

П.В. Лукьянов

Динамика компактного вихря в зоне прибрежного шельфа

Рассмотрена эволюция компактного вихря с масштабами сто метров по вертикали и несколько километров по горизонтали в рамках модели моря, состоящей из верхнего перемешанного слоя и нижнего слоя с устойчивой вертикальной стратификацией. Распределение плотности по вертикали задается гладкой функцией: постоянное значение плавно переходит в близкую к линейной экспоненциальную зависимость. Показано, что планетарное вращение и топография дна являются двумя независимыми причинами трансформации монополя в триполь. Устойчивость триполя зависит, прежде всего, от относительной толщины вихря, а также от стратификации. Неустойчивость возникает сначала в более мелкой области за счет трения вихря о дно. Трансформация монополя происходит без введения дополнительных азимутальных возмущений поля скорости.

Ключевые слова: компактный вихрь, прибрежный шельф, неустойчивость, триполь.

Введение. Изучению влияния вращения Земли на вихревое движение посвящено немало работ [1]. Однако динамика вихрей с горизонтальными масштабами в несколько километров практически не изучена. Образование таких компактных областей завихренности может быть вызвано различными факторами. Один из возможных механизмов указанного вихреобразования приведен в работе [2], в которой рассмотрен пример распада сильно вытянутого диска эллиптической формы на систему компактных областей завихренности. Указанный процесс моделирует один из механизмов формирования внутри-термоклинных вихрей (ВТВ) в океане. Вертикальный размер ВТВ колеблется в пределах десятков – сотен метров, а горизонтальный – порядка 10 км и даже может достигать 50 км [3]. Но вихри размером 50 км носят другую природу образования – это субсиноптические вихри. Масштаб скорости в таких вихревых линзах – десятки сантиметров в секунду. Согласно [2], ВТВ не являются аномалиями, а представляют собой норму динамического состояния морей и океанов. Распад вытянутого вихря может порождать компактные области завихренности с горизонтальными размерами порядка 1 – 5 км.

Вихри указанных масштабов могут иметь и другую природу. Например, размеры наблюдавшегося дипольного вихря, захваченного шельфовой (мелководной) зоной вблизи восточного побережья Сицилии, составляли 80 м по вертикали и 2 км по горизонтали [4]. Без ограничения общности можно задавать начальные размеры гораздо большими, поскольку осесимметричные вихри являются точными решениями квазигеострофических уравнений на f -плоскости независимо от их вертикальной структуры [4].

Цель данной работы – исследовать влияние планетарного вращения, топографии дна и стратификации на эволюцию компактного монополя. Для этого в области жидкости, состоящей из двух слоев – верхнего перемешанного и нижнего устойчиво стратифицированного, – в начальный момент задает-

ся такой вихрь, у которого отсутствуют вертикальная и радиальная компоненты скорости, т. е. горизонтальная дивергенция скорости равна нулю. Поэтому эффект влияния вращения Земли пренебрежимо мал. Нижняя граница рассматриваемой области (дно) задается аналитически в виде склона.

За конечный промежуток времени вихрь достигает свободной поверхности и дна. Генерируются радиальное и вертикальное течения. Теперь сила Кориолиса уже количественно влияет на динамику вихря, трансформируя его. Для рассматриваемой задачи справедливо использовать приближенное равенство нулю вертикальной компоненты скорости на свободной поверхности. Это утверждение легко обосновывается сравнением амплитуды вертикальной скорости на поверхности с ее абсолютным максимумом по толщине слоя.

Постановка и решение задачи. Введем декартову прямоугольную систему координат с осью Oz , направленной вертикально вверх. Рассмотрим область жидкости $(x, y) \in [-l_x, l_x]$, $z \in [h - L(x), h]$ (рис. 1). Плотность есть функция вертикальной координаты, она задается следующей аналитической зависимостью:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \{1 + (\exp[(h - h_1) - z]^2) - 1\} N^2 z / g, & 0 \leq z \leq h - h_1, \\ \rho_0, & h - h_1 \leq z \leq h, \end{cases} \quad (1)$$

где h, h_1 – максимальная глубина области и толщина верхнего перемешанного подслоя. В начальный момент задаются также соответствующие компактно-му монополю поля азимутальной скорости и плавучести [5]

$$V_\theta = \exp\left[-\alpha^2 \left(\frac{r^2}{L_0^2}\right)\right] (z - (z_0 + a_1))^2 (z - (z_0 - a_2))^2, \quad z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2, \quad (2)$$

$$b = \exp\left[-2\alpha^2 \left(\frac{r^2}{L_0^2}\right)\right] (z - (z_0 + a_1))^3 (z - (z_0 - a_2))^3 (z - z_0 + 0,5(a_1 - a_2)), \quad (3)$$

$$z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2,$$

где L_0, z_0 – начальные значения горизонтального масштаба вихря и положения его центра (горизонт) соответственно; a_1, a_2 – толщина верхней и нижней частей вихря; α – константа, характеризующая его внутреннюю структуру.

Известны данные измерений, указывающие на возможное существование компактной осесимметричной структуры вихря как по вертикали, так и по горизонтали [6] с горизонтальными масштабами порядка 10^4 м.

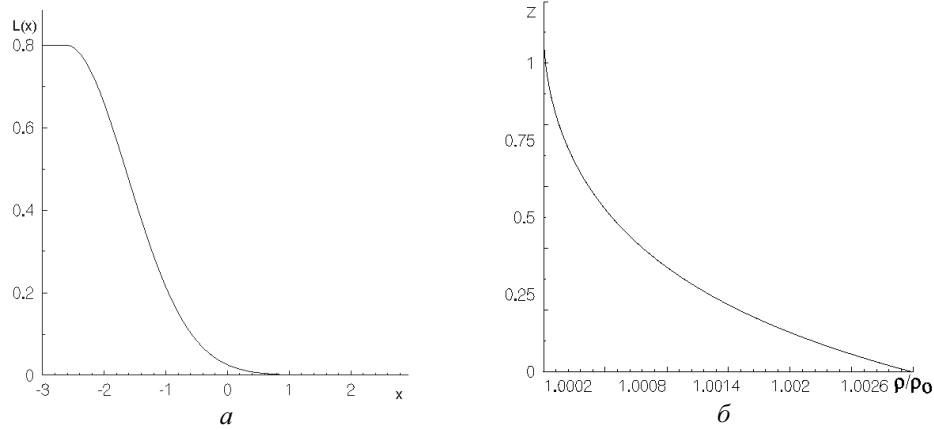
Для численного решения задачи удобно перейти к новой системе координат:

$$(x, y, z) \rightarrow (\xi = x, \eta = y, \zeta = \zeta(x, z)). \quad (4)$$

В данной работе рассмотрена модельная задача, поэтому топография дна задается одним из выражений:

$$\zeta = \begin{cases} \frac{zh}{h_1}, & -l_x \leq x \leq -l_x + x_0, \\ \frac{zh}{h_1 + (h-h_1)(1 - \exp(-\alpha[x - (-l_x + x_0)]^2))}, & -l_x + x_0 \leq x \leq l_x, \end{cases} \quad (5)$$

где x_0 – координата начала склона.



Р и с. 1. Топография дна – *a* и вертикальное распределение плотности – *б*

Выражение (4) позволяет переходить из области переменной глубины в область постоянной глубины, сохраняя при этом гладкость (производные остаются непрерывными функциями). В новой системе координат задача формулируется уже в области $(\xi, n) \in [-l_x, l_x]$, $\zeta \in [0, h]$.

Для определения коэффициентов вертикального турбулентного обмена используется модель Прандтля – Обухова [7]. Согласно этой модели,

$$\begin{cases} K_z = (0,05h_2)^2 \sqrt{B} + K_{\min} & \text{при } B > 0, \\ K_z = K_{\min} & \text{при } B < 0, \end{cases} \quad B = \left(\frac{\partial V_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + b, \quad (6)$$

здесь V_x, V_y – средние значения горизонтальных компонент скорости, b – плавучести; h_2 – глубина квазиоднородного слоя, определяемая по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие

$$(0,05z_k)^2 \sqrt{B_{z=z_k}} \leq K_{\min},$$

где K_{\min} – фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена, z_k определяется из последнего неравенства.

Горизонтальный турбулентный обмен описывается моделью Смагоринского [8]. Коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии полей скорости и плавучести вычисляются по формулам

$$A_m = \frac{1}{2} C_m \Delta \xi \Delta \eta \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_y}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial \eta} \right)^2 \right], A_n = \frac{A_m C_n}{C_m}, \quad (7)$$

где C_m, C_n – постоянные ($C_m = 0,1, C_n = 0,2C_m$); $\Delta \xi, \Delta \eta$ – горизонтальные размеры ячейки расчетной сетки. Индексы m, n относятся к диффузии полей скорости и плотности соответственно.

С учетом характерных для квазигоризонтальных вихревых движений балансов [9] уравнения, описывающие эволюцию компактного вихря в системе координат (4), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_x}{\partial \eta} + Fr_v^2 V_z \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{1}{Ro} V_y + \\ + \frac{1}{Re_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \\ + \frac{1}{Re_v \delta^2} \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_y}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_y}{\partial \eta} + Fr_v^2 V_z \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{Ro} V_x + \\ + \frac{1}{Re_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \\ + \frac{1}{Re_v \delta^2} \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Fr_v^2 \delta^2 \left(\delta \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_z}{\partial \eta} + Fr_v^2 V_z \frac{\partial V_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + b + \\ + \frac{Fr_v^2}{Re_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \\ + \frac{1}{Re_v \delta^2} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} + Fr_v^2 \frac{\partial V_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial b}{\partial \xi} + \frac{\partial b}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial b}{\partial \eta} + Fr_v^2 V_z \frac{\partial b}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} V_z = \\ = \frac{1}{Sc} \left\{ \frac{1}{Re_h} \left[\left[\frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 b}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}_v} \delta^2 \left[\frac{\partial^2 b}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (12)$$

где V_z, p, b ($b = -g\rho / \rho_0$) – среднее значение вертикальной компоненты вектора скорости в новой системе координат, а также возмущения полей давления и плавучести; $\text{Re}_h = l_h V_h / A_m$, $\text{Re}_v = l_v V_h / K_z$, $\text{Fr}_v = V_h / N l_v$, $\text{Ro} = V_h / l_h \Omega$ и $\text{Sc} = A_n / A_m$ – горизонтальное и вертикальное числа Рейнольдса, а также числа Фруда, Россби и Струхала соответственно; $l_v \in O(100 \text{ м})$, $l_h \in O(1000 \text{ м})$, $V_h \in O(10^{-1} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1})$ – начальные вертикальный и горизонтальный масштабы вихря, а также начальный масштаб скорости; Ω – угловая скорость вращения Земли; $\delta = l_v / l_h$ – отношение вертикального масштаба вихря к горизонтальному. Компонента силы Кориолиса в уравнении (9) не учитывается ввиду ее относительной малости для сплюснутых вихрей.

Граничные условия для уравнений (1) – (5) (см. также [5]): вырождение (экспоненциальное убывание) полей всех характеристик на удалении от области вихря, а также равенство нулю их производных по горизонтальным переменным на боковых границах ($x = \pm l_x, y = \pm l_y$).

Граничные условия на дне ($\zeta = 0$): условия прилипания и отсутствия градиента плотности (или плавучести)

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \zeta} = 0. \quad (13)$$

Граничные условия на свободной поверхности ($\zeta = h$): отсутствие ветра и равенство нулю возмущений давления и плавучести

$$\frac{\partial V_x}{\partial \zeta} - \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} - \delta^2 \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad p = 0, \quad b = 0. \quad (14)$$

Используем, с учетом малости параметра δ , стандартные для соответствующих задач приближения граничных условий

$$\frac{\partial V_x}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} = 0.$$

Предположение о том, что частицы жидкости не покидают свободной поверхности, записывается в виде

$$W = 0. \quad (15)$$

Алгоритм решения поставленной задачи основан на известных конечно-разностных схемах, для декартовой прямоугольной системы координат он изложен в работе [10]. Приведем конечно-разностные аналоги уравнений (8), (9) и (11), (12). Чтобы избежать трудностей с индексами, в конечно-разностных уравнениях обозначим $V_x = U$, $V_y = V$. Получим:

$$\begin{aligned}
& U_{i,j,k} \left[1 + \Delta t \frac{|U_0|}{\Delta \xi} + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} + \frac{|\Phi_{10}|}{\Delta \zeta(i)} + \frac{2\Delta t}{\text{Re}_h} \left(\frac{1}{(\Delta \xi)^2} + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \right) + \frac{2\Delta t \Phi_{20}}{\text{Re}_v \delta^2 (\Delta \zeta(i))^2} \right] = \\
& = -\Delta t \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + U_0 + \frac{\Delta t}{\text{Re}_h} \left[\frac{U_{i+1,j,k} - U_{i-1,j,k}}{(\Delta \xi)^2} + \frac{U_{i,j+1,k} - U_{i,j-1,k}}{(\Delta \eta)^2} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{U_{i,j,k+1} - U_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta(i))^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i (U_{i+1,j,k+1} + U_{i-1,j,k-1} - U_{i-1,j,k+1} - U_{i+1,j,k-1}) \right] + \\
& + \frac{\Delta t}{\text{Re}_v \delta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta)_i^2} \right) + \frac{\Delta t}{\text{Ro}} V_0 + \Delta t \left\{ \frac{|U_0|}{\Delta \xi} [H(U_0)U_{i-1,j,k} + \right. \\
& + H(-U_0)U_{i+1,j,k}] + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} [H(V_0)U_{i,j-1,k} + H(-V_0)U_{i,j+1,k}] + \\
& \left. + \frac{|\Phi_{10}|}{(\Delta \zeta)_i} [H(\Phi_{10})U_{i,j,k-1} + H(-\Phi_{10})U_{i,j,k+1}] \right\}, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_{i,j,k} \left[1 + \Delta t \frac{|U_0|}{\Delta \xi} + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} + \frac{|\Phi_{10}|}{\Delta \zeta(i)} + \frac{2\Delta t}{\text{Re}_h} \left(\frac{1}{(\Delta \xi)^2} + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \right) + \frac{2\Delta t \Phi_{20}}{\text{Re}_v \delta^2 (\Delta \zeta(i))^2} \right] = \\
& = -\Delta t \frac{\partial p}{\partial \eta} + V_0 + \frac{\Delta t}{\text{Re}_h} \left[\frac{V_{i+1,j,k} - V_{i-1,j,k}}{(\Delta \xi)^2} + \frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j-1,k}}{(\Delta \eta)^2} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta(i))^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i (V_{i+1,j,k+1} + V_{i-1,j,k-1} - V_{i-1,j,k+1} - V_{i+1,j,k-1}) \right] + \\
& + \frac{\Delta t}{\text{Re}_v \delta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{V_{i,j,k+1} + V_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta)_i^2} \right) - \frac{\Delta t}{\text{Ro}} U_0 + \Delta t \left\{ \frac{|U_0|}{\Delta \xi} [H(U_0)V_{i-1,j,k} + H(-U_0)V_{i+1,j,k}] + \right. \\
& \left. + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} [H(V_0)V_{i,j-1,k} + H(-V_0)V_{i,j+1,k}] + \frac{|\Phi_{10}|}{(\Delta \zeta)_i} [H(\Phi_{10})V_{i,j,k-1} + H(-\Phi_{10})V_{i,j,k+1}] \right\}, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& W_{i,j,k} \left[1 + \Delta t \frac{|U_0|}{\Delta \xi} + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} + \frac{|\Phi_{10}|}{\Delta \zeta(i)} + \frac{2\Delta t}{\text{Re}_h} \left(\frac{1}{(\Delta \xi)^2} + \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \right) + \frac{2\Delta t \Phi_{20}}{\text{Re}_v \delta^2 (\Delta \zeta(i))^2} \right] = \\
& = -\Delta t \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + W_0 + \Delta t b_0 + \frac{\Delta t}{\text{Re}_h} \left[\frac{W_{i+1,j,k} - W_{i-1,j,k}}{(\Delta \xi)^2} + \frac{W_{i,j+1,k} - W_{i,j-1,k}}{(\Delta \eta)^2} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{W_{i,j,k+1} - W_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta(i))^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i (W_{i+1,j,k+1} + W_{i-1,j,k-1} - W_{i-1,j,k+1} - W_{i+1,j,k-1}) \right] + \\
& + \frac{\Delta t}{\text{Re}_v \delta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{W_{i,j,k+1} + W_{i,j,k-1}}{(\Delta \zeta)_i^2} \right) + \Delta t \left\{ \frac{|U_0|}{\Delta \xi} [H(U_0)W_{i-1,j,k} + H(-U_0)W_{i+1,j,k}] + \right. \\
& \left. + \frac{|V_0|}{\Delta \eta} [H(V_0)W_{i,j-1,k} + H(-V_0)W_{i,j+1,k}] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{|\Phi_{10}|}{(\Delta\zeta)_i} \left[H(\Phi_{10}) W_{i,j,k-1} + H(-\Phi_{10}) W_{i,j,k+1} \right], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & b_{i,j,k} \left[1 + \Delta t \frac{|U_0|}{\Delta\xi} + \frac{|V_0|}{\Delta\eta} + \frac{|\Phi_{10}|}{\Delta\zeta(i)} + \frac{2\Delta t}{\text{Re}_h} \left(\frac{1}{(\Delta\xi)^2} + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} \right) + \frac{2\Delta t \Phi_{20}}{\text{Re}_v \delta^2 (\Delta\zeta(i))^2} \right] = \\ & = -\Delta t \frac{W_0}{\text{Fr}_v^2} \frac{\partial S(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + b_0 + \frac{\Delta t}{\text{Re}_h \text{Sc}} \left[\frac{b_{i+1,j,k} - b_{i-1,j,k}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{b_{i,j+1,k} - b_{i,j-1,k}}{(\Delta\eta)^2} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{b_{i,j,k+1} - b_{i,j,k-1}}{(\Delta\zeta(i))^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i \left(b_{i+1,j,k+1} + b_{i-1,j,k-1} - b_{i-1,j,k+1} - b_{i+1,j,k-1} \right) \right] + \\ & + \frac{\Delta t}{\text{Re}_v \delta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^2 \left(\frac{b_{i,j,k+1} + b_{i,j,k-1}}{(\Delta\zeta)_i^2} \right) + \Delta t \left\{ \frac{|U_0|}{\Delta\xi} [H(U_0) b_{i-1,j,k} + H(-U_0) b_{i+1,j,k}] + \right. \\ & + \frac{|V_0|}{\Delta\eta} [H(V_0) b_{i,j-1,k} + H(-V_0) b_{i,j+1,k}] + \\ & \left. + \frac{|\Phi_{10}|}{(\Delta\zeta)_i} [H(\Phi_{10}) b_{i,j,k-1} + H(-\Phi_{10}) b_{i,j,k+1}] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Уравнения (16) – (19) расщеплялись по пространственным переменным, далее применялся метод прогонки. На каждом временном шаге проводилась стандартная процедура – коррекция давления (обозначим эту функцию как p'). Для этого использовалось уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 p'}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial U^0}{\partial \xi} + \frac{\partial U^0}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial \eta} + \frac{\partial W^0}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

здесь верхний индекс 0 – явные значения поля скорости. Данное уравнение решалось итерационно. Использовался следующий конечно-разностный аналог:

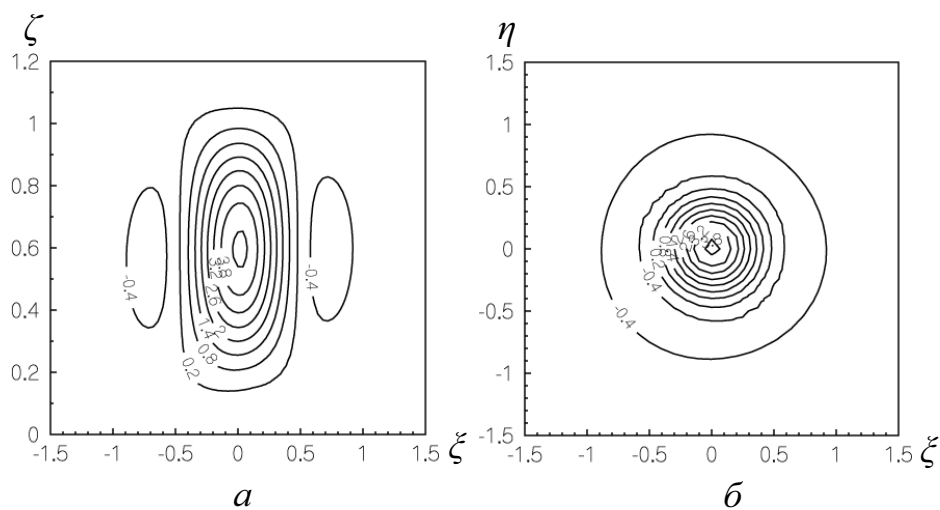
$$\begin{aligned} & \frac{p'_{i+1,j,k} + p'_{i-1,j,k}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{p'_{i,j+1,k} + p'_{i,j-1,k}}{(\Delta\eta)^2} + \frac{p'_{i,j,k+1} + p'_{i,j,k-1}}{(\Delta\zeta)^2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{p'_{i+1,j,k+1} - p'_{i-1,j,k+1} - p'_{i+1,j,k-1} + p'_{i-1,j,k-1}}{4\Delta\xi\Delta\zeta} - 2p'_{i,j,k} \left[\frac{1}{(\Delta\xi)^2} + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2}{(\Delta\zeta)^2} \right] = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{U^0_{i+1,j,k} - U^0_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} + \frac{U^0_{i,j,k+1} - U^0_{i,j,k-1}}{2\Delta\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{V^0_{i,j+1,k} - V^0_{i,j-1,k}}{2\Delta\eta} + \frac{W^0_{i,j,k+1} - W^0_{i,j,k-1}}{2\Delta\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Результаты численного эксперимента. Как уже упоминалось во введении, процессы неустойчивости и трансформации компактного вихря изучались в лабораторных условиях [11, 12]. Рассматривались взаимные вращения – циклоническое и антициклоническое – окружающей жидкости и вихря для чисел Россби первого порядка. При циклоническом вращении образовывался триполь, при антициклоническом – пара диполей. В качестве критерия устойчивости использовался критерий Рэля с учетом силы Кориолиса [1]. Влияние сил вязкости в этом критерии не учитывалось, так как числа Рейнольдса в упомянутых экспериментах изменялись от 500 и выше. Хотя, с другой стороны, образование новых вихревых структур может зависеть от значений числа Рейнольдса [12]. Чтобы получить наблюдающиеся в эксперименте трансформации вихря, необходимо было к его основному вращению добавить некое, искусственно вводимое, возмущение азимутальной скорости, амплитуда которого порядка 1%. Подобный подход, но для изучения лишь нелинейных и вязких эффектов (то есть без учета силы Кориолиса), можно найти в работе [13]. Благодаря введению возмущения получается триполь. Основным физическим результатом цитируемой работы явился вывод о том, что процесс симметризации, связанный с обратным каскадом турбулентной энергии, не является универсальным: наряду с монополями могут существовать и другие устойчивые вихревые образования, например триполи. Существование триполей в природе было обнаружено спутниками [14].

Расчетная область $(\xi, \eta, \zeta) \in [-3; 3], [-3; 3], [0; 1,2]$ разбивалась на сетку с параметрами $N_x, N_y \in [-120; 120]$, $N_z \in [0; 80]$ ($\Delta\xi = \Delta\eta = 0,02$, $\Delta\zeta = 0,015$). Сходимость и устойчивость решения были достигнуты при шаге по времени $\Delta t = 0,005$. Такие пространственно-временные шаги сохранялись во всех расчетах. Задание конкретных значений физических величин было основано на данных натурных экспериментов. Глубина (толщина) слоя жидкости задавалась равной порядка 100 м, склон довольно пологий. Коэффициент γ , характеризующий крутизну склона, был равен $4,5/(l_x + 1)^2$ и $6/(l_x + 1)^2$ (шельф). Распределение возмущений поля плотности соответствует деятельному слою, состоящему из верхнего хорошо перемешанного подслоя и нижнего устойчиво стратифицированного подслоя (термоклин). Глубина (толщина) верхнего перемешанного слоя задавалась минимальной – порядка 10 м. Как уже упоминалось, горизонтальный размер (радиус) вихря изменялся в пределах нескольких километров. Предметом исследования было изучение влияния на его эволюцию планетарного вращения, топографии дна, стратификации и относительной толщины вихря.

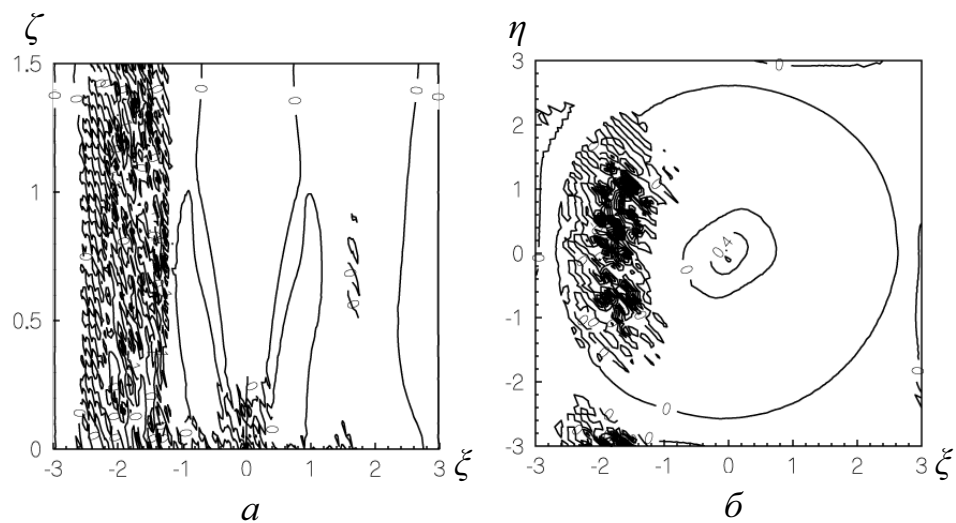
В качестве примера в области прибрежного шельфа с минимальной глубиной 120 м и наклоном $\gamma = 4,5/(l_x + 1)^2$ в начальный момент времени рассмотрим циклонический вихрь (с вертикальной осью вращения) толщиной 100 м и радиусом 2 км. Начальный горизонт вихря – 60 м от уровня морской поверхности. Под верхним перемешанным слоем (10 м) в нижнем подслое находилась устойчиво стратифицированная жидкость с частотой плавучести $N = 0,004 \text{ с}^{-1}$. Масштаб азимутальной скорости был равен $0,5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, фоновое значение вертикальной турбулентной диффузии задавалось равным $K_z = 0,0005 \text{ м}^2\cdot\text{с}^{-1}$. Этим значениям соответствовали следующие безразмерные

параметры: $Fr_v = 1,25$, $Ro = 2,43$, $Re_v = 10^5$, $\delta = 0,05$. На рис. 2 в безразмерных координатах (ξ, η, ζ) представлены вертикальное (рис. 2, *a*) и горизонтальное (рис. 2, *б*) сечения поля завихренности в начальный момент времени.



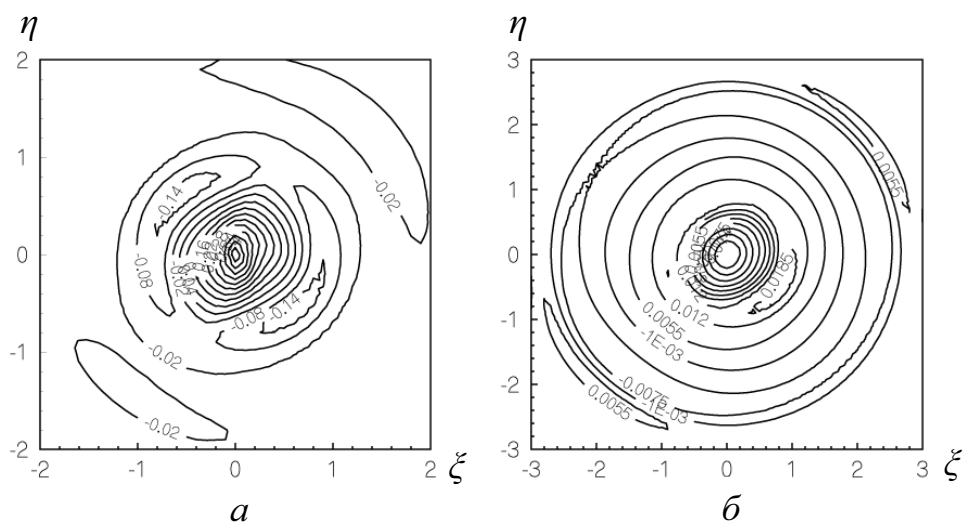
Р и с. 2. Начальное распределение поля вертикальной компоненты завихренности: *a* – вертикальное сечение ($\eta = 0$); *б* – горизонтальное сечение ($\zeta = 0,6$)

Параметры монополярного вихря таковы, что он является неустойчивым, за счет его трения о дно происходит образование зоны турбулентности в более мелководной области (рис. 3). В дальнейшем вихревая структура полностью разрушается.



Р и с. 3. Вертикальная – *a* и горизонтальная ($\zeta \approx 1,14$) – *б* структура поля вертикальной компоненты завихренности распадающегося вихря при $t = 1$

При увеличении начального горизонтального размера до 5 км (до $\delta = 0,02$) вихрь хотя и трансформируется в триполь, но сохраняется как единая структура (рис. 4, *а*). В дальнейшем может наблюдаться обратный процесс – от триполя к монополю (рис. 4, *б*).



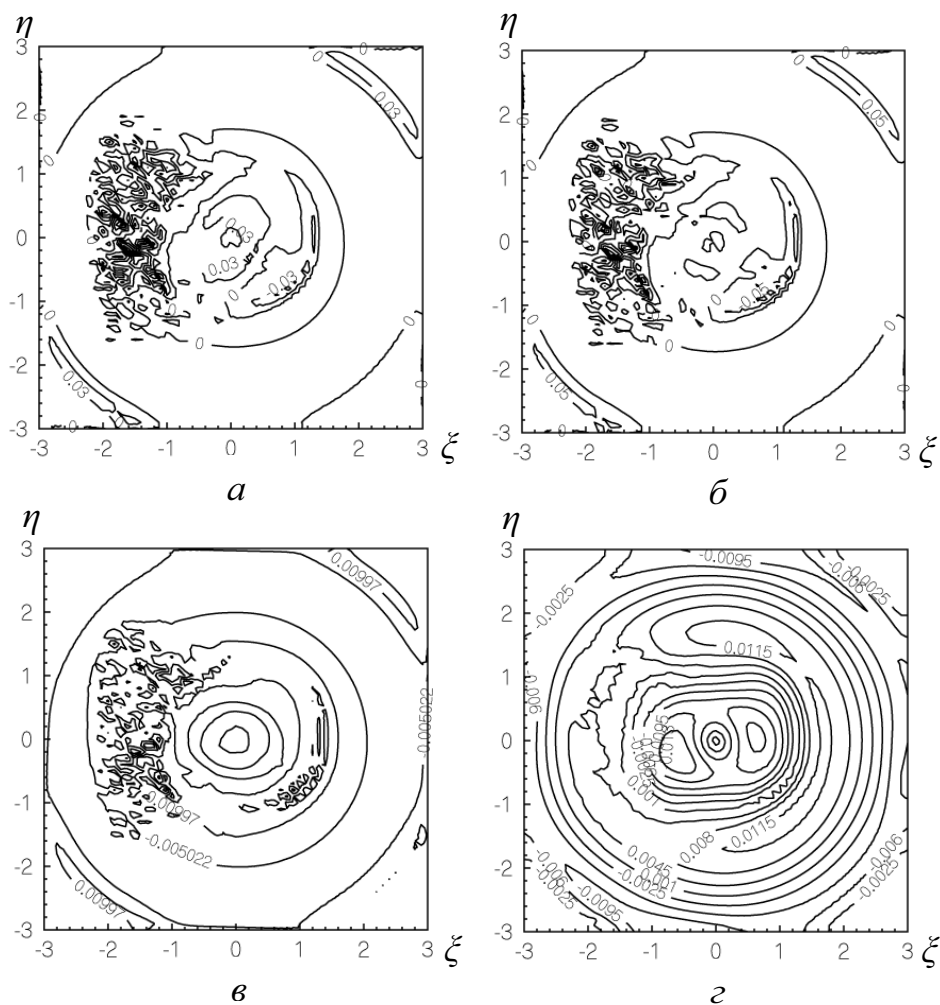
Р и с. 4. Горизонтальная структура поля вертикальной компоненты завихренности ($\zeta \approx 1,14$) при $t = 2$ (*а*) и $t = 4$ (*б*)

Зависимость эволюции вихря от стратификации также существенна. Так, при тех же параметрах из первого примера (начальный радиус вихря 2 км), но при стратификации, всего лишь в полтора раза большей ($N = 0,006 \text{ с}^{-1}$), наблюдается устойчивость вихревой структуры в целом. Назовем это промежуточным сценарием, когда возникающие мелкомасштабные турбулентные структуры диффундируют, и это не приводит к полному разрушению вихря.

Пример промежуточного сценария приведен на рис. 5, где показаны (при $t = 2$) изолинии поля вертикальной компоненты завихренности в приповерхностном слое (рис. 5, *а*) и на горизонте вихря (рис. 5, *б*). Видно возникновение зон неустойчивости вихря за счет трения о дно в более мелководной части. Со временем ($t = 6$) вихревая структура стабилизируется: хотя и продолжают генерироваться мелкомасштабные зоны неустойчивости, но они уже гораздо слабее по сравнению с основным течением (рис. 5, *в*). Сказанное также подтверждает соответствующее поле азимутальной скорости (рис. 5, *г*).

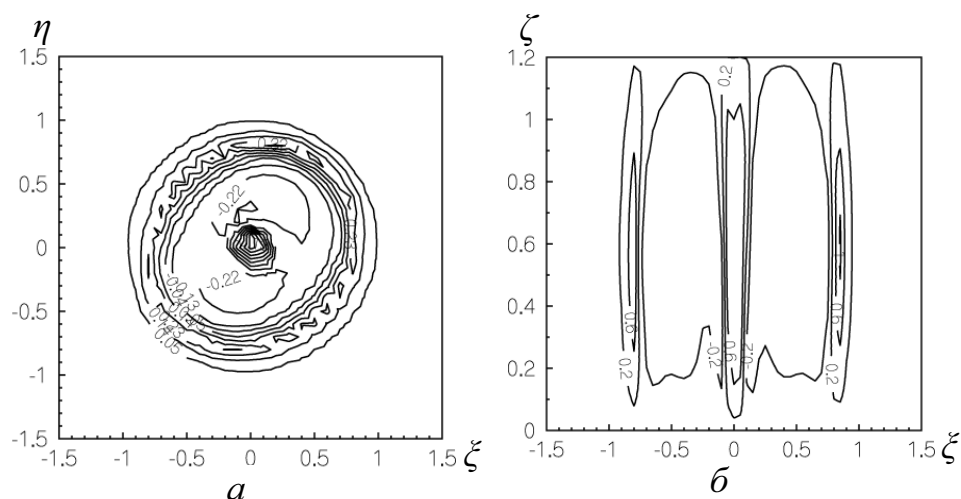
Поскольку рассматриваемые в данной работе масштабы вихрей подвержены влиянию планетарного вращения, поведение циклонических и антициклонических вихрей различно. На рис. 6 приведены данные расчета эво-

люции устойчивого антициклонического вихря. Видно, что происходит процесс диффузии завихренности в его внутренней части. Завихренность, причем разных знаков, сосредоточивается вблизи оси вращения и на периферии.



Р и с. 5. Горизонтальная структура поля вертикальной компоненты завихренности при $t = 2$: *a* – в приповерхностном слое ($\zeta \approx 1,14$), *б* – на горизонте вихря ($\zeta \approx 0,6$); горизонтальная структура поля вертикальной компоненты завихренности – *в* и азимутальной скорости – *г* при $t = 6$

В заключение отметим роль топографии дна. Численные эксперименты показали, что без учета силы Кориолиса возможна трансформация монополя в триполь. Кроме того, крутизна наклона дна также меняет картину течения, влияя на устойчивость вихря в целом.



Р и с. 6. Горизонтальное ($\zeta \approx 1,14$) – *a* и вертикальное ($\eta = 0$) – *б* распределение поля вертикальной компоненты завихренности в антициклоническом вихре

Выводы.

Устойчивость эволюции вихря зависит, прежде всего, от соотношения вертикального и горизонтального масштабов. Когерентные вихри имеют относительную толщину порядка 0,01 и меньше.

Трансформация монополя в триполь происходит как за счет планетарного вращения, так и в результате влияния неровности дна.

Триполь может сменяться в последующем монополем.

Существуют промежуточные режимы, когда мелкомасштабная турбулентность, хотя и постоянно генерируется, не разрушает вихревую структуру в целом, что определяется стратификацией.

Внутренняя структура антициклонического и циклонического вихрей различна. Основная завихренность в антициклоническом вихре сосредоточивается в центре и на периферии, внутренняя область имеет близкую к нулю завихренность, где течение почти потенциальное.

Выражаю глубокую признательность доктору физ.-мат. наук А.Г. Стеценко за ряд критических замечаний, приведших к улучшению качества статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hopfinger E.J., van Heijst G.J.F. Vortices in rotating fluids // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1993. – 25. – P. 241 – 289.
2. Козлов В.Ф., Мазур И.В. Об одном механизме формирования внутритермоклинных вихрей в океане // *Метеорология и гидрология.* – 1986. – № 8. – С. 83 – 88.
3. Шатило Г.И. Структура мезомасштабной вихревой линзы в океанском термоклине // *Докл. АН СССР.* – 1984. – 276, № 6. – С. 1477 – 1479.
4. Adragna A., Salusti E. Observation of small scale shelf-trapped dipolar vortices near the eastern Sicilian coast // *J. Phys. Oceanogr.* – 1990. – 20, № 7. – P. 1105 – 1112.

5. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – 8, № 3. – С. 63 – 77.
6. Elliott B.A., Sanford T.B. The subthermocline lens D1. Part I. Description of water properties and velocity profiles // J. Phys. Oceanogr. – 1986. – 16, № 3. – P. 532 – 548.
7. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математические модели циркуляции в океане. – Новосибирск: Наука, 1980. – 340 с.
8. Белоліпецький В.М., Белоліпецький П.В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах методом расщепления. Гидростатическое приближение // Вычислительные технологии. – 2006. – 11, № 5. – С. 21 – 31.
9. Lukyanov P.V., Maderich V.S. Restratification processes in the final stage of turbulence decay in a stably stratified medium // Докл. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 46 – 48.
10. Лукьянов П.В. Эволюция пары «вихрь в вихре» в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – 12, № 2. – С. 58 – 69.
11. Carnevale G.F., Kloosterziel R.C. Emergence and evolution of tripole vortices // J. Fluid Mech. – 1994. – 259. – P. 305 – 331.
12. Carton X.J., Legras B. The live-circle of tripole in two-dimensional incompressible flows // Ibid. – 1994. – 267. – P. 53 – 82.
13. Barba A., Leonard A. Emergence and evolution of tripole vortices from net-circulation initial condition // Phys. Fluids. – 2007. – 19. – P. 017101 – 16.
14. Pingree R.D., Le Cann B. Anticyclonic eddy X91 in southern Bay of Biscay, May 1991 to February 1992 // J. Geophys. Res. – 1992. – 97, № C9. – P. 14353 – 14367.

Институт гидромеханики НАН Украины,
Киев
E-mail: pavel_lukianov@bigmir.net

Материал поступил
в редакцию 27.04.11
После доработки 18.10.11

АНОТАЦІЯ Розглянута еволюція компактного вихору з масштабами сто метрів по вертикалі та декілька кілометрів по горизонталі в рамках моделі моря, яка складається з верхнього перемішаного шару та нижнього шару із стійкою вертикальною стратифікацією. Розподіл густини по вертикалі задається гладкою функцією: постійне значення плавно переходить в близьку до лінійної експоненціальну залежність. Показано, що планетарне обертання та топографія дна є дві незалежні причини трансформації монополя в триполь. Стійкість триполя залежить, передусім, від відносної товщини вихору, а також від стратифікації. Нестійкість виникає спочатку в дрібнішій області за рахунок тертя вихору об дно. Трансформація монополя відбувається без введення додаткових азимутальних збурень поля швидкості.

Ключові слова: компактний вихор, прибережний шельф, нестійкість, триполь.

ABSTRACT Evolution of a compact vortex with the vertical scale – 100 m and the horizontal one – several kilometers is considered within the framework of the sea model consisting of the upper mixed layer and the lower one with stable vertical stratification. Vertical distribution of density is prescribed by a smooth function: constant value smoothly grades into the exponential dependence close to the linear one. It is shown that planetary rotation and bottom topography constitute two independent mechanisms of a monopole transformation into a tripole. The tripole stability depends, first of all, on the vortex relative thickness and also on stratification. At first, instability arises in a shallower water area due to the vortex-bottom friction. The monopole transforms into a tripole without introducing additional azimuth disturbances of the velocity field.

Keywords: compact vortex, coastal shelf, instability, tripole.