

## Нелинейные радиальные колебания жидкости в параболическом бассейне с учетом внешнего воздействия

В рамках теории длинных волн найден класс точных аналитических решений, описывающих нелинейные осесимметричные колебания жидкости в параболическом бассейне с учетом действия стационарных радиальных массовых сил. Радиальная проекция скорости таких колебаний (сейш) является линейной функцией, азимутальная скорость и смещения свободной поверхности жидкости – многочленами по радиальной координате с зависящими от времени коэффициентами. Метод нахождения решения использует точную замену исходной задачи системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Действие массовой силы может приводить как к увеличению, так и к уменьшению частоты колебаний жидкости, влиять на движение уреза воды, характеристики волн и поле скорости.

**Введение.** Точные аналитические решения удается найти только для небольшого числа нелинейных волновых задач, включая исследование волн Герстнера [1], задачи о разрушении плотины [2] и накате волны на плоский береговой откос [3]. Использование модели длинных волн, предполагающей распределение давления в движущейся жидкости гидростатическим, дало возможность расширить перечень нелинейных задач, для которых удастся найти точные аналитические решения. В рамках этого подхода получены решения задач об осесимметричных колебаниях жидкости в бассейнах параболической формы [4 – 7] и о пульсациях вихревых образований в океане [8 – 14]. Исследования последнего типа инициированы задачами океанологии.

В настоящей работе получен новый класс точных аналитических решений нелинейной системы уравнений длинных волн. Он описывает осесимметричные периодические колебания идеальной однородной жидкости во вращающемся бассейне в форме параболоида вращения с учетом действия на жидкость горизонтальной осесимметричной массовой силы. Общий вид подобных решений предложен в работе [13] о нелинейных инерционных колебаниях круговых вихрей, ее результаты в дальнейшем были распространены на колебания вихрей с учетом внешних воздействий [14]. В [13, 14] радиальная скорость – линейная функция радиальной координаты, азимутальная скорость и толщина вихря – многочлены различных степеней по радиальной координате с зависящими от времени коэффициентами. Решение линейной задачи о сейшах в параболическом вращающемся бассейне приведено в [1]. Различные аспекты плоской линейной задачи о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в бассейнах с параболическим распределением глубины рассмотрены в [15, 16].

**Сведение задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.** В рамках теории длинных поверхностных волн рассматриваются не-

линейные осесимметричные колебания идеальной однородной тяжелой жидкости в ограниченном бассейне переменной глубины  $d$ , вращающемся с угловой скоростью  $f/2$  относительно вертикальной оси  $z$ . Учитывается действие на жидкость зависящей от времени распределенной осесимметричной горизонтальной массовой силы  $(X, Y, 0)$ . В цилиндрической системе координат  $(R, \phi, z)$  не зависящее от азимутального угла  $\phi$  движение жидкости (осесимметричное движение) описывается в безразмерных переменных системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - v = -\frac{\partial \zeta}{\partial r} + X, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + u = Y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [r(\zeta + d)u]}{r \partial r} = 0, \quad (3)$$

где  $\{u; v\}(r, t)$  – радиальная и азимутальная проекции горизонтальной скорости течения;  $\zeta(r, t)$  – смещение свободной поверхности относительно невозмущенного положения  $z = 0$ ;  $\{X; Y\}(r, t)$  – ускорение горизонтальной массовой силы;  $t$  – время;  $r$  – расстояние от вертикальной оси симметрии;  $z = -d(r)$  – уравнение радиального сечения донной поверхности.

При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабных единиц скорости течения, глубины бассейна и смещений свободной поверхности жидкости использованы соответственно скорость  $C = \sqrt{gH_0}$  ( $g$  – ускорение свободного падения) и максимальная глубина бассейна  $H_0$ . Для радиальной координаты и времени в качестве масштабных единиц взяты величины  $Cf^{-1}$  и  $f^{-1}$ . Масштабная единица для ускорения массовой силы равна  $Cf$ .

В дальнейшем рассматривается бассейн в форме параболоида вращения, для которого в указанных выше безразмерных координатах

$$d = d_0 - d_1 r^2, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = \text{const} > 0. \quad (4)$$

По аналогии с работами [6, 13, 14] решение системы уравнений (1) – (3) будем искать в виде следующих многочленов по радиальной координате  $r$  с зависящими от времени  $t$  коэффициентами:

$$u = A(t)r, \quad v = \sum_{j=1}^n B_j(t)r^{2j-1}, \quad (5)$$

$$\zeta = \sum_{j=0}^{2n-1} C_j(t)r^{2j}, \quad (6)$$

$$X = \sum_{j=1}^{2n-1} x_j(t)r^{2j-1}, \quad Y = \sum_{j=1}^n y_j(t)r^{2j-1}, \quad (7)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Натуральное число  $n$  целесообразно назвать порядком решения (5) – (7). При всех  $n$  радиальная скорость линейно зависит от  $r$ .

Подстановка (4) – (7) в уравнения (1) – (3) приводит к следующей системе  $5n - 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраических соотношений:

$$\delta_{j1} \frac{dA}{dt} - \sum_{k=1}^j B_k B_{j-k+1} + \delta_{j1} A^2 - B_j + 2jC_j - x_j = 0 \quad (j = 1, \dots, 2n-1), \quad (8)$$

$$\frac{dB_j}{dt} + 2jAB_j + \delta_{j1}A - y_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (9)$$

$$\frac{dC_j}{dt} + 2(j+1)A(C_j + \delta_{j0}d_0 - \delta_{j1}d_1) = 0 \quad (j = 0, \dots, 2n-1), \quad (10)$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера,  $B_j(t) \equiv 0$  при  $j > n$ . Для любого  $j = 2, \dots, 2n - 1$  равенства (8) являются алгебраическими соотношениями между коэффициентами  $C_j$  и  $B_k$  ( $k = 1, \dots, j$ ).

Увеличение порядка  $n$  решения (5), (6) на единицу дает три дополнительных дифференциальных уравнения и два алгебраических соотношения, а именно: одно уравнение из (9) при  $j = n$ , два уравнения из (10) при  $j = 2n - 2$  и  $j = 2n - 1$ , наконец, два алгебраических соотношения из (8) при  $j = 2n - 2$ ,  $j = 2n - 1$ . Поэтому переход в системе (8) – (10) от  $n$  к  $n + 1$  добавляет в решение (5), (6) одну степень свободы.

Стационарное решение системы (8) – (10) в случае  $Y \equiv 0$  имеет вид

$$A = 0, C_j = \frac{1}{2j} \left( B_j + \sum_{k=1}^j B_k B_{j-k+1} + x_j^\infty - \delta_{j1} A^2 \right) \quad (j = 1, \dots, 2n-1), \quad (11)$$

где  $B_j$  – произвольные константы, причем  $B_j = 0$  при  $j > n$ , а  $x_j \rightarrow x_j^\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . В (11) предполагается, что предел  $x_j^\infty$  существует. Коэффициент  $C_0$  в выражении для смещений свободной поверхности  $\zeta$  является произвольной константой, ограниченной снизу значением  $-d_0$ .

**Точное аналитическое решение нелинейной задачи.** Система уравнений (8) – (10) с соответствующими начальными условиями может быть решена численно, если внешнее воздействие на жидкость известно. Однако цель настоящей работы – найти аналитические решения, описывающие колебания жидкости конечной амплитуды в параболоиде вращения. Будем предполагать массовую силу  $(X, Y)$  стационарной, что означает постоянство коэффициентов  $x_j$  и  $y_j$  степенных рядов по  $r$  для радиальной и азимутальной проекций массовой силы. Используемая ниже процедура нахождения решения первоначально предложена в [13] применительно к анализу нелинейных колебаний океанических вихрей. Анализ показывает, что такой метод позволяет найти аналитическое решение рассматриваемой задачи, если массовая сила является чисто радиальной, т.е. азимутальная проекция массовой силы  $Y \equiv 0$  ( $y_i = 0$ ).

Для любых  $n \geq 1$  периодическое решение нелинейной системы уравнений (6) – (8) будем искать в виде

$$A = a\Psi \cos \Phi, \quad \Psi = (1 + \gamma \sin \Phi)^{-1}, \quad \Phi = \omega t + \varphi, \quad (12)$$

$$B_j = -\frac{1}{2} \delta_{j1} + b_j \Psi^j \quad (j=1, \dots, n), \quad (13)$$

$$C_j = -\delta_{j0} d_0 + \delta_{j1} d_1 + c_j \Psi^{j+1} \quad (j=0, \dots, 2n-1), \quad (14)$$

где  $\omega$  – частота колебаний, которая должна быть определена;  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $c_0$  и  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) – известные константы.

Выражения для  $a$  и  $c_j$  ( $j \geq 1$ ) через  $b_j$  и  $\omega$  находятся в результате подстановки (12) – (14) в уравнения (8) – (10). Окончательно получим

$$a = \frac{1}{2} \gamma \omega, \quad \omega = \sqrt{1 + 8d_1 - 4x_1}, \quad (15)$$

$$c_j = \frac{1}{2j} \left[ (1 - \delta_{j1}) x_j - \frac{1}{4} \delta_{j1} \omega^2 (1 - \gamma^2) + \sum_{k=1}^j b_k b_{j-k+1} \right] \quad (j=1, \dots, 2n-1), \quad (16)$$

полагая  $b_j = 0$  при  $j > n$ . Выражения (12) – (16) позволяют записать точное решение системы уравнений (1) – (3) при всех  $n \geq 1$  в форме

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi r \cos \Phi, \quad v = -\frac{1}{2} r + \sum_{j=1}^n b_j \Psi^j r^{2j-1}, \quad (17)$$

$$\zeta = \sum_{j=0}^{2n-1} c_j \Psi^{j+1} r^{2j} - d_0 + d_1 r^2. \quad (18)$$

Параметры  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $c_0$  и  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в (17) и (18) – произвольные константы, удовлетворяющие условиям  $|\gamma| < 1$ ,  $c_0/(1+\gamma) > d_0$ ; последнее неравенство обеспечивает ненулевую глубину жидкости в центре бассейна при всех  $t \geq 0$ . Кроме этого, не каждый набор параметров может гарантировать существование береговой черты конечного радиуса. Свободные параметры должны быть выбраны такими, чтобы уравнение  $\zeta(r, t) + d(r) = 0$  (как многочлен степени  $4n - 2$  по  $r$ ) имело положительные корни  $r = r_b(t) > 0$  при всех  $t \geq 0$ . Береговая черта соответствует наименьшему из этих корней.

**Некоторые общие свойства нелинейных колебаний жидкости.** Частота нелинейных колебаний жидкости  $\omega$  в бассейне не зависит от амплитуды колебаний и порядка  $n$  решения, что говорит об их изохронности [7]. Напротив, ее значение определяется параметром Кориолиса, геометрическими характеристиками бассейна и коэффициентом  $x_1$  линейного по  $r$  слагаемого в полиномиальном представлении радиальной массовой силы  $X$ . При отсутствии внешнего воздействия ( $X = 0$ ) частота колебаний жидкости является суперинерционной, она равна ранее найденной в работах [1, 4, 5 – 7, 14]. Внешняя радиальная сила, направленная от границы к центру бассейна ( $x_1 < 0$ ), смещает частоту колебаний жидкости в область более высоких частот, а массовая сила, направленная от центра бассейна к береговой черте ( $x_1 > 0$ ), вызывает уменьшение частоты колебаний жидкости в бассейне по сравнению со случаем, когда внешняя массовая сила отсутствует. Согласно (15), внешнее

воздействие должно удовлетворять условию  $x_1 < 1/4 + 2d_1$ , чтобы обеспечить существование периодических колебаний жидкости в бассейне.

Как следует из формул (15) и (16), массовая сила влияет не только на частоту, но и на амплитудные характеристики колебаний. Влияние на частоту колебаний осуществляется через низший (линейный) член полиномиального представления силы, а остальные (нелинейные) члены разложения массовой силы оказывают влияние на амплитудные характеристики волновых полей. Выражение для  $\omega$  при отсутствии массовой силы совпадает с формулой для низшей (одноузловой) моды линейных осесимметричных стоячих волн во вращающемся параболическом бассейне [1].

Наиболее простой вид имеет нелинейное периодическое решение в случае  $n = 1$ , когда формулы (17), (18) записываются как

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi \cos \Phi r, \quad v = \left( -\frac{1}{2} + b_1 \Psi \right) r, \quad (19)$$

$$\zeta = c_0 \Psi - d_0 + (d_1 + c_1 \Psi^2) r^2, \quad (20)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 + 8d_1 - 4x_1}, \quad d_1 = \frac{d_0}{W^2}, \quad c_1 = \frac{1}{8} [4b_1^2 - (1 - \gamma^2) \omega^2], \quad (21)$$

$W$  – определяемый из уравнения  $d = 0$  безразмерный радиус невозмущенной свободной поверхности жидкости в бассейне. Решение зависит от четырех произвольных констант  $\gamma, \varphi, b_1, c_0 > 0$ , причем  $|\gamma| < 1$ . Константа  $b_1$  (или  $c_1$ ) находится с использованием (21). Амплитудные характеристики полей для решения первого порядка от массовой силы не зависят.

Аналогичное решение при отсутствии внешнего воздействия найдено различными методами в работах [4, 5]. Соответствующее ему движение характеризуется при всех  $t$  параболической формой свободной поверхности и линейно зависящим от радиуса полем скорости.

Объем движущейся жидкости – интеграл движения. Он равен объему жидкости в положении равновесия, когда свободная поверхность горизонтальна. Постоянство объема приводит к соотношению  $c_1 = -c_0^2 / (d_0 W^2)$ . Таким образом, при задании  $c_1$  по предыдущей формуле в решении (19), (20) свободным является только один параметр –  $c_0$ . Благодаря полному учету нелинейности решение воспроизводит периодические движения линии уреза  $r = r_b(t)$  (движение жидкости по сухому руслу) и ее вертикальные смещения  $\zeta = \zeta_b(t)$ :

$$r_b = W \sqrt{\frac{d_0}{c_0} (1 + \gamma \sin \omega t)}, \quad \zeta_b = -d_0 + \frac{d_0^2}{c_0} (1 + \gamma \sin \omega t).$$

Амплитуда колебаний этих характеристик пропорциональна параметру  $\gamma$ .

**Нелинейные колебания при  $n = 3$ .** Форма решения  $n$ -го порядка значительно сложнее и разнообразнее. Изменение произвольных констант в выражениях для полей (17), (18) при  $n > 1$  позволяет воспроизводить нелинейные

колебания с различной горизонтальной структурой азимутальной скорости  $v$  и смещений свободной поверхности  $\zeta$  при одной и той же линейной зависимости радиальной скорости  $u$  от радиальной координаты  $r$ .

При  $n = 3$  стационарная радиальная массовая сила задается в виде

$$X = x_1 r + x_2 r^3 + x_3 r^5 + x_4 r^7 + x_5 r^9, \quad x_j = \text{const}. \quad (22)$$

Поля скорости и смещений свободной поверхности жидкости находятся по формулам

$$u = \frac{1}{2} \gamma \omega \Psi r \cos \Phi, \quad (23)$$

$$v = -\frac{1}{2} r + b_1 \Psi r + b_2 \Psi^2 r^3 + b_3 \Psi^3 r^5, \quad (24)$$

$$\zeta = c_0 \Psi + c_1 \Psi^2 r^2 + c_2 \Psi^3 r^4 + c_3 \Psi^4 r^6 + c_4 \Psi^5 r^8 + c_5 \Psi^6 r^{10}, \quad (25)$$

где

$$\Psi = (1 + \gamma \sin \Phi)^{-1}, \quad \Phi = \omega t + \varphi, \quad \omega = \sqrt{1 + 8d_1 - 4x_1},$$

$$c_1 = \frac{1}{8} [4b_1^2 - (1 - \gamma^2) \omega^2], \quad c_2 = \frac{1}{4} (x_2 + 2b_1 b_2),$$

$$c_3 = \frac{1}{6} (x_3 + 2b_1 b_3 + b_2^2), \quad c_4 = \frac{1}{8} (x_4 + 2b_2 b_3), \quad c_5 = \frac{1}{10} (x_5 + b_3^2),$$

$\gamma, c_0, b_1, b_2, b_3$  – произвольные константы.

Радиальная массовая сила  $X$  может иметь различную физическую природу, в частности, может интерпретироваться как ветровое воздействие или горизонтально неоднородное барическое поле. В случае барического поля в размерных переменных соответствующая массовая сила выражается через возмущения атмосферного давления по формуле

$$X = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p_a}{\partial r},$$

где  $p_a$  – отклонение атмосферного давления в аномалии от среднего значения;  $\rho_w$  – плотность воды. Если пространственное распределение барических возмущений над бассейном задать по формуле

$$p_a = \Delta p \exp(-r^2 / R^2),$$

в которой  $R$  – характерный радиус барической аномалии, то в безразмерных переменных радиальная массовая сила запишется в виде

$$X = 2\delta\beta r \exp(-\delta r^2),$$

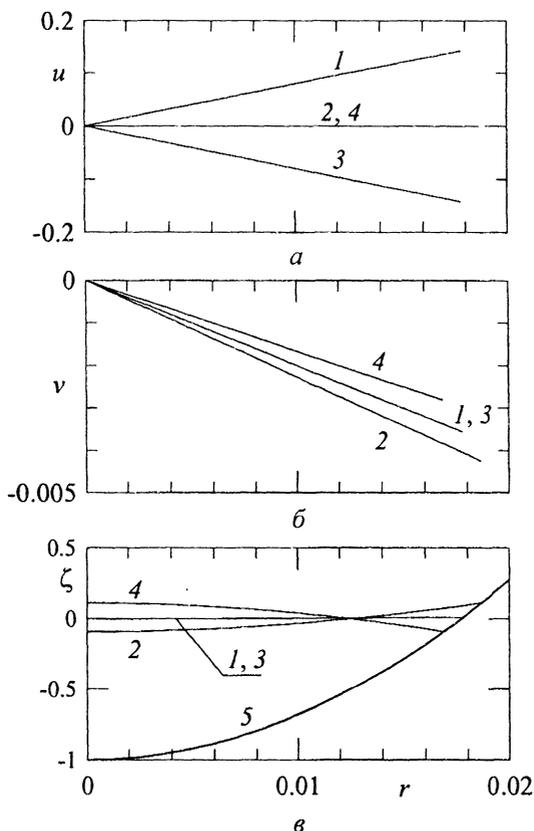
где  $\delta = C^2 / (Rf)^2$ ,  $\beta = \Delta p / (\rho_w C^2)$ .

Зададим параметры бассейна соответствующими озеру Больсена в центральной Италии [17]: максимальная глубина  $H_0 = 146$  м, средний радиус  $W = 6800$  м, значение параметра Кориолиса  $f = 9,85 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Рассмотрим ин

тенсивную барическую аномалию радиуса  $R = 10^5$  м с максимальным возмущением атмосферного давления в центре  $\Delta p = 3 \cdot 10^3$  Па. В этом случае  $\beta = 2,0946 \cdot 10^{-3}$ ,  $\delta = 14,7621$ . Значения коэффициентов в формуле (22) равны:

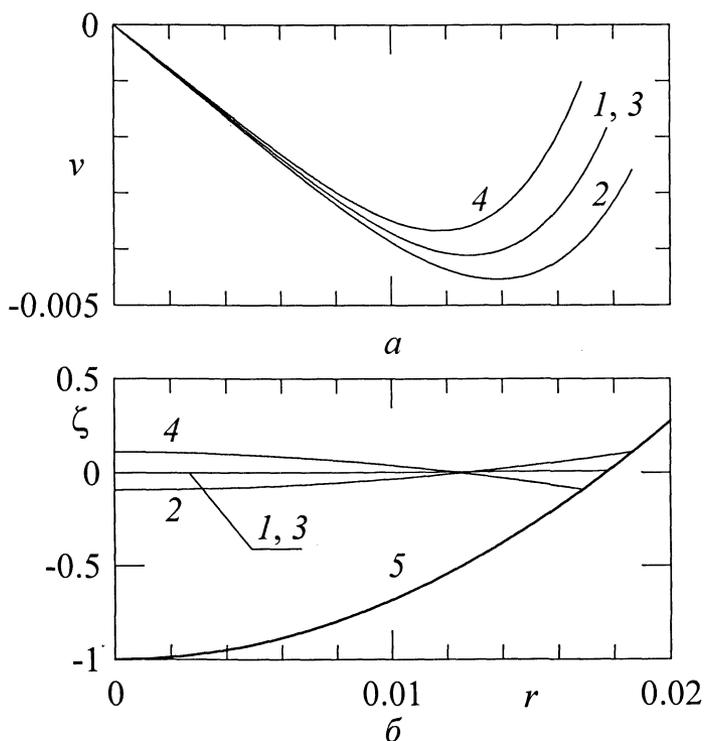
$$x_1 = 2\beta\delta = 6,184 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = -2\beta\delta^2 = -0,913, \quad x_3 = \beta\delta^3 = 6,738, \\ x_4 = -\beta\delta^4/3 = -33,157, \quad x_5 = \beta\delta^5/12 = 122,367.$$

На рис. 1 показана структура полей  $u$ ,  $v$ ,  $\zeta$  и ее изменение со временем в течение одного периода колебаний. Видно, что динамика жидкости фактически описывается классическим решением первого порядка, для которого проекции скорости линейно зависят от радиальной координаты, а форма свободной поверхности близка к параболической с одной узловой линией. В течение одного периода радиальная скорость и смещения свободной поверхности изменяют свой знак, хотя азимутальная скорость все время положительна. Последнее свойство означает, что найденный класс нелинейных колебаний жидкости характеризуется средним антициклоническим течением в бассейне, относительно которого происходят изменения скорости со временем.



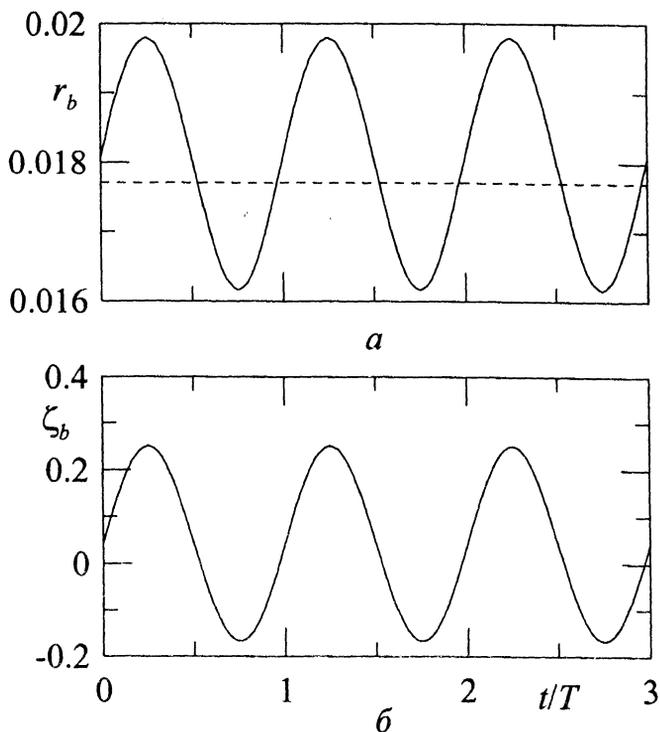
**Р и с. 1.** Распределения радиальной (а) и азимутальной (б) скоростей, а также смещений свободной поверхности жидкости (в) при  $n = 3$ . Географическая широта, максимальная глубина и радиус параболического бассейна соответствуют озеру Большое. Для кривых 1 – 4 моменты времени  $t$  равны 0;  $0,25T$ ;  $0,5T$ ;  $0,75T$  соответственно, где  $T$  – период колебаний. Кривая 5 – радиальное распределение глубины. Параметры:  $\gamma = 0,1$ ;  $c_0 = 1,001$ ;  $b_1 = 0,3$ ;  $b_2 = -0,3$ ;  $b_3 = 5$

Полиномиальная форма решения (23) – (25) позволяет моделировать существенно более сложную радиальную структуру полей в бассейне по сравнению с описанным выше случаем решения первого порядка. Хотя линейный характер зависимости радиальной скорости от  $r$  сохраняется, горизонтальная структура азимутальной скорости может существенно усложниться. Подобный случай для решения третьего порядка, когда азимутальная скорость течения изменяется немонотонно, представлен на рис. 2, *а*. Максимальная скорость вращательного движения жидкости достигается не на границе бассейна, как в решении первого порядка, а в его внутренней части. Что касается радиального распределения смещений свободной поверхности  $\zeta$  (рис. 2, *б*), то оно не претерпевает качественных изменений по сравнению со случаем  $n = 1$ .



**Р и с. 2.** Радиальные распределения азимутальной скорости (*а*) и смещений свободной поверхности жидкости (*б*) при  $n = 3$ . Кривые 1 – 4 соответствуют моментам времени  $t$ , равным  $0, 0,25T; 0,5T; 0,75T$ . Кривая 5 – радиальное распределение глубины. Параметры:  $\gamma = 0,1$ ;  $c_0 = 1,001$ ;  $b_1 = 0,1$ ;  $b_2 = -10$ ;  $b_3 = 3 \cdot 10^6$

Являясь точным решением нелинейной задачи, формулы (23) – (25) описывают движение жидкости по сухому берегу (движение линии уреза). Типичные колебания линии уреза  $r = r_b$  и свободной поверхности  $z = \zeta_b$  на ней представлены на рис. 3. Период колебаний находится по второй из формул (15) и не зависит, как отмечалось выше, от их амплитуды.



**Р и с. 3.** Колебания линии уреза  $r = r_b$  (а) и вертикальных смещений  $z = \zeta_b$  поверхности жидкости на ней (б) при  $n = 3$ . Штриховая линия – равновесное положение линии уреза. Параметры:  $\gamma = 0,2$ ;  $c_0 = 1,001$ ;  $b_1 = 0,1$ ;  $b_2 = -10$ ;  $b_3 = 3 \cdot 10^6$ . Время нормировано на период колебаний жидкости

Анализ показал, что для бассейнов типа озера Больсена (малая протяженность по сравнению с горизонтальным масштабом, относительно большая глубина) влияние действия барической аномалии на радиальные нелинейные колебания жидкости в параболическом бассейне мало. Оно усиливается с ростом радиуса зеркала бассейна, при уменьшении горизонтальной протяженности и увеличении интенсивности барической аномалии.

**Заключение.** Рассмотрены нелинейные осесимметричные колебания однородной жидкости в бассейне, имеющем форму параболоида вращения. Основная цель работы – получение точных аналитических решений нелинейной задачи. В отличие от предшествующих исследований этого направления, кажающихся нелинейных сейш и нелинейных колебаний вихрей, учитывается действие на жидкость радиальной массовой силы. В работе это сделано в рамках теории длинных волн без дисперсии.

Найден класс точных аналитических решений, описывающих нелинейные осесимметричные периодические колебания жидкости в параболическом бассейне с учетом действия стационарных радиальных массовых сил. Радиальная проекция скорости таких колебаний (сейш) является линейной функцией, азимутальная скорость и смещения свободной поверхности жидкости – многочленами от радиальной координаты с зависящими от времени коэффици-

циентами. Метод нахождения решения использует точную замену исходной задачи системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Полученное решение соответствует одноузловой сейше. Частота нелинейных колебаний жидкости в бассейне не зависит от амплитуды колебаний, что говорит об их изохронности. Она определяется параметром Кориолиса, максимальной глубиной и радиусом зеркала бассейна, наконец, линейным по радиальной координате слагаемым полиномиального представления радиальной массовой силы. Внешняя радиальная сила, направленная от границы к центру бассейна, повышает частоту колебаний жидкости, а массовая сила, направленная от центра бассейна к береговой черте, вызывает уменьшение частоты колебаний жидкости по сравнению со случаем отсутствия массовой силы.

Массовая сила влияет не только на частоту колебаний жидкости, но и на амплитудные характеристики волн. Возмущение частоты колебаний осуществляется через линейный член полиномиального представления внешней силы, а остальные члены разложения массовой силы оказывают влияние на амплитудные характеристики волновых полей. Радиальная массовая сила в уравнениях движения может иметь различную физическую природу, в частности, ее можно интерпретировать как действие ветрового или барического поля. В работе рассмотрена массовая сила, представляющая собой градиент стационарной аномалии атмосферного давления, расположенной непосредственно над бассейном.

Для бассейнов, подобных озеру Больсена (малая протяженность по сравнению с горизонтальным масштабом аномалии давления, сравнительно большая глубина для подобных озер), влияние массовой силы на колебания жидкости в параболическом бассейне невелико. Оно усиливается с ростом радиуса зеркала бассейна, при уменьшении горизонтальной протяженности, увеличении ширины места и интенсивности барической аномалии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М., Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
2. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 617 с.
3. Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. – 1958. – 4, № 1. – P. 97 – 109.
4. Miles J.W., Ball F.K. On free-surface oscillations in a rotating paraboloid // Ibid. – 1963. – 17 № 2. – P. 257 – 266.
5. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // Ibid. – 1981. – 107. – P. 499 – 508.
6. Доценко С.Ф., Рубино А. Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинны волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 2. – С. 58 – 64.
7. Калашиник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Д.Г. и др. Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболаиде: теория и эксперимент // Там же. – 2004. – № 5. – С. 131 – 142.
8. Cushman-Roisin B., Heil W.H., Nof D. Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings // J. Geophys. Res. – 1985. – 90, № C6. – P. 11756 – 11764.
9. Young W.R. Elliptical vortices in shallow water // J. Fluid Mech. – 1986. – 171. – P. 101 – 119.
10. Cushman-Roisin B. Exact analytical solution for elliptical vortices of the shallow water equations // Tellus. – 1987. – 39A, № 3. – P. 235 – 244.

11. *Rogers C.* Elliptic warm-core theory: the pulsrodon // *Physics Lett. A.* – 1989. – 38, № 6,7. – P. 267 – 273.
12. *Ингель Л. Х.* Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* – 1994. – 30, № 5. – С. 718 – 720.
13. *Rubino A., Brandt P., Hessner K.* Analytical solutions for circular eddies of the reduced-gravity, shallow-water equations // *J. Phys. Oceanogr.* – 1998. – 28, № 5. – P. 999 – 1002.
14. *Dotsenko S.F., Rubino A.* Nonlinear radial oscillations of an isolated eddy in the ocean with regards for the external action // *Physical Oceanography.* – 2005. – 15, № 1. – P. 14 – 26.
15. *Губанова О.В., Хилько Н.В., Черкесов Л.В.* Генерация волн в двумерном бассейне переменной глубины периодическими возмущениями атмосферного давления // *Морской гидрофизический журнал.* – 1997. – № 5. – С. 3 – 10.
16. *Чернявская С.А., Шульга Т.Я.* Исследование влияния шельфовой зоны на периоды сейшевых колебаний // *Там же.* – 2005. – № 1. – С. 26 – 31.
17. *Di Filippo D.* Le sesse del lago di Bolsena // *Annali di Geofisica.* – 1951. – 4. – P. 273 – 285.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
Университет Ка Фоскари,  
Венеция

Материал поступил  
в редакцию 07.06.07

**ABSTRACT** Within the framework of the shallow-water model a class of exact analytical solutions describing non-linear axisymmetric oscillations of fluid affected by stationary radial body forces in a parabolic basin is found. The radial projection of fluid velocity of such oscillations (seiches) is a linear function; the azimuthal velocity and elevations of the fluid free surface are the polynomials in a radial co-ordinate with the time-dependent coefficients. The method of solution deriving is based on replacement of the original model by the system of ordinary differential and algebraic equations. The action of the body force can result both in increase and reduction of frequency of fluid oscillations, affect the coastline motion and the characteristics of waves and velocity field.