^2} + f^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \Delta_h \frac{\partial}{\partial t} \left( u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) &= \frac{g}{\rho_0} \Delta_h \left( u_3 \frac{d\rho_0}{dx_3} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ -f \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + f \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} \left( u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_2} \left( u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (1) будем решать методом многомасштабных разложений, раскладывая  $u_i$ ,  $P$ ,  $\rho$  в асимптотические ряды [9]:

$$\begin{aligned} u_i &= \varepsilon u_i^I(x_3, \xi, \tau, \theta) + \varepsilon^2 u_i^{II}(x_3, \xi, \tau, \theta) + \dots, \\ P &= \varepsilon P^I(x_3, \xi, \tau, \theta) + \varepsilon^2 P^{II}(x_3, \xi, \tau, \theta) + \dots, \\ \rho &= \varepsilon \rho^I(x_3, \xi, \tau, \theta) + \varepsilon^2 \rho^{II}(x_3, \xi, \tau, \theta) + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $\varepsilon$  – малый параметр (крутизна волны);  $\xi$  и  $\tau$  – «медленные» переменные;  $\xi = \varepsilon(x_1 - c_g t)$ ;  $\tau = \varepsilon^2 t$ ;  $\theta$  – фаза волны;  $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = k$ ;  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega$  ( $k$  – волновое число,  $\omega$  – частота,  $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  – линейная групповая скорость; предполагается, что волна распространяется вдоль изобат).

В первом порядке малости по крутизне волны  $u'_i, P', \rho'$  можно представить в виде [9]:

$$u'_i = u'_{i0}(x_3)A(\xi, \tau)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad P' = P'_{i0}(x_3)A(\xi, \tau)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ \rho' = \rho'_{i0}(x_3)A(\xi, \tau)e^{i\theta} + \text{к.с.},$$

к.с. – комплексно-сопряженные слагаемые. Связь функций  $u'_{10}(x_3)$ ,  $u'_{20}(x_3)$ ,  $P'_{10}(x_3)$ ,  $\rho'_{10}(x_3)$ ,  $u'_{30}(x_3)$  известна [3], а  $u'_{30}(x_3)$  удовлетворяет краевой задаче по определению вертикальной структуры моды в линейном приближении:

$$\omega^2 \left( k^2 - \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u'_{30} + f^2 \frac{d^2 u'_{30}}{dx_3^2} + \frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} k^2 u'_{30} = 0, \\ u'_{30} \Big|_{x_3=H} = 0, \\ \frac{f}{k\omega} \operatorname{tg}(\gamma) \frac{du'_{30}}{dx_3} \Big|_{x_3=0} = u'_{30} \Big|_{x_3=0},$$

здесь  $\gamma$  – характерный уклон дна.

Если после постановки разложений (3) в (2) приравнять члены при  $\varepsilon^2$ , получим уравнение для  $u_3''$ :

$$\omega^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} (Lu_3'' + Mu_3') + 2\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left( c_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) Lu_3' + f^2 \frac{d^2 u_3''}{dx_3^2} - \frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} \left( k^2 \frac{\partial^2 u_3''}{\partial \theta^2} + Mu_3' \right) = \\ = k^2 \omega \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( u_1' k \frac{\partial u_3'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3} \right) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( u_1' k \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial \rho'}{\partial x_3} \right) \frac{g}{\bar{\rho}_0} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ fk \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_1' k \frac{\partial u_2'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial u_2'}{\partial x_3} \right) - \omega k \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( u_1' k \frac{\partial u_1'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial u_1'}{\partial x_3} \right) \right],$$

где действие операторов  $L$  и  $M$  раскрывается по формулам

$$L = k^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d^2}{dx_3^2}, \quad M = 2k \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} \right) + \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде:

$$u_3'' = u_{31}''(\xi, \tau, x_3)e^{i\theta} + u_{32}''(\xi, \tau, x_3)e^{2i\theta} + \text{к.с.} + \bar{u}_3''(\xi, \tau, x_3),$$

где  $\bar{u}_3^{II}(\xi, \tau, x_3)$  – неосциллирующая на временном масштабе волны поправка к вертикальной скорости. Подставляя (6) в (5), получим  $u_{31}^{II} = u_{31}^{0II}(x_3) \frac{\partial A}{\partial \xi}$ ,  $u_{32}^{II} = u_{32}^{0II}(x_3) |A|^2$ , причем  $u_{31}^{0II}$  и  $u_{32}^{0II}$  удовлетворяют краевым задачам:

$$\left[ \omega^2 \left( k^2 - \frac{d^2}{dx_3^2} \right) + f^2 \frac{d^2}{dx_3^2} + gk^2 \frac{d\rho_0}{\bar{\rho}_0 dx_3} \right] u_{31}^{0II} =$$

$$= i \left[ -2\omega c_g \left( -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u'_{30} + 2gk \frac{u'_{30}}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} + 2k\omega^2 u'_{30} \right], \quad (7)$$

$$u_{31}^{0II} |_{x_3=H} = 0, \quad \frac{f}{k\omega} \operatorname{tg}(\gamma) \frac{du_{31}^{0II}}{dx_3} \Big|_{x_3=0} = u_{31}^{0II} \Big|_{x_3=0},$$

$$\left[ 4\omega^2 \left( 4k^2 - \frac{d^2}{dx_3^2} \right) + f^2 \frac{d}{dx_3^2} + \frac{4g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} k^2 \right] u_{32}^{0II} = -4k^2 \frac{g}{\bar{\rho}_0} \left( u'_{10} ki \rho'_{10} + u'_{30} \frac{d\rho'_{10}}{dx_3} \right) +$$

$$+ \frac{d}{dx_3} \left[ 2fki \left( u'_{10} ki u'_{20} + u'_{30} \frac{du'_{20}}{dx_3} \right) + 4\omega k \left( (u'_{10})^2 ki + u'_{30} \frac{du'_{10}}{dx_3} \right) \right], \quad (8)$$

$$u_{32}^{0II} |_{x_3=H} = 0, \quad \frac{f}{4k\omega} \operatorname{tg}(\gamma) \frac{du_{32}^{0II}}{dx_3} \Big|_{x_3=0} = u_{32}^{0II} \Big|_{x_3=0}.$$

Условием разрешимости краевой задачи (7) является ортогональность правой части уравнения решению  $u'_{30}$  соответствующей однородной краевой задачи (4), отсюда следует выражение для групповой скорости  $c_g$ , которое совпадает с полученным непосредственно из уравнения (4) [10]:

$$c_g = \frac{\int_0^H (k\omega^2 - kN^2)(u'_{30})^2 dx_3}{\omega \int_0^H \left[ \left( -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u'_{30} \right] u'_{30} dx_3}.$$

Краевая задача (8) неразрешима при резонансе со второй гармоникой, когда из того, что  $\omega, k$  удовлетворяют дисперсионному соотношению, следует, что  $2\omega, 2k$  также удовлетворяют дисперсионному соотношению. Нетрудно видеть, что в уравнении (5) после осреднения по периоду волны остается только член левой части  $f^2(d^2\bar{u}_3^{II}/dx_3^2)$ . В предельном случае плоской волны, как будет показано ниже,  $\bar{u}_3^{II} \cong 0$  и слагаемым  $f^2(d^2\bar{u}_3^{II}/dx_3^2)$  в (5) можно пренебречь. Если разложение (3) подставить в систему (1), то во втором порядке малости по  $\varepsilon$  получим связь  $u_1^{II}, u_2^{II}, P^{II}, \rho^{II}$  с  $u_3^{II}$ :

$$u_1'' = \frac{\partial A}{\partial \xi} u_{11}^{0''} e^{i\theta} + A^2 u_{12}^{0''} e^{2i\theta} + \text{k.c.} + \bar{u}_1''(x_3, \tau, \xi),$$

$$u_2'' = \frac{\partial A}{\partial \xi} u_{21}^{0''} e^{i\theta} + A^2 u_{22}^{0''} e^{2i\theta} + \text{k.c.} + \bar{u}_2''(x_3, \tau, \xi),$$

$$p'' = \frac{\partial A}{\partial \xi} p_{10}'' e^{i\theta} + A^2 p_{20}'' e^{2i\theta} + \text{k.c.} + \bar{p}''(x_3, \tau, \xi),$$

$$\rho'' = \frac{\partial A}{\partial \xi} \rho_{10}'' e^{i\theta} + A^2 \rho_{20}'' e^{2i\theta} + \text{k.c.} + \bar{\rho}''(x_3, \tau, \xi),$$

где неосциллирующие поправки  $\bar{u}_1''$ ,  $\bar{u}_2''$ ,  $\bar{p}''$ ,  $\bar{\rho}''$  пока не определены, а функции  $u_{21}^{0''}$ ,  $u_{12}^{0''}$ ,  $u_{22}^{0''}$ ,  $p_{10}''$ ,  $u_{11}^{0''}$ ,  $p_{20}''$  выражаются следующими формулами:

$$\rho_{20}'' = \frac{1}{2\omega i} \left[ \frac{d\rho_0}{dx_3} u_{32}^{0''} + u_{10}' ki \rho_{10}' + u_{30}' \frac{d\rho_{10}'}{dx_3} \right],$$

$$\rho_{10}'' = \frac{1}{\omega i} \left[ u_{31}^{0''} \frac{d\rho_0}{dx_3} - c_g \rho_{10}' \right],$$

$$\frac{p_{10}''}{\bar{\rho}_0} = \frac{1}{k^2 \omega i} \left[ -k^2 c_g \frac{p_{10}'}{\bar{\rho}_0} - 2\omega k \frac{p_{10}'}{\bar{\rho}_0} + (\omega^2 - f^2) \frac{du_{31}^{0''}}{dx_3} + 2c_g \omega i \frac{du_{30}'}{dx_3} \right],$$

$$\frac{p_{20}''}{\bar{\rho}_0} = \frac{1}{8k^2 \omega i} \left\{ (4\omega^2 - f^2) \frac{du_{32}^{0''}}{dx_3} + 2 fki \left( u_{10}' kiu_{20}' + u_{30}' \frac{du_{20}'}{dx_3} \right) + \right. \\ \left. + 4k\omega \left( u_{10}' u_{10}' ki + u_{30}' \frac{\partial u_{10}'}{dx_3} \right) \right\},$$

$$u_{11}^{0''} = \frac{1}{\omega^2 - f^2} \left\{ 2\omega c_g iu_{10}' - c_g ki \frac{p_{10}'}{\bar{\rho}_0} - \omega i \frac{p_{10}'}{\bar{\rho}_0} \right\},$$

$$u_{12}^{0''} = \frac{1}{4\omega^2 - f^2} \left\{ f \left( u_{10}' kiu_{20}' + u_{30}' \frac{du_{20}'}{dx_3} \right) - 2\omega i \left( u_{10}' kiu_{10}' + \frac{du_{10}'}{dx_3} u_{30}' \right) + 4\omega k \frac{p_{20}''}{\bar{\rho}_0} \right\},$$

$$u_{21}^{0''} = \frac{1}{f^2 - \omega^2} \left[ fki \frac{p_{10}''}{\bar{\rho}_0} + \frac{fp_{10}'}{\bar{\rho}_0} - 2\omega c_g iu_{20}' \right],$$

$$u_{22}^{0''} = \frac{1}{f^2 - 4\omega^2} \left\{ f \left( u_{10}' kiu_{10}' + u_{30}' \frac{du_{10}'}{dx_3} \right) + 2\omega i \left( u_{10}' kiu_{20}' + u_{30}' \frac{du_{20}'}{dx_3} \right) + 2 fki \frac{p_{20}''}{\bar{\rho}_0} \right\}.$$

Следует отметить, что функции  $p_{10}''/\bar{\rho}_0$ ,  $p_{20}''/\bar{\rho}_0$ ,  $u_{30}'$ ,  $u_{12}^{0''}$ ,  $\rho_{10}''$ ,  $\rho_{20}''$ ,  $u_{20}'$  — действительные;  $u_{22}^{0''}$ ,  $u_{10}'$ ,  $\rho_{10}'$ ,  $u_{31}^{0''}$ ,  $u_{32}^{0''}$ ,  $u_{21}^{0''}$ ,  $u_{11}^{0''}$ ,  $p_{10}'/\bar{\rho}_0$  — мнимые.

Уравнение для  $u_3'''$  в третьем порядке малости по  $\varepsilon$ , после подстановки (3) в (2), приведено в Приложении. Из условия разрешимости неоднородной

краевой задачи (П.3) по определению вертикальной структуры первой гармоники  $u_{31}^{III}(x_3)$  следует эволюционное уравнение для огибающей:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - i \frac{q}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + iT|A^2|A = 0, \quad (9)$$

$$q = -\frac{2}{i} \frac{\int_0^H u'_{30} S_2 dx_3}{\int_0^H u'_{30} S_1 dx_3}, \quad T = \frac{\int_0^H u'_{30} S_3 dx_3}{i \int_0^H u'_{30} S_1 dx_3}. \quad (10)$$

Разделив уравнение (9) на  $-q$ , получим нелинейное уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - iT_1|A^2|A = 0, \quad (11)$$

где  $\tau_1 = -q\tau$ ,  $T_1 = \frac{T}{q}$  (величина  $q$  отрицательна).

Функция  $S_3$  (П.5), входящая в определение коэффициента нелинейного самовоздействия  $T$  (10), содержит неизвестные слагаемые  $\bar{u}_i''/|A^2|$ ,  $\bar{\rho}''/|A^2|$ ,  $\bar{u}_3''/|A^2|$ . Индуцированные пакетом неосциллирующие поля  $\bar{u}_i''$ ,  $\bar{\rho}''$  во втором порядке малости по крутизне волны определены аналогично [11] из системы уравнений, полученной из исходных уравнений гидродинамики для волновых возмущений, осредненных за период волны.

Неосциллирующая на периоде волны поправка к средней плотности и скорость индуцированного течения определяются по формулам [11]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &\cong 0, \quad \bar{u}_2 \cong 0, \\ \bar{u}_1 &= -\frac{1}{f} \frac{d \overline{u_2 u_3}}{dx_3} = -\frac{2}{\omega k} \frac{d}{dx_3} \left( u_{30} \frac{du_{30}}{dx_3} \right) \Big| A^2 | \varepsilon^2, \\ \bar{\rho} &= \frac{d}{dx_3} \left( \frac{u_{30}^2}{\omega^2} \frac{d\rho_0}{dx_3} \right) \Big| A^2 | \varepsilon^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{u}_i = \varepsilon^2 \bar{u}_i'', \quad \bar{\rho} = \varepsilon^2 \bar{\rho}''.$$

Уравнение (11) – нелинейное уравнение Шредингера, принадлежащее к классу вполне интегрируемых систем. Оно допускает частное решение в виде огибающей слабонелинейной плоской волны:

$$A = A_0 \exp\left(i|A_0|^2 \tau_1 T_1\right).$$

При  $T_1 < 0$  слабонелинейная плоская волна неустойчива к продольной модуляции [10].

## Результаты расчетов

Выполним расчет средних течений, индуцированных захваченной топографической волной, на полигоне измерений в Норвежском море.

Автономные цифровые измерители скорости течений, температуры, электропроводности, глубины погружения (АЦИТТ) располагались на расстоянии 1,5 – 3 м от дна, дискретность измерений составляла 2 ч. Измерения проводились двумя приборами АЦИТТ, которые входили в состав ДАС (донная автономная станция). Каждая пара приборов устанавливалась на металлической крестовине на расстоянии 2,2 м друг от друга, станция поддерживалась в вертикальном положении глубоководным бумом. Расстояние от центра блока датчиков прибора до дна составляло на ДАС-1 2,5 м, на ДАС-2 – 3 м. Станции удерживались на дне якорями, снабженными акустическими размыкателями. Уклон дна на полигоне измерений  $3^\circ$ , глубина 1700 м, направление изобат по отношению к зональному составляло  $60^\circ$ . Анализ данных измерителей скорости течения показал значительную временную изменчивость, величины скоростей достигали 10 – 30 см/с (рис. 1). Период низкочастотных колебаний компонент скорости течения составлял 5 – 7 сут, длина временного ряда 180 сут. На фоне низкочастотных колебаний прослеживались колебания с периодами 14 – 40 ч (рис. 2), которые соответствуют периодам захваченных топографических волн. Графики на рис. 2 получены вычитанием из исходной реализации соответственно осредненных за 52 ч зональной и меридиональной компонент скорости течения.

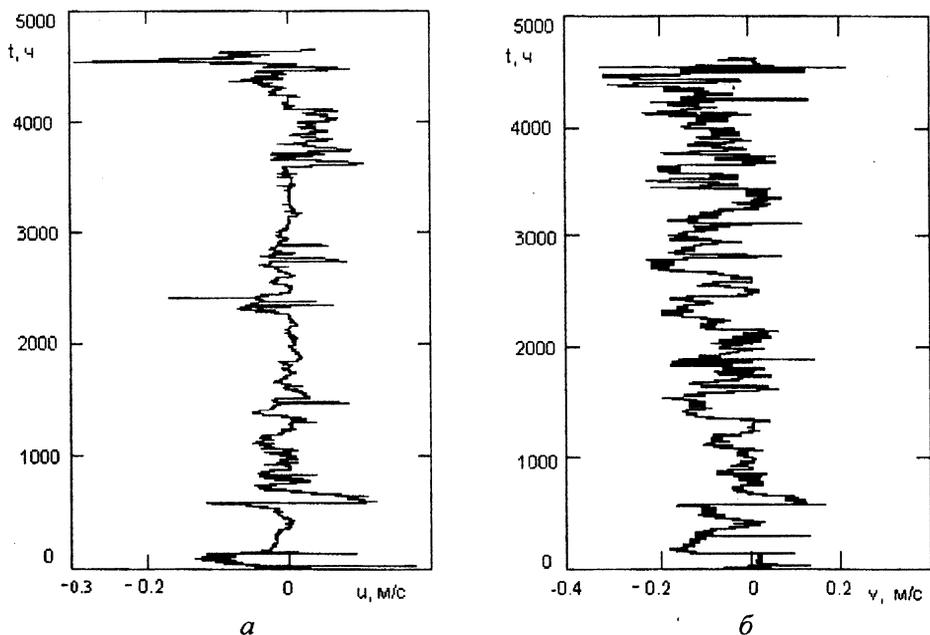
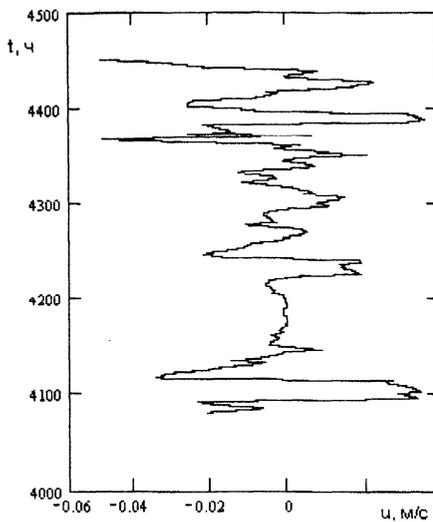
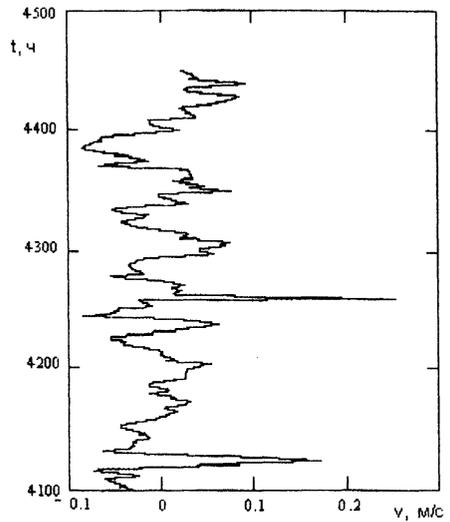


Рис. 1. Исходная реализация зональной (а) и меридиональной (б) компонент скорости течения



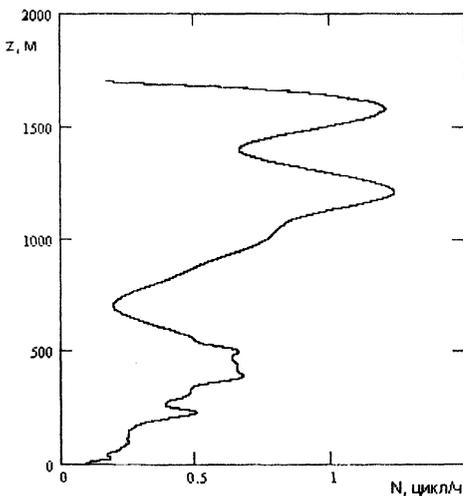
*a*



*б*

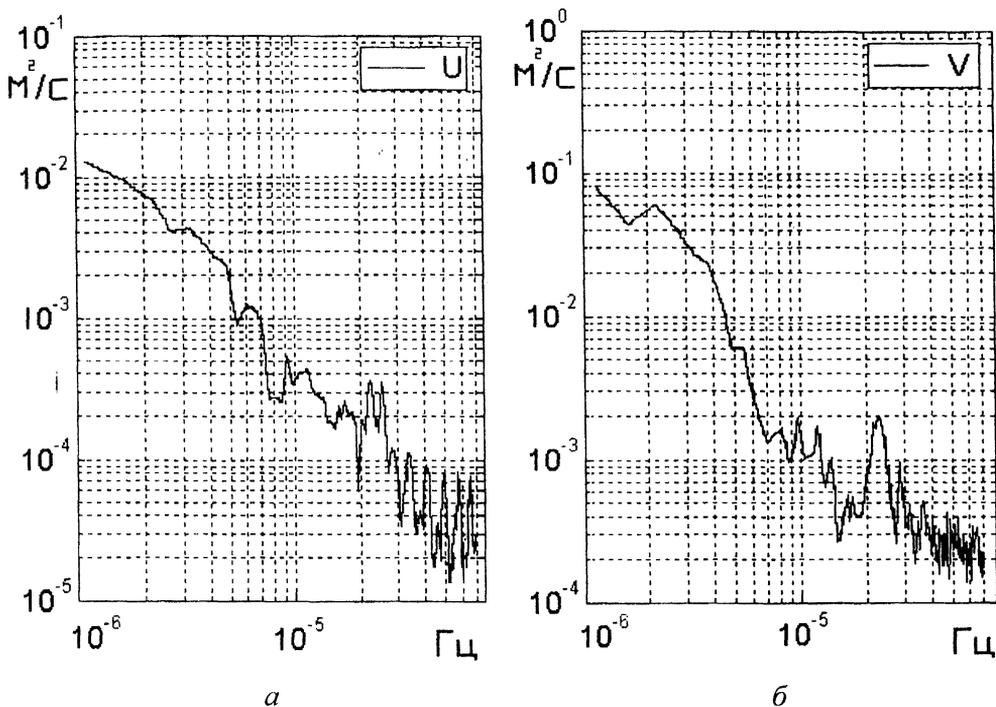
**Р и с. 2.** Временной ход высокочастотных колебаний зональной (*a*) и меридиональной (*б*) компонент скорости течения

Амплитуды колебаний скорости на рис. 2 достаточно велики (4 – 8 см/с), средний период колебаний ~28 ч. Столь большие измеренные амплитуды волновых скоростей у дна соответствуют захваченным топографическим волнам. Теоретически делается оценка пространственных масштабов этих волн и определяется вертикальное распределение амплитуды колебаний. Средний профиль частоты Брента – Вьяйсяля показан на рис. 3.



**Р и с. 3.** Вертикальный профиль средней частоты Брента – Вьяйсяля

На рис. 4 изображены спектры двух компонент скорости течения. Для выделения высокочастотной составляющей в показаниях измерителей скорости течения из исходной реализации вычитались соответственно осредненные за 52 ч зональная и меридиональная компоненты скорости течения. Спектры двух компонент высокочастотной составляющей показаны на рис. 5. Следует выделить пик для обеих составляющих скорости течения на частоте, соответствующей 28-часовым колебаниям.



Р и с. 4. Спектры зональной (а) и меридиональной (б) компонент скорости течения

Краевая задача (4) – задача по определению функции  $u'_{30}$  и величины  $k^2$ . Нетривиальные решения (4) находим численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Величину квадрата горизонтального волнового вектора определяем методом пристрелки, требуя выполнимости граничных условий. В результате находим функцию  $u'_{30}$  захваченной наклонным дном моды топографических волн при фиксированной частоте волны  $\omega < f$ . По измеренной амплитуде горизонтальной скорости у дна производим нормировку решения  $u'_{30}$ , средняя амплитуда 28-часовых захваченных топографических волн составляет 9 см/с (рис. 2). График амплитуды вертикальной скорости  $w(z)$  показан на рис. 6, а.

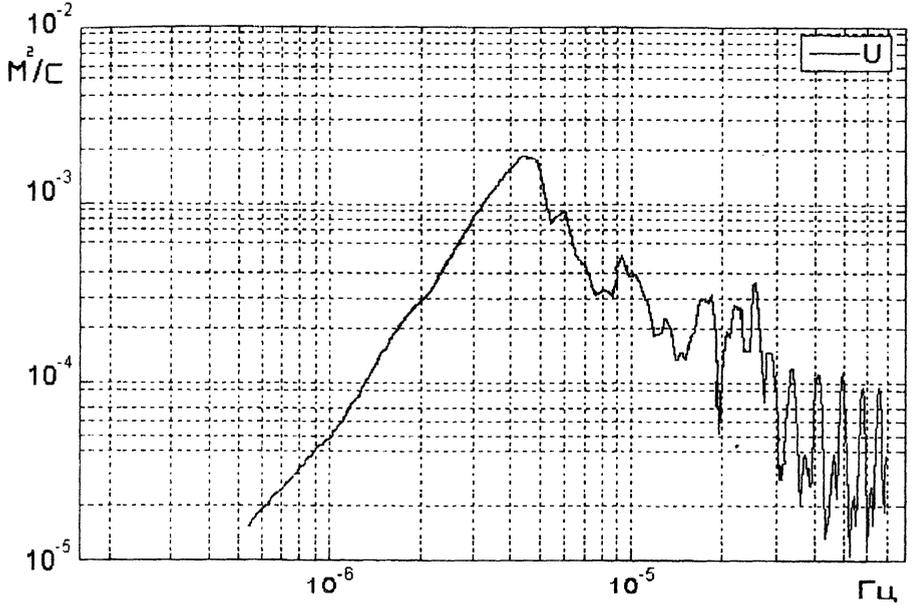
Горизонтальное волновое число  $k$  для 28-часовой волны равно  $-1,945 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ . Захваченная топографическая волна распространяется, оставляя более мелкую воду справа. Амплитуда горизонтальной скорости  $u$ , направленной вдоль изобат, выражается через амплитуду вертикальной скорости  $w$ :

$$u = \frac{i \, dw}{k \, dx_3}.$$

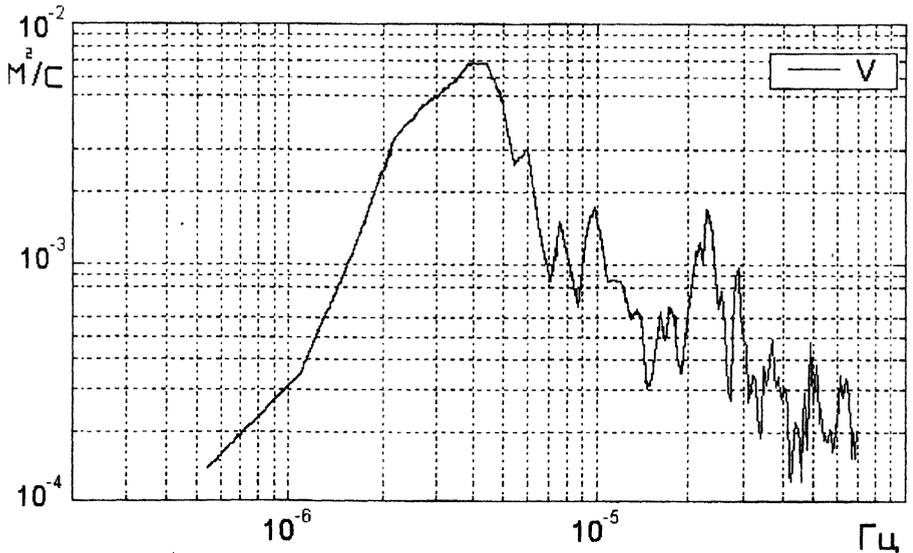
Амплитуда горизонтальной скорости  $v$ , направленной поперек изобат, также выражается через амплитуду вертикальной скорости  $w$ :

$$v = \frac{f}{k\omega} \frac{dw}{dx_3}$$

Графики амплитуд  $u, v$  показаны на рис. 6, б, в.

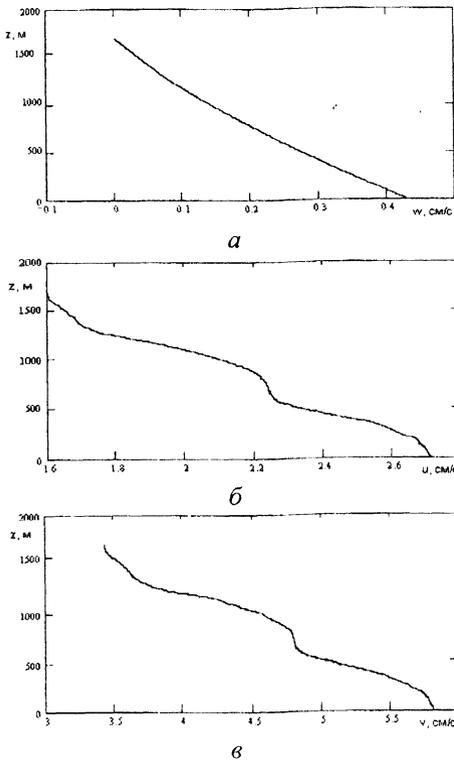


а

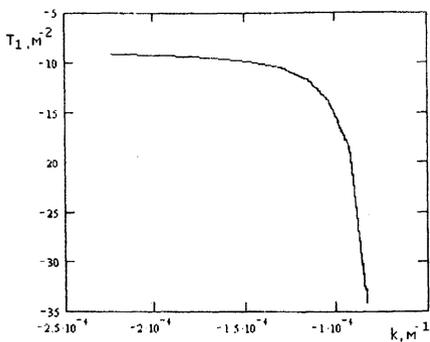


б

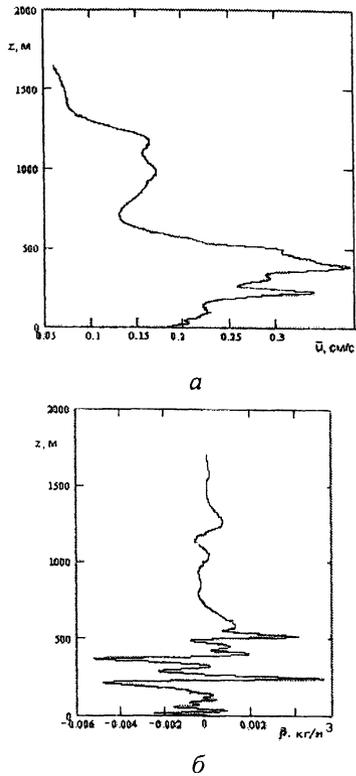
Р и с. 5. Высокочастотная часть спектра зональной (а) и меридиональной (б) компонент скорости течения



Р и с. 6. Профили амплитуд вертикальной  $w$  (а) и горизонтальных  $u$  (б),  $v$  (в) компонент скорости



Р и с. 7. Зависимость коэффициента  $T_1$  от волнового числа



Р и с. 8. Вертикальный профиль горизонтального индуцированного течения (а) и неосциллирующей поправки к плотности (б)

Краевые задачи (7), (8) по определению вертикальной структуры поправок второго приближения  $u_{31}^{0//}(x_3), u_{32}^{0//}(x_3)$  решались численно по неявной схеме Адамса третьего порядка. Делался расчет зависимости коэффициента нелинейного самовоздействия  $T_1$  от волнового числа  $k$  (рис. 7). Этот коэффициент отрицателен, следовательно, захваченные топографические волны в рассматриваемом диапазоне масштабов модуляционно неустойчивы.

На рис. 8 показаны индуцированные 28-часовой захваченной топографической волной скорость

среднего течения  $\bar{u}_1$  и неосциллирующая поправка к плотности  $\bar{\rho}$  при стратификации, изображенной на рис.3.

### Выводы

1. Экспериментальные исследования в Норвежском море выявили значительную динамическую активность в придонном слое. Величины скоростей течений могут достигать 20 – 30 см/с на расстоянии 2 – 3 м от дна. Преобладающий период колебаний превышает инерционный, что послужило основанием связывать их с прохождением захваченных топографических волн.

2. Кинетическая энергия захваченных топографических волн сконцентрирована в придонном слое. Амплитуды волновых скоростей убывают с удалением от дна.

3. В связи с высокой динамической активностью у дна рассмотренные волны играют важную роль во взвешивании и переносе донного осадочного материала.

4. Захваченные топографические волны генерируют средние неосциллирующие на масштабе волны поправки к вертикальному распределению средней плотности и скорости течения, пропорциональные квадрату текущей амплитуды волны. Индуцированное волной среднее течение распространяется вдоль направления волны (вдоль изобат).

5. Огибающая захваченных топографических волн удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера. Коэффициент  $T_1$  в этом уравнении отрицателен, поэтому захваченные топографические волны модуляционно неустойчивы.

Авторы благодарны А.М. Чухареву и И.С. Багимову за помощь в интерпретации и обработке экспериментального материала.

### Приложение

Уравнение для  $u_3'''$  в третьем порядке малости по  $\varepsilon$  после подстановки (3) в (2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & c_g^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Lu_3' + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( Lu_3''' + Mu_3'' + \frac{\partial^2 u_3'}{\partial \xi^2} \right) + 2\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left( c_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (Lu_3'' + Mu_3') - \\
 & - 2\omega \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \tau} (Lu_3') + f^2 \frac{d^2 u_3'''}{dx_3^2} - \frac{g}{\bar{\rho}_0} \left[ k^2 \frac{\partial^2 u_3'''}{\partial \theta^2} + Mu_3'' + \frac{\partial^2 u_3'}{\partial \xi^2} \right] \frac{d\rho_0}{dx_3} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \times \\
 & \times \left[ -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} (u_1' k \frac{\partial u_3''}{\partial \theta} + u_1' \frac{\partial u_3'}{\partial \xi} + u_1'' k \frac{\partial u_3'}{\partial x_3} + u_3' \frac{\partial u_3''}{\partial x_3} + u_3'' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}) - c_g \frac{\partial}{\partial \xi} (u_1' \frac{\partial u_3'}{\partial \theta} + \right. \\
 & \left. + u_3' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}) \right] - M \left[ -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} (u_3' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3} + u_1' k \frac{\partial u_3'}{\partial \theta}) \right] + k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ u_1' k \frac{\partial \rho''}{\partial \theta} + u_1' \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_1'' \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u_3'' \frac{\partial \rho'}{\partial x_3} + u_3' \frac{\partial \rho''}{\partial x_3} \left] \frac{g}{\rho_0} + M[u_1' k \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial \rho'}{\partial x_3}] \frac{g}{\rho_0} + \frac{d}{dx_3} \left[ f k \frac{\partial}{\partial \theta} \times \right. \\
& \times (u_1'' k \frac{\partial u_2'}{\partial \theta} + u_1' k \frac{\partial u_2''}{\partial \theta} + u_1' \frac{\partial u_2'}{\partial \xi} + u_3'' \frac{\partial u_2'}{\partial x_3} + u_3' \frac{\partial u_2''}{\partial x_3}) + f \frac{\partial}{\partial \xi} (u_1' k \frac{\partial u_2'}{\partial \theta} + \\
& + u_3' \frac{\partial u_2'}{\partial x_3}) - \omega \frac{\partial}{\partial \theta} (k \frac{\partial}{\partial \theta} (u_1'' k \frac{\partial u_1'}{\partial \theta} + u_1' k \frac{\partial u_1''}{\partial \theta} + u_3'' \frac{\partial u_1'}{\partial x_3} + u_1' \frac{\partial u_1'}{\partial \xi} + u_3' \frac{\partial u_1''}{\partial x_3})) + \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} (u_1' k \frac{\partial u_1'}{\partial \theta} + u_3' \frac{\partial u_1'}{\partial x_3}) - c_g \frac{\partial}{\partial \xi} (k \frac{\partial}{\partial \theta} (u_1'' k \frac{\partial u_1'}{\partial \theta} + u_1' k \frac{\partial u_1''}{\partial \theta} + u_3'' \frac{\partial u_1'}{\partial x_3} + u_1' \frac{\partial u_1'}{\partial \xi} + u_3' \frac{\partial u_1''}{\partial x_3})) \right]. \quad (\text{П.1})
\end{aligned}$$

Решение уравнения (П.1) будем искать в виде суммы разложения по степеням  $e^{i\theta}$  и неосциллирующего слагаемого  $\tilde{u}_3(\xi, \tau, x_3)$ :

$$u_3''' = u_{31}'''(\xi, \tau, x_3)e^{i\theta} + u_{32}'''(\xi, \tau, x_3)e^{2i\theta} + u_{33}'''(\xi, \tau, x_3)e^{3i\theta} + \text{k.c.} + \tilde{u}_3(\xi, \tau, x_3). \quad (\text{П.2})$$

Подставляя (П.2) в (П.1) и приравнявая члены при  $e^{i\theta}$ , получим уравнение для  $u_{31}'''$ :

$$-\omega^2 \left( -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u_{31}''' + \frac{gk^2}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} u_{31}''' + f^2 \frac{d^2 u_{31}'''}{dx_3^2} = S_1 A_\tau + S_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + S_3 A^2 A^*, \quad (\text{П.3})$$

$$u_{31}''' \Big|_{x_3=H} = 0, \quad \frac{f}{k\omega} \text{tg}(\gamma) \frac{du_{31}'''}{dx_3} \Big|_{x_3=0} = u_{31}''' \Big|_{x_3=0}, \quad (\text{П.4})$$

где

$$S_1 = 2\omega i \left( -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u'_{30},$$

$$\begin{aligned}
S_2 = & -c_g^2 \left( -k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) u'_{30} + \omega^2 (2iku_{31}^{0''} + u'_{30}) - 2\omega ic_g \times \\
& \times \left[ (-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2}) u_{31}^{0''} + 2iku'_{30} \right] + \frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dx_3} (2iku_{31}^{0''} + u'_{30}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 = & k^2 \left[ -\omega i (u_{10}^{*'} kiu_{32}^{0''} - u_{12}^{0''} kiu_{30}^{*'}) + \frac{\bar{u}_1''}{|A^2|} kiu'_{30} + u_{30}^{*'} \frac{du_{32}^{0''}}{dx_3} + \right. \\
& + \frac{u'_{30}}{|A^2|} \frac{\partial \bar{u}_3''}{\partial x_3} + \frac{\bar{u}_3''}{|A^2|} \frac{du'_{30}}{dx_3} + u_{32}^{0''} \frac{du_{30}^{*'}}{dx_3} \left. \right] - k^2 [u_{10}^{*'} 2ki\rho_{20}'' - \\
& - ku_{12}^{0''} \rho_{10}^{*'} i + \bar{u}_1'' \frac{ki}{|A^2|} \rho_{10}' + u_{32}^{0''} \frac{d\rho_{10}^{*'}}{dx_3} + \frac{\bar{u}_3''}{|A^2|} \frac{d\rho_{10}'}{dx_3} + u_{30}^{*'} \frac{d\rho_{20}''}{dx_3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_{30}^I}{|A^2|} \frac{\partial \bar{\rho}^{II}}{\partial x_3} \left] \frac{g}{\bar{\rho}_0} + \frac{d}{dx_3} [fki (-iu_{12}^{0II} ku_{20}^{*I} + 2u_{10}^{*I} kiu_{22}^{0II} + u_{32}^{0II} \frac{du_{20}^{*I}}{dx_3} + \right. \\
& + \frac{\bar{u}_3^{II}}{|A^2|} \frac{du_{20}^I}{dx_3} + u_{30}^{*I} \frac{du_{22}^{0II}}{dx_3} + u_{30}^I \left. \frac{d\bar{u}_2^{II}}{|A^2| dx_3} \right) + \omega k (-u_{12}^{0II} kiu_{10}^{*I} + \\
& + \frac{\bar{u}_1^{II}}{|A^2|} iku_{10}^I + 2kiu_{10}^{*0I} u_{12}^{0II} + \frac{\bar{u}_3^{II}}{|A^2|} \frac{du_{10}^I}{dx_3} + u_{32}^{0II} \frac{du_{10}^{*I}}{dx_3} + u_{30}^{*I} \frac{du_{12}^{0II}}{dx_3} + \\
& + u_{30}^I \left. \frac{d\bar{u}_1^{II}}{|A^2| dx_3} \right)]. \tag{П.5}
\end{aligned}$$

Однородная краевая задача, соответствующая (П.3), имеет нетривиальное решение, когда  $\omega$ ,  $k$  удовлетворяют дисперсионному соотношению. Краевая задача (П.3) разрешима, если правая часть уравнения ортогональна решению краевой задачи (4) [13].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блатов А.С., Иванов В.А. Гидрология и гидродинамика шельфовой зоны Черного моря. – Киев: Наук. думка, 1992. – 237 с.
2. Иванов В.А., Янковский А.Е. Длинноволновые движения в Черном море. – Киев: Наук. думка, 1992. – 111 с.
3. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч.1. – М.: Мир, 1981, – 478 с.
4. Huthnance J.M. On trapped waves over a continental shelf // J.Fluid Mech. – 1975. – 69. – P. 689 – 704.
5. Brink K.H. A comparison of long coastal trapped waves theory with observation off Peru // J. Phys. Oceanogr. – 1982. – 12, № 8. – P. 897 – 913.
6. Ou, H.-W. On the propagation of free topographic Rossby waves near continental margins. Part 1. Analytical model for a wedge // Ibid. – 1980. – 10, № 7. – P. 1051 – 1060.
7. Rhines P. Edge-, bottom-, and Rossby waves in a rotating stratified fluid // Geophys. Fluid Dyn. – 1970. – 1. – P.273 – 302.
8. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т.2. – М.: Мир, 1984. – 811с.
9. Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. Appl. Math. – 1977. – 56. – P.241 – 266.
10. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 302с.
11. Слепышев А.А., Шамова В.С. Средние течения, индуцированные низкочастотными внутренними волнами // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1989. – 25, № 10. – С. 1082 – 1088.

12. *Слепышев А.А.* Транспортные свойства придонных топографических волн на шельфе и континентальном склоне // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 2002. – 38, № 6. – С. 841 – 847.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
Черноморский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 31.01.07  
После доработки 06.03.07

ABSTRACT Trapped topographical waves above the sloping bottom at real stratification are studied in the Boussinesque approximation. Mean currents induced by a wave due to non-linearity, and non-oscillating correction for the mean density are defined. Shredinger non-linear equation for the envelope is obtained. Based on the data of the experiment in the Norwegian Sea, the periods and amplitudes of the trapped topographical waves are estimated. Spatial distribution of the speed amplitudes and the mean current induced by a wave due to non-linearity is investigated. It is shown that modulation of the trapped topographical waves is unstable.