

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин

## **Идентификация начального поля концентрации $Cs^{137}$ в Черном море после Чернобыльской аварии на основе решения сопряженной задачи**

При помощи метода сопряженных уравнений проводится идентификация начального поля концентрации  $Cs^{137}$  в Черном море после Чернобыльской аварии. Определена возможная зона выпадения радиоактивных осадков, вычислены значения концентрации  $Cs^{137}$  в этом районе. Показано, что результат численного моделирования с использованием полученного начального поля хорошо согласуется с данными измерений.

**Ключевые слова:** идентификация, сопряженная задача, модель переноса, Черное море.

При решении экологических задач, связанных с оценкой возможных последствий распространения примесей различной природы, необходим анализ полей концентрации, генерируемых вследствие воздействия природных или техногенных источников. Изучение формирования таких полей и исследование их пространственной динамики возможно на основе математического моделирования. При этом необходимо решить две взаимосвязанные задачи. Первая – построение или выбор оптимальной модели переноса примеси, учитывающей природу ее поведения в морской среде; вторая связана с заданием входных параметров модели и с использованием имеющихся данных измерений. Под входными параметрами понимаются коэффициенты уравнения переноса, поля скоростей и начальные данные.

Для решения конкретных экологических задач часто необходимо следить не за пространственной структурой поля примеси, а за значениями некоторых функционалов в интересующем нас районе. Например, это может быть средняя или суммарная концентрация какой-либо примеси в исследуемой области. Такие значения функционалов можно вычислять непосредственно по значениям концентрации в узлах расчетной сетки. При этом значения на конечный момент интегрирования ищутся путем решения задачи переноса с известными начальными данными и функциями источников загрязнения. Таким образом, задавая различные входные данные, мы получаем серию полей концентрации, для которых вычисляем необходимый функционал в указанной области. Среди таких расчетов можно выбрать наиболее оптимальный с точки зрения не превышения функционалом некоторых его допустимых значений. С другой стороны, решение подобного рода задач может быть упрощено на основе сопряженных уравнений. При этом в соответствии с [1] сопряженная задача решается один раз, и исследуемое значение функционала может быть вычислено при различных начальных полях. Экстремумы в решении сопряженной задачи указывают на то, какие районы области интегрирования

модели на выбранном интервале времени оказывают наибольшее влияние на значения рассматриваемого функционала.

В качестве модели в области  $D$ ,  $D_t = D \times [0, \bar{t}]$ , рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + AC = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями на границе

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

и начальными данными при  $t = 0$

$$C = C_0, \quad (3)$$

где  $A = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - k \frac{\partial^2}{\partial z^2} - A_H \Delta$  – оператор уравнения (1);  $C$  – концентрация примеси;  $C_0$  – начальное поле концентрации;  $k$  – вертикальный коэффициент турбулентной диффузии;  $A_H$  – горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии;  $n$  – нормаль к границе (области интегрирования  $D$ );  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа. Задача (1) решается в области интегрирования  $D$  на временном интервале  $[0, \bar{t}]$ .

При численной реализации модели (1) – (3)  $A_H$  выбирался равным  $3 \text{ м}^2/\text{с}$ , параметры  $k$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , рассчитанные по полной нелинейной модели гидротермодинамики Черного моря [2] на 5-километровой сетке, были предоставлены С.Г. Демьшевым. Эти входные данные имелись на каждые сутки, а для промежуточных моментов времени проводилась линейная интерполяция. Пространственная структура вертикального коэффициента турбулентной диффузии в модели [2] рассчитывается аналогично известной работе [3]. При реализации гидротермодинамической модели использовались климатические данные о потоках тепла, касательном напряжении ветра, рельефе дна. В целом модель достаточно хорошо апробирована, и полученные по ней результаты согласуются с имеющимися представлениями о динамике вод в Черном море. При наличии более достоверной входной информации для модели переноса пассивной примеси результаты расчетов могут быть уточнены. При аппроксимации модели (1) – (3) по времени использовалась явная схема и интегрирование проводилось с шагом 20 мин, а при аппроксимации по пространству использовалась TVD-схема [4], которая строится как комбинация схем Лакса – Вендроффа и направленной разности.

В соответствии с [1] постановка сопряженной задачи напрямую зависит от выбираемого функционала. Умножая (1) на  $C^*$  и интегрируя по частям с учетом краевых условий, получим

$$\int_{D_i} p C dD_i + \int_D h C_i dD = \int_D C_0 C_0^* dD, \quad (4)$$

где  $C_0^*$  есть  $C^*$  на нулевой момент времени;  $C^*$  – решение задачи

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} + A^* C^* = p \quad (5)$$

с краевыми условиями на границе

$$\frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

и начальными данными при  $t = 0$

$$C^* = h, \quad (7)$$

здесь  $A^* = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} - k \frac{\partial^2}{\partial z^2} - A_H \Delta$  – оператор уравнения (5), сопряженный оператору  $A$  уравнения (1).

Если на конечный момент времени в качестве функционала берется суммарная концентрация примеси в некоторой области  $\Omega$

$$I = \int_{\Omega} C_i d\Omega, \quad (8)$$

тогда в левой части уравнения (4) необходимо задать условия  $p = 0$  и

$$h = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}. \quad (9)$$

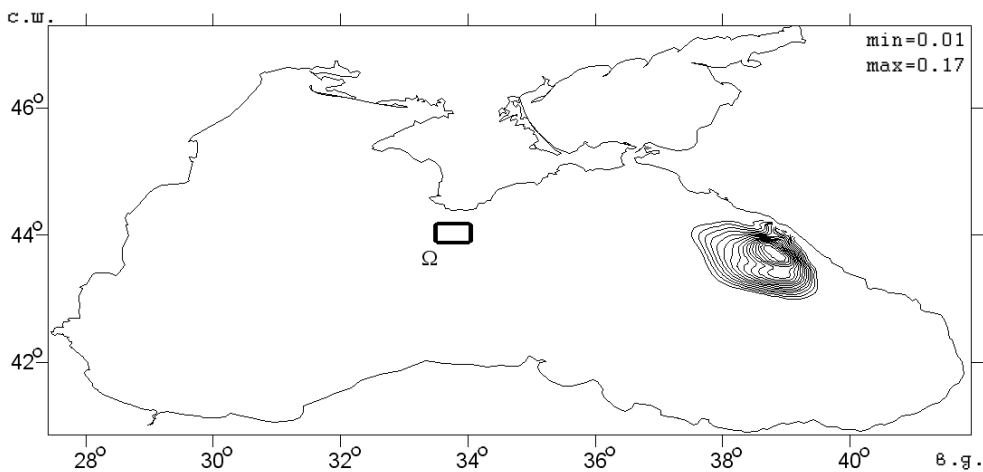
В результате имеем

$$\int_{\Omega} C_i d\Omega = \int_D C_0 C_0^* dD, \quad (10)$$

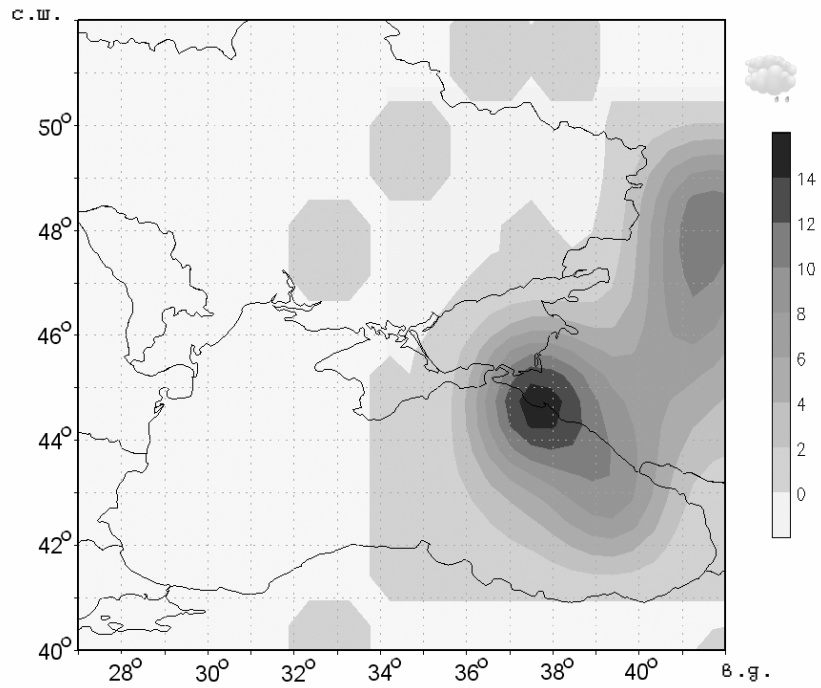
при этом, согласно (4), решение сопряженной задачи (5) – (7) является весовой функцией при начальных данных.

Интервал времени, на котором решается поставленная задача, может быть выбран исходя из имеющихся данных измерений [5] или физических соображений [6]. В настоящей работе для иллюстрации возможностей подхода, изложенных в [1, 7], нами использовались измерения концентрации  $Cs^{137}$ , полученные в июне 1986 г. сразу после Чернобыльской аварии. Такие данные «удобны» тем, что известна дата аварии, периоды и области выпадения осадков и время проведения измерений. Это позволяет определить интервал времени, на котором необходимо решать задачу. В данных расчетах он брался равным 40 сут. На вопрос, в каких областях Черного моря сформировались основные экстремумы в измеренном поле концентрации  $Cs^{137}$ , можно ответить, определив соответствующие функции влияния.

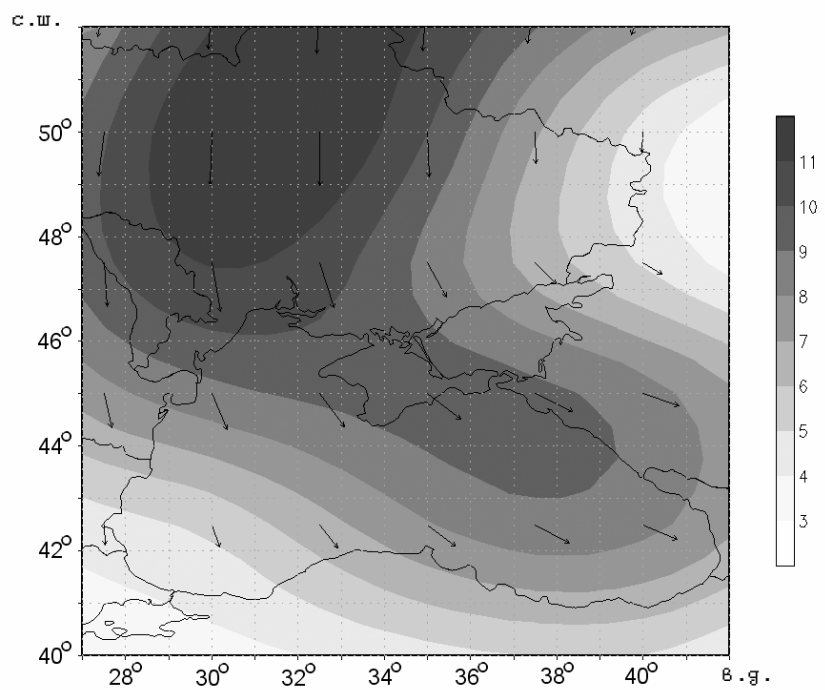
**Численные эксперименты.** В измеренном поле концентрации  $Cs^{137}$  [8] присутствует существенный экстремум у Южного берега Крыма. Концентрация радиоактивности в области  $\Omega$ , по данным измерений, составляет  $\sim 400$  Бк/м<sup>3</sup>. Горизонтальные размеры  $\Omega$  показаны на рис. 1, вертикальный размер задавался равным трем шагам расчетной сетки (10 м) в связи с тем, что измерения концентрации радиоактивного изотопа  $Cs^{137}$  проводились в приповерхностном слое Черного моря. Задавая  $h$  в (7) по (9) и интегрируя (5) – (7), мы получаем решение сопряженной задачи  $C_0^*$  на нулевой момент времени, которое входит в правую часть формулы (10). При сравнении  $C_0^*$  (рис. 1) с зоной выпадения осадков (рис. 2) видна их хорошая корреляция. В соответствии со схемой переноса воздушных масс [8] полученная нами область расположена в зоне их передвижения в юго-восточном направлении. Анализ данных *National Centers for Environmental Prediction (NCEP)* о ветровой ситуации после Чернобыльской аварии показывает, что, начиная со 2 мая, воздушные массы в основном перемещались в юго-восточном направлении (рис. 3). На рис. 2 представлены данные *NCEP* об интенсивности осадков 5 мая. За это время воздушные массы от Чернобыля дошли до акватории Черного моря, и под воздействием сложившейся метеорологической ситуации радиоактивные изотопы с интенсивными осадками попали в его воды. Зоной интенсивного выпадения осадков является северо-восточная часть моря. При условии, что в рассчитанной области  $C_0 = \text{const}$  (рис. 1), из (10) для поверхности моря можно получить  $C_0 \approx 720$  Бк/м<sup>3</sup>, что согласуется с результатами, изложенными в [9, 10]. Задавая такие начальные значения в указанной области в приповерхностном слое и интегрируя основную модель (1) – (3) на 40 сут, получим поле концентрации (рис. 4) с максимумом в его структуре южнее Крымского п-ова. Максимальные значения полученного поля концентрации хорошо соответствуют измерениям.



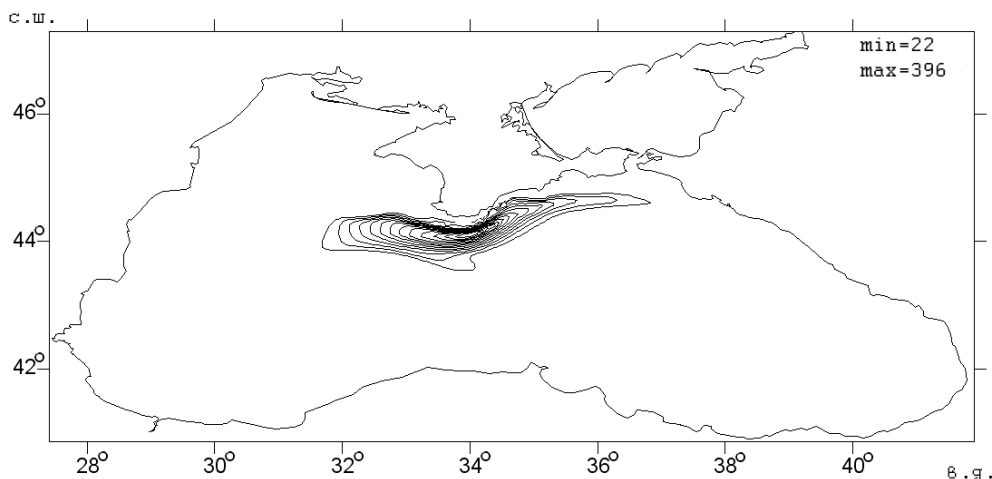
**Р и с. 1.** Исследуемая область  $\Omega$  и решение сопряженной задачи при  $z = 2,5$  м



**Р и с. 2.** Интенсивность осадков ( $\times 10^{-5} \text{ кг/м}^2/\text{с}$ ) 5 мая 1986 г. по данным *NCEP*



**Р и с. 3.** Интенсивность и направление ветра (м/с) 3 мая 1986 г. по данным *NCEP*



**Р и с. 4.** Поле концентрации  $Cs^{137}$  ( $Bк/м^3$ ) при  $z = 2,5$  м

Таким образом, подход, основанный на интегрировании сопряженных уравнений, может быть применен для решения различных задач экологической направленности. Он позволяет определять зоны влияния начальных полей и источников загрязнения на поле концентрации примеси в исследуемом районе. Ввиду большого объема информации в трехмерных полях скоростей и коэффициентов умозрительные заключения о возможных источниках загрязнения весьма затруднительны. При использовании сопряженных уравнений удастся точно проследить все изменения в полях и указать возможные районы формирования исследуемой примеси.

Работа выполнена в рамках проекта «Стабильная экосистема».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
2. *Knysh V.V., Demyshev S.G., Korotaev G.K., Sarkisyan A.S.* Four-dimensional climate of seasonal Black Sea circulation // Russ. J. Numer. Analys. Math. Model. – 2001. – 16, № 5. – P. 409 – 426.
3. *Pacanowsci R.C., Philander S.G.H.* Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans // J. Phys. Oceanogr. – 1981. – 11. – P. 1443 – 1451.
4. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1983. – 49. – P. 357 – 393.
5. *Кочергин В.С.* Использование сопряженных уравнений для решения экологических задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2009. – С. 93 – 99.
6. *Рябцев Ю.Н., Шапиро Н.Б.* Определение начального положения обнаруженных в открытой части моря поверхностных линз пониженной солености // Там же. – С. 141 – 157.
7. *Марчук Г.И., Кузин В.И., Скиба Ю.Н.* Применение сопряженных уравнений в численных моделях переноса тепла в системе атмосфера – океан – континент // Материалы Советско-французского симпозиума по океанографии. – Новосибирск, 1983. – Ч. 1. – С. 4 – 15.

8. *Атлас* охраны природы Черного и Азовского морей. – СПб.: ГУНиО МО РФ, 2006. – 434 с.
9. *Kochergin S.V., Kochergin V.S.* Variational data assimilation in a transport model // Rapport du 38e Congress de la SIESM, Istanbul (Turquie). – 2007. – 38. – P. 162.
10. *Еремеев В.Н., Демьшев С.Г., Кочергин С.В., Кочергин В.С.* Идентификация начальных данных в трехмерной модели переноса пассивной примеси в Черном море // Морской экологический журнал. – 2007. – № 3. – С. 36 – 46.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
E-mail: vskocher@gmail.com

Материал поступил  
в редакцию 21.01.10  
После доработки 29.06.10

**АНОТАЦІЯ** За допомогою методу спряжених рівнянь проводиться ідентифікація початкового поля концентрації  $Cs^{137}$  у Чорному морі після Чорнобильської аварії. Визначена можлива зона випадання радіоактивних осадів, обчислені значення концентрації  $Cs^{137}$  у цьому районі. Показано, що результат чисельного моделювання з використанням отриманого початкового поля добре узгоджується з даними вимірювань.

**Ключові слова:** ідентифікація, спряжена задача, модель перенесення, Чорне море.

**ABSTRACT** Initial field of  $Cs^{137}$  concentration in the Black Sea after the Chernobyl accident is identified by the adjoint method. Possible area of radioactive fallout is defined and the values of  $Cs^{137}$  concentration in this region are calculated. It is shown that the result of numerical modeling using the obtained initial field is in good agreement with measurement data.

**Keywords:** identification, dual problem, transport model, the Black Sea.