

Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами в бароклинном течении

© 2015 А.А. Слепышев

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

Поступила в редакцию 20.01.2014 г. После доработки 29.04.2014 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете турбулентной вязкости в вертикально-неоднородном течении. В линейном приближении рассчитывается дисперсионное соотношение, декремент затухания волны. Во втором порядке малости по амплитуде волны находятся скорость стокова дрейфа и вертикальные волновые потоки. Показано, что волновой поток соли по абсолютной величине сравним с турбулентным вне слоя с максимальным градиентом солёности, т. е. глубже приповерхностного слоя. Учет течения приводит к тому, что волновой поток несколько уменьшается. Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа при учете течения отлична от нуля.

Ключевые слова: внутренние волны, турбулентность, стоков дрейфа.

Введение. Внутренние волны в океане присутствуют повсеместно благодаря тому, что действуют источники, которые их порождают. Внутренние волны могут существовать в стратифицированной среде, когда плотность воды возрастает с глубиной. Глубже верхнего перемешанного слоя такая ситуация типична для Мирового океана. К энергетическим источникам внутренних волн можно отнести возмущения атмосферного давления, ветровые напряжения на поверхности моря, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна [1], вихревые течения.

Актуальность проблематики связана с тем, что внутренние волны могут вносить свой вклад в вертикальный обмен в океане. Обычно вертикальный обмен в морской среде связывают с мелкомасштабной турбулентностью, которая имеет перемежаемый характер, т. е. турбулентность присутствует в виде «пятен», которые порождаются гидродинамической неустойчивостью течений и обрушением внутренних волн. Вертикальный обмен важен в переносе примесей, диффузии кислорода в глубоководные слои моря и диффузии сероводорода из глубинных слоев Черного моря.

Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии рассматривались в ряде работ [1 – 3], в которых определялся декремент затухания волны на турбулентности. Нелинейные эффекты при распространении внутренних волн без учета турбулентной вязкости и диффузии рассматривались в [4, 5]. В этих работах определялись среднее течение, индуцированное волной, и неосциллирующая поправка к средней плотности.

Внутренние волны при учете нелинейности и вязкости рассматривались в работе [6], но вертикальные волновые потоки тепла и соли не учитывались.

Вертикальный обмен в стратифицированной толще моря связывают с обрушением мелкомасштабных внутренних волн [7], делаются оценки скорости диссипации турбулентной энергии и коэффициента вертикального турбулентного обмена. Показано, что в области свала глубин на кромке шельфа Черного моря происходит интенсификация вертикального обмена, связанная с увеличением амплитуд внутренних волн при их распространении в область мелководья [8].

Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами, рассматривались в работе [9]. Такие потоки существуют за счет фазового сдвига колебаний вертикальной скорости и температуры (солености), отличного от $\pi/2$ при учете турбулентной вязкости и диффузии.

В настоящей работе рассматриваются вертикальные потоки, обусловленные внутренними волнами на бароклинном течении. Представляет интерес сравнить волновые потоки с соответствующими турбулентными потоками как при наличии течения, так и при его отсутствии. Кроме того, находится скорость стокова дрейфа в этих двух случаях.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные внутренние волны на бароклинном течении при учете турбулентной вязкости и диффузии в приближении Буссинеска. В линейном приближении находим вертикальное распределение амплитуд внутренних волн, дисперсионное соотношение и декремент затухания волны. Во втором порядке по амплитуде волны определяем скорость стокова дрейфа и волновые потоки соли.

Введем безразмерные переменные по следующим формулам (волнистой чертой сверху обозначены размерные физические величины):

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\omega_*}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{H}, \quad \tilde{\omega} = \omega_* \omega, \quad \tilde{u}_1 = u_1 H \omega_*, \quad \tilde{u}_2 = u_2 H \omega_*, \quad \tilde{u}_3 = u_3 H \omega_*, \\ \tilde{P} &= \bar{\rho}_0 H^2 \omega_*^2 P, \quad \tilde{\rho} = \bar{\rho}_0 \omega_*^2 \frac{H \rho}{g}, \quad \tilde{\rho}_0 = \bar{\rho}_0 \omega_*^2 \frac{H \rho_0}{g}, \quad \tilde{x}_i = H x_i, \quad \tilde{K}_i = K_i \mu_i, \\ \tilde{M}_i &= M_i \mu_i \quad (i=1, 2, 3), \quad K_1 = K_2, \quad M_1 = M_2, \quad \mu_1 = \mu_2, \end{aligned}$$

где μ_1, μ_3 – характерные значения горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости; g – ускорение силы тяжести; x_1, x_2, x_3 – две горизонтальные и вертикальная координаты, вертикальная ось x_3 направлена вертикально вверх; ρ и P – волновые возмущения плотности и давления; ρ_0 – невозмущенная средняя плотность воды; $\bar{\rho}_0$ – плотность, осредненная по глубине; u_1, u_2, u_3 – две горизонтальные и вертикальная компоненты волновых возмущений скорости; K_1, K_3, M_1, M_3 – горизонтальные и вертикальные коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии соответственно; H – глубина моря; ω_* – характерная частота волны. Коэффициенты вертикальной турбулентной диффузии и вязкости и две компоненты скорости среднего те-

чения U_0, V_0 предполагаются зависящими от вертикальной координаты. Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена предполагаются постоянными. Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{dU_0}{dx_3} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \varepsilon^2 K_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \\ + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + U_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial V_0}{\partial x_3} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \varepsilon^2 K_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \\ + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (1б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} + U_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \varepsilon^2 K_1 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + \\ + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \rho, \end{aligned} \quad (1в)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + U_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + V_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \varepsilon^2 M_1 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} \right) + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(M_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) - u_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3}, \quad (1г)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1д)$$

Здесь $\varepsilon^2 = \frac{\mu_1}{H^2 \omega_*}$ – малый параметр, пропорциональный значению коэффициента горизонтальной турбулентной вязкости μ_1 ; $\beta^2 = \frac{\mu_3}{\mu_1}$, причем $\beta^2 \ll \varepsilon^2$.

Граничные условия на поверхности – условие «твердой крышки» и отсутствие тангенциальных напряжений [2]:

$$u_3(0) = 0, \quad \beta^2 K_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + K_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \Big|_{x_3=0}, \quad \beta^2 K_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + K_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \Big|_{x_3=0}. \quad (2)$$

Граничные условия на дне – условия прилипания:

$$u_1(-1) = 0, \quad u_2(-1) = 0, \quad u_3(-1) = 0. \quad (3)$$

Линейное приближение. Решения линейного приближения ищем в виде

$$u_1^0 = u_{10}(x_3)Ae^{i\theta} + c.c., \quad u_2^0 = u_{20}(x_3)Ae^{i\theta} + c.c., \quad u_3^0 = u_{30}(x_3)Ae^{i\theta} + c.c.,$$

$$P_1 = P_{10}(x_3)Ae^{i\theta} + c.c., \quad \rho_1 = \rho_{10}(x_3)Ae^{i\theta} + c.c., \quad (4)$$

где *c.c.* – комплексно сопряженные слагаемые; *A* – амплитудный множитель; θ – фаза волны; $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = k$; $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega$ (k – волновое число, ω – частота).

Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x_1 .

Подставим (4) в систему уравнений (1), получим связь амплитудных функций u_{10} , P_{10} , u_{30} и уравнения для $u_{20}(x_3)$, $\rho_{10}(x_3)$:

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_3}, \quad \Omega = \omega - kU_0, \quad (5a)$$

$$P_{10} = (\varepsilon^2 \beta^2 K_3 \frac{d^2}{dx_3^2} + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{dK_3}{dx_3} \frac{d}{dx_3} + i\Omega - \varepsilon^2 K_1 k^2) \frac{1}{k^2} \frac{du_{30}}{dx_3} + \frac{i}{k} \frac{dU_0}{dx_3} u_{30}, \quad (5б)$$

$$(\varepsilon^2 \beta^2 M_3 \frac{d^2}{dx_3^2} + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{dM_3}{dx_3} \frac{d}{dx_3} - \varepsilon^2 M_1 k^2 + i\Omega) \rho_{10} = u_{30} \frac{d\rho_0}{dx_3}, \quad (5в)$$

$$\varepsilon^2 \beta^2 K_3 \frac{d^2 u_{20}}{dx_3^2} + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{dK_3}{dx_3} \frac{du_{20}}{dx_3} + (i\Omega - \varepsilon^2 K_1 k^2) u_{20} = u_{30} \frac{dV_0}{dx_3}. \quad (5г)$$

Уравнение (5г) следует дополнить граничными условиями, вытекающими из (2), (3):

$$\frac{du_{20}}{dx_3} = 0 \quad \text{– при } x_3 = 0; \quad u_{20}(-1) = 0 \quad \text{– при } x_3 = -1. \quad (6)$$

Функция u_{30} удовлетворяет уравнению

$$-N^2 u_{30} = (\varepsilon^2 \beta^2 M_3 \frac{d^2}{dx_3^2} + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{dM_3}{dx_3} \frac{d}{dx_3} - \varepsilon^2 M_1 k^2 + i\Omega) \times$$

$$\times \left\{ i\Omega u_{30} - \frac{d}{dx_3} \left[(\varepsilon^2 \beta^2 K_3 \frac{d^2}{dx_3^2} + \varepsilon^2 \beta^2 \frac{dK_3}{dx_3} \frac{d}{dx_3} - \varepsilon^2 K_1 k^2 + i\Omega) \frac{1}{k^2} \frac{du_{30}}{dx_3} + \frac{i}{k} \frac{dU_0}{dx_3} u_{30} \right] - \right.$$

$$\left. - \varepsilon^2 K_1 k^2 u_{30} + \varepsilon^2 \beta^2 K_3 \frac{d^2 u_{30}}{dx_3^2} + 2\varepsilon^2 \beta^2 \frac{dK_3}{dx_3} \frac{du_{30}}{dx_3} \right\}. \quad (7)$$

Из граничных условий (2), (3) получим условия для u_{30} :

на поверхности при $x_3 = 0$

$$u_{30} = 0, \quad \frac{d^2 u_{30}}{dx_3^2} = 0, \quad (8a)$$

на дне при $x_3 = -1$

$$u_{30} = \frac{du_{30}}{dx_3} = 0. \quad (8б)$$

Уравнение (7) имеет малый параметр при старшей производной $\sim (\varepsilon\beta)^4$. Это уравнение, следуя [10, 11], решаем асимптотическим методом Вишика – Люстерника, раскладывая u_{30} , ω в ряды по малому параметру $\varepsilon\beta$:

$$u_{30}(x_3) = \sum_{i=0} (\varepsilon\beta)^i u_{3i}^0(x_3, \varepsilon) + \varepsilon\beta \sum_{i=0} (\varepsilon\beta)^i v_i^1 + (\varepsilon\beta)^2 \sum_{i=0} (\varepsilon\beta)^i v_i^0, \quad (9a)$$

$$\omega = \omega_{01}(\varepsilon) + \varepsilon\beta\omega_{11}(\varepsilon) + (\varepsilon\beta)^2\omega_{21}(\varepsilon) + \dots, \quad (9б)$$

где $v_i^1((1+x_3)/\varepsilon\beta)$ – погранслоиные решения в окрестности дна, $v_i^0(x_3/\varepsilon\beta)$ – в окрестности свободной поверхности. Погранслоиные поправки представляют собой быстроубывающие функции при удалении от границы, которые обеспечивают выполнение граничных условий. Функции $u_{3i}(x_3, \varepsilon)$ в общем случае зависят от параметра ε , т. к. он содержится в уравнениях для этих функций.

Подставляя разложения (9) в (7), получим краевую задачу для функции u_{30}^0 в нулевом порядке малости по параметру $\varepsilon\beta$:

$$(\varepsilon^2 M_1 k^2 - i\Omega_{01}) \left\{ i\Omega_{01} u_{30}^0 - \frac{d}{dx_3} \left[(i\Omega_{01} - \varepsilon^2 K_1 k^2) \frac{1}{k^2} \frac{du_{30}^0}{dx_3} + \frac{i}{k} \frac{dU_0}{dx_3} u_{30}^0 - \varepsilon^2 K_1 k^2 u_{30}^0 \right] \right\} = N^2 u_{30}^0, \quad (10)$$

где $N^2 = -\frac{d\rho_0}{dx_3}$ – квадрат частоты Брента – Вайсяля; $\Omega_{01} = \omega_{01} - kU_0$ – частота волны со сдвигом Доплера.

Граничные условия для u_{30}^0 следующие:

$$u_{30}^0 \Big|_{x_3=0} = 0, \quad u_{30}^0 \Big|_{x_3=-1} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) имеет малый параметр ε , следуя методу, изложенному в [10], решение и частоту ω_{01} ищем в виде асимптотических рядов по этому параметру:

$$u_{30}^0(x_3, \varepsilon) = w_0(x_3) + \varepsilon w_1(x_3) + \varepsilon^2 w_2(x_3) + \dots, \quad (12a)$$

$$\omega_{01} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (12б)$$

В нулевом порядке по параметру ε получим краевую задачу

$$\frac{d^2 w_0}{dx_3^2} + k^2 \frac{(N^2 - \Omega_0^2)}{\Omega_0^2} w_0 + \frac{k}{\Omega_0} \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} w_0 = 0, \quad (13a)$$

$$w_0|_{x_3=0} = 0, \quad w_0|_{x_3=-1} = 0, \quad (13b)$$

где $\Omega_0 = \omega_0 - kU_0$. Данная краевая задача (13) при отсутствии сингулярности $\Omega_0 = 0$ имеет счетный набор собственных функций – набор мод, причем каждому значению волнового числа k соответствует определенное значение частоты ω_0 , отвечающее данной моде.

Следующий член в разложении (12a) определяется из уравнения

$$\frac{d^2 w_1}{dx_3^2} + k^2 \frac{(N^2 - \Omega_0^2)}{\Omega_0^2} w_1 + \frac{k}{\Omega_0} \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} w_1 = \frac{\omega_1}{\Omega_0} \left(2k^2 w_0 - 2 \frac{d^2 w_0}{dx_3^2} - \frac{k w_0}{\Omega_0} \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} \right) = f_1(x_3). \quad (14)$$

Граничные условия для функции w_1

$$w_1|_{x_3=0} = 0, \quad w_1|_{x_3=-1} = 0. \quad (15)$$

Условие разрешимости краевой задачи (14), (15)

$$\int_{-1}^0 f_1 w_0 dx_3 = 0. \quad (16)$$

Данное условие при $\omega_1 \neq 0$, вообще говоря, не выполняется и краевая задача (14), (15) решений не имеет.

Следующее приближение w_2 по параметру ε удовлетворяет уравнению

$$\Omega_0^2 \left[\frac{d^2}{dx_3^2} - k^2 \right] w_2 + N^2 k^2 w_2 + k \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} w_2 = (\omega_2 + i M_1 k^2) \left(k^2 \Omega_0 w_0 - \Omega_0 \frac{d^2 w_0}{dx_3^2} - k \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} w_0 \right) + \Omega_0 \left[\omega_2 \left(k^2 w_0 - \frac{d^2 w_0}{dx_3^2} \right) - i K_1 k^2 \frac{d^2 w_0}{dx_3^2} + i K_1 k^4 w_0 \right] = \Phi. \quad (17)$$

Граничные условия для w_2 имеют вид

$$w_2|_{x_3=0} = 0, \quad w_2|_{x_3=-1} = 0. \quad (18)$$

Условие разрешимости краевой задачи (17), (18)

$$\int_{-1}^0 \Phi w_0 dx_3 = 0. \quad (19)$$

Отсюда находим выражение для ω_2 :

$$\omega_2 = -i \frac{\int_{-1}^0 \left(\frac{M_1 k^4}{\Omega_0^2} N^2 w_0 - K_1 k^2 \frac{d^2 w_0}{dx_3^2} + k^4 K_1 w_0 \right) \frac{w_0}{\Omega_0} dx_3}{\int_{-1}^0 \left(\frac{N^2}{\Omega_0^3} 2k^2 + \frac{k}{\Omega_0^2} \frac{d^2 U_0}{dx_3^2} \right) w_0^2 dx_3}. \quad (20)$$

Найдем погранслоное решение v_0^0 в разложении (9а) для удовлетворения граничных условий (8а), (8б) на поверхности. Подставляя разложение (9а) в уравнение (7) и разлагая K_3 , M_3 и U_0 , V_0 в ряд Тейлора в окрестности $x_3 = 0$, получим в нулевом порядке по параметру $\varepsilon\beta$ уравнение для $v_0^0(\eta)$, $\eta = \frac{x_3}{\varepsilon\beta}$:

$$K_3(0)M_3(0) \frac{\partial^6 v_0^0}{\partial \eta^6} + i\Omega_0(0)(K_3(0) + M_3(0)) \frac{\partial^4 v_0^0}{\partial \eta^4} = \Omega_0^2(0) \frac{\partial^2 v_0^0}{\partial \eta^2}. \quad (21)$$

Решение уравнения (21), затухающее при удалении от поверхности, имеет вид

$$v_0^0 = C_0^0 \exp(\lambda_1^0 \eta) + F_0^0 \exp(\lambda_2^0 \eta), \quad (22)$$

где

$$C_0^0 = \frac{d^2 w_0(0)}{dx_3^2} \frac{1}{(\lambda_2^0)^2 - (\lambda_1^0)^2}, \quad F_0^0 = -C_0^0. \quad (23)$$

Здесь λ_1^0 , λ_2^0 определяются по формулам

$$\lambda_1^0 = \left(\frac{\Omega_0(0)}{2M_3(0)} \right)^{1/2} (1-i), \quad \lambda_2^0 = \left(\frac{\Omega_0(0)}{2K_3(0)} \right)^{1/2} (1-i). \quad (24)$$

Уравнение для погранслоного решения $v_0^1((1+x_3)/\varepsilon_2)$ в окрестности дна имеет вид

$$\frac{\partial^6 v_0^1}{\partial \eta_1^6} + i\Omega_0(-1) \frac{M_3 + K_3}{M_3 K_3} \frac{\partial^4 v_0^1}{\partial \eta_1^4} - \frac{\Omega_0^2}{M_3 K_3} \frac{\partial^2 v_0^1}{\partial \eta_1^2} = 0, \quad (25)$$

где $\eta_1 = \frac{(x_3+1)}{\varepsilon\beta}$. Решение данного уравнения, затухающее при удалении от

дна и удовлетворяющее граничным условиям (8б), определяется следующим образом:

$$v_0^1 = D_0^1 \exp(-\lambda_1 \eta_1) + G_0^1 \exp(-\lambda_2 \eta_1), \quad (26a)$$

где

$$D_0^1 = \frac{dw_0(-1)}{dx_3} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad G_0^1 = -D_0^1. \quad (266)$$

Величины λ_1 , λ_2 находятся по формулам (24), только коэффициенты турбулентного обмена и частота волны со сдвигом Доплера вычисляются на нижней границе.

Уравнение для волновых возмущений солёности s имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + (u_1 + U_0) \frac{\partial s}{\partial x_1} + (u_2 + V_0) \frac{\partial s}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial S_0}{\partial x_3} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} \right) + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(M_1 \frac{\partial s}{\partial x_2} \right) + (\varepsilon\beta)^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(M_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где $S_0(x_3)$ – средний профиль солёности. Решения линейного приближения будем искать в виде

$$s_1 = s_{10}(x_3) A e^{i\theta} + c.c., \quad (28)$$

где s_{10} удовлетворяет уравнению

$$-i\Omega s_{10} + u_{30} \frac{dS_0}{dx_3} = \varepsilon^2 (-k^2 M_1 s_{10} + \beta^2 \frac{d}{dx_3} (M_3 \frac{ds_{10}}{dx_3})). \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет малый параметр при старшей производной, и решение будем искать в виде, аналогичном (9а):

$$s_{10} = s_{10}^I + (\varepsilon\beta)^2 s_{10}^{II} + \varepsilon\beta \sum_{i=0} s_{10}^I \left(\frac{x_3 + 1}{\varepsilon\beta} \right) (\varepsilon\beta)^i + (\varepsilon\beta)^2 \sum_{i=0} s_{10}^0 \left(\frac{x_3}{\varepsilon\beta} \right) (\varepsilon\beta)^i. \quad (30)$$

Из (29) следует, что

$$s_{10}^I = s_0 + \varepsilon^2 s_2 + \dots, \quad (31)$$

где

$$s_0 = -\frac{iw_0}{\Omega_0} \frac{dS_0}{dx_3}, \quad (32a)$$

$$s_2 = -\left(\omega_{2i} + k^2 M_1 \right) \frac{w_0}{\Omega_0^2} \frac{dS_0}{dx_3} - \frac{iw_2}{\Omega_0} \frac{dS_0}{dx_3}, \quad (32b)$$

здесь $\omega_{2i} = \frac{\omega_2}{i}$. Пограничные решения s_{10}^I и s_{10}^0 в окрестности дна и свободной поверхности удовлетворяют соответственно уравнениям

$$i\Omega_0(0) s_{10}^0 + \frac{d}{d\eta} (M_3(0) \frac{d}{d\eta} s_{10}^0) = \frac{dS_0(0)}{dx_3} v_0^0(\eta), \quad (33a)$$

$$i\Omega_0(-1)s_{II0}^I + \frac{d}{d\eta_1}(M_3(-1)\frac{d}{d\eta_1})s_{II0}^I = \frac{dS_0(-1)}{dx_3}v_0^1(\eta_1). \quad (33б)$$

Граничные условия имеют вид

$$s_{10}(0) = s_{10}(-1) = 0. \quad (34)$$

Решение уравнения (33а) в окрестности поверхности моря следующее:

$$s_{II0}^0(\eta) = C_{1S}^0 \exp(\lambda_1^0 \eta) + Q_S^0 \exp(\lambda_2^0 \eta) + \eta P_S^0 \exp(\lambda_1^0 \eta), \quad (35)$$

где

$$P_S^0 = \frac{C_0^0}{2\lambda_1^0 M_3(0)} \frac{dS_0(0)}{dx_3}, \quad (36а)$$

$$Q_S^0 = \frac{iC_0^0}{\Omega_0(0)[1 - M_3(0)/K_3(0)]} \frac{dS_0(0)}{dx_3}, \quad (36б)$$

$$C_{1S}^0 = -Q_S^0. \quad (36в)$$

Погранслоное решение уравнения (33б) в окрестности дна имеет вид

$$s_{II0}^I(\eta_1) = C_{12S}^0 \exp(-\lambda_1 \eta_1) + Q_{S1} \exp(-\lambda_2 \eta_1) + \eta_1 P_{S1} \exp(-\lambda_1 \eta_1), \quad (37)$$

где

$$P_{S1} = -\frac{D_0^1}{2\lambda_1 M_3(-1)} \frac{dS_0(-1)}{dx_3}, \quad (38а)$$

$$Q_{S1} = \frac{iD_0^1}{\Omega_0(-1)[1 - M_3(-1)/K_3(-1)]} \frac{dS_0(-1)}{dx_3}. \quad (38б)$$

Из граничного условия (34) следует

$$C_{12S}^0 = -Q_{S1}. \quad (39)$$

Нелинейные эффекты. Скорость стокова дрейфа частиц жидкости определяется по формуле [12]:

$$\mathbf{u}_s = \int_0^t \mathbf{u} d\tau \nabla \mathbf{u}, \quad (40)$$

где \mathbf{u} – поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает осреднение по периоду волны. Горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа, направленная вдоль волнового вектора, с точностью до членов, квадратных по амплитуде волны, имеет вид:

$$u_{1s} = \frac{A_1 A_1^*}{k} \left(\frac{2\omega_0}{\omega \omega^*} \frac{du_{30}}{dx_3} \frac{du_{30}^*}{dx_3} + \frac{u_{30}}{\omega} \frac{d^2 u_{30}^*}{dx_3^2} + \frac{u_{30}^*}{\omega^*} \frac{d^2 u_{30}}{dx_3^2} \right). \quad (41)$$

Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа определяется по формуле

$$u_{2s} = \frac{iA_1 A_1^*}{\omega} \frac{d(u_{30} u_{20}^*)}{dx_3} + c.c., \quad A_1 = A e^{i\omega t}. \quad (42)$$

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости V_0 зависит от вертикальной координаты, величина u_{2s} отлична от нуля и в невязком случае определяется следующим образом:

$$u_{2s} = -\frac{2A_1 A_1^*}{\omega_0} \frac{d}{dx_3} \left(\frac{w_0^2}{\Omega_0} \frac{dV_0}{dx_3} \right). \quad (43)$$

Найдем вертикальный волновой поток соли $\overline{u_3 S}$, учитывая разложения (9а), (30), (31):

$$\overline{u_3 S} / |A_1|^2 = w_0 (\varepsilon^2 s_2 + \varepsilon \beta S_{II0}^I + (\varepsilon \beta)^2 S_{II0}^0)^* + s_0^* (\varepsilon \beta v_0^1 + (\varepsilon \beta)^2 v_0^0) + \varepsilon^2 w_2 s_0^* + c.c. \quad (44)$$

Результаты расчетов. Волновые потоки соли рассчитаем для внутренних волн, которые наблюдались в ходе эксперимента юго-западнее г. Евпатория в третьем этапе 44-го рейса научно-исследовательского судна «Михаил Ломоносов».

На рис. 1 представлены 4 реализации возвышений изолиний температуры, полученных по данным приборов ГРАД (градиентно-распределенные датчики температуры) [13]. Первый прибор располагался в слое 5 – 15 м, второй – в слое 15 – 25 м, третий – в слое 25 – 35 м, четвертый – в слое 35 – 60 м. Легко видеть, что мощные колебания с периодом 15 мин в слое 25 – 60 м находятся в противофазе с колебаниями в слое 15 – 25 м, что говорит о колебаниях второй моды. Максимальная амплитуда по возвышениям составила 0,5 м. Вертикальные профили частоты Брента – Вайсяля и двух компонент скорости течения показаны на рис. 2, а, в. Краевая задача (13) для внутренних волн решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Волновое число находится методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (13б). Собственная функция 15-минутных внутренних волн второй моды показана на рис. 2, б.

Волновое число равно 0,032 рад/м. Нормирующий множитель A_1 найдем по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений ($\max \zeta_3 = 0,5$ м). Для этого выразим вертикальное смещение ζ_3 , используя

соотношение $\frac{d\zeta_3}{dt} = u_3$:

$$\zeta_3 = \frac{i w_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ikx_1 - i\omega_0 t) + c.c.$$

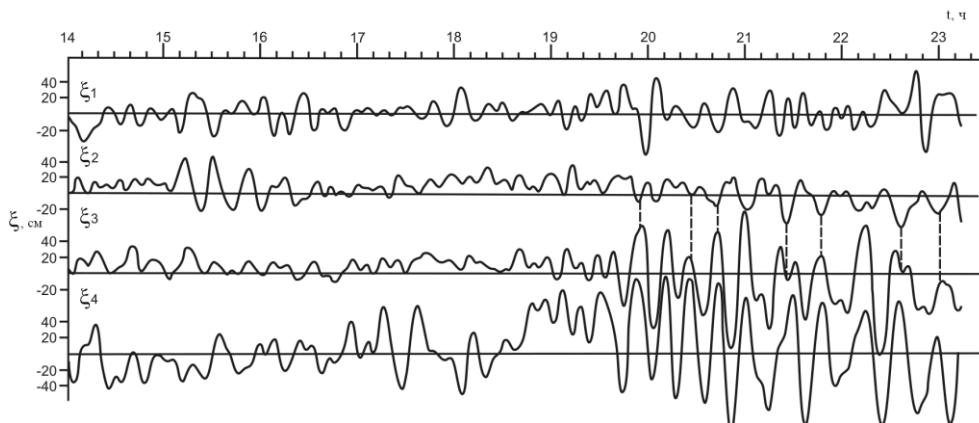


Рис. 1. Временной ход вертикальных смещений изолиний температуры

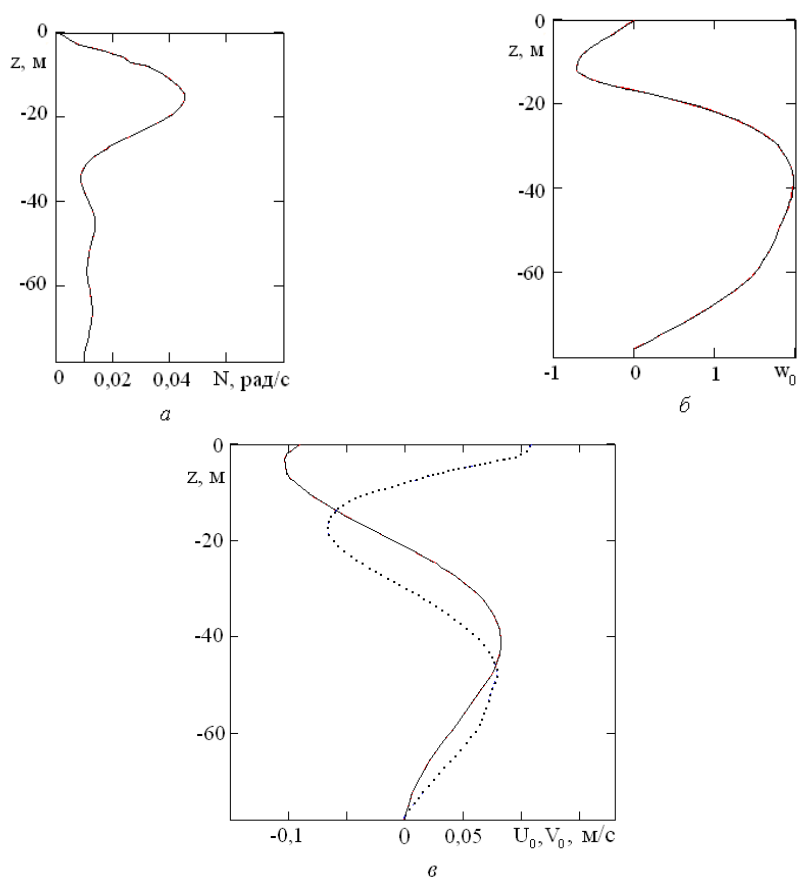


Рис. 2. Вертикальный профиль частоты Брента – Вэйсяля – a , собственная функция 15-минутных внутренних волн – b , вертикальные профили компонент скорости течения U_0 (\dots), V_0 (—) – c

Отсюда следует

$$A_1 = \frac{\max \zeta_3}{2 \max |w_0 / \Omega_0|}.$$

Таким образом, амплитуда вертикальных смещений пропорциональна w_0 . Экстремумы функции w_0 соответствуют максимальным вертикальным смещениям по данным эксперимента (рис. 1; 2, б), т. е. в эксперименте наблюдалась вторая мода. Коэффициент вертикальной диффузии M_3 определим по эмпирической формуле, справедливой в области свала глубин на северо-западном шельфе Черного моря [7]: $M_3 \cong 8,4 \cdot 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$, N_c соответствует частоте Брента – Вейсяля в цикл/ч. Длина волны 15-минутных внутренних волн второй моды равна 195,6 м, типичное значение коэффициента горизонтального турбулентного обмена M_1 составляет $1 \text{ м}^2/\text{с}$. Дисперсионные кривые первых двух мод при наличии и отсутствии течения показаны на рис. 3.

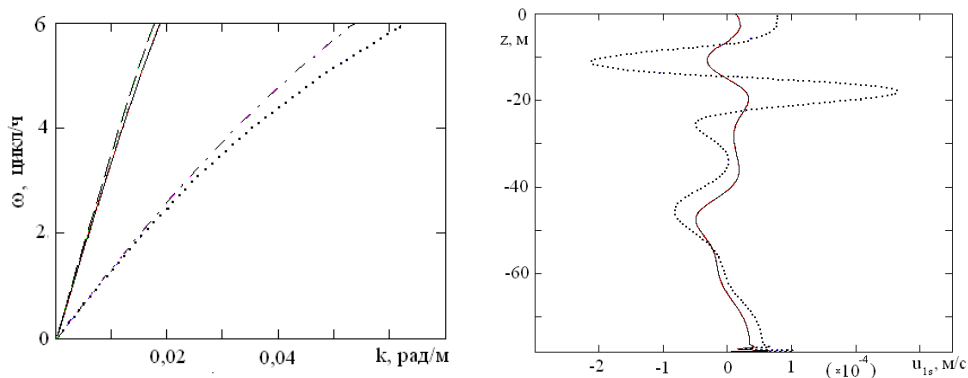


Рис. 3. Дисперсионные кривые: первая мода без течения (—) и с течением (---); вторая мода без течения (·····) и с течением (- · - · -)

Рис. 4. Скорость стокова дрейфа при наличии течения (—) и при его отсутствии (·····)

Краевую задачу (17), (18) по определению функции w_2 решаем численно по неявной схеме Адамса 3-го порядка точности при $K_3 = 2M_3$, $K_1 = 2M_1$. Находим единственное решение, ортогональное w_0 , и декремент затухания волны $\delta\omega = \omega_i$. У 15-минутных внутренних волн второй моды $\delta\omega = -1,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}$. На рис. 4 показаны вертикальные профили горизонтальной компоненты скорости стокова дрейфа при наличии течения и при его отсутствии (пунктирная кривая). При наличии течения скорость стокова дрейфа по модулю меньше. Поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа отлична от нуля только при учете течения (рис. 5).

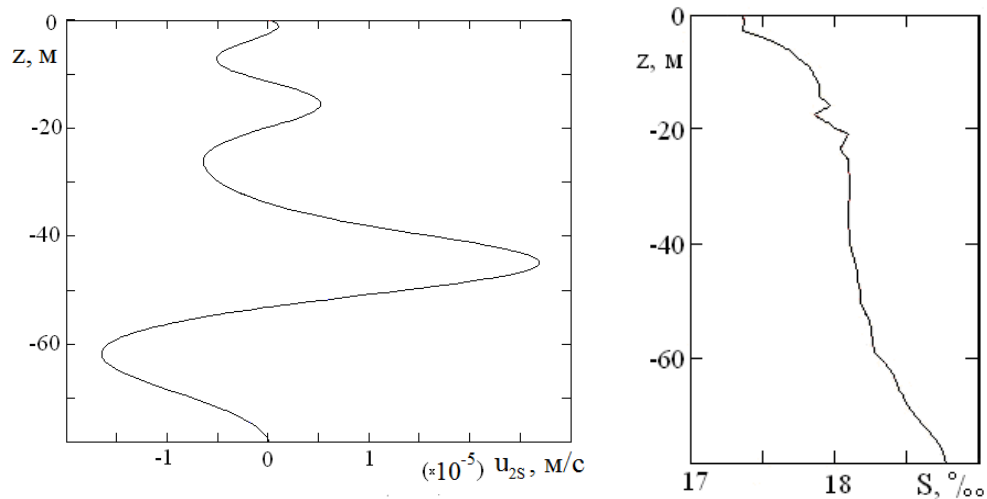


Рис. 5. Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стока дрейфа

Рис. 6. Вертикальный профиль солёности

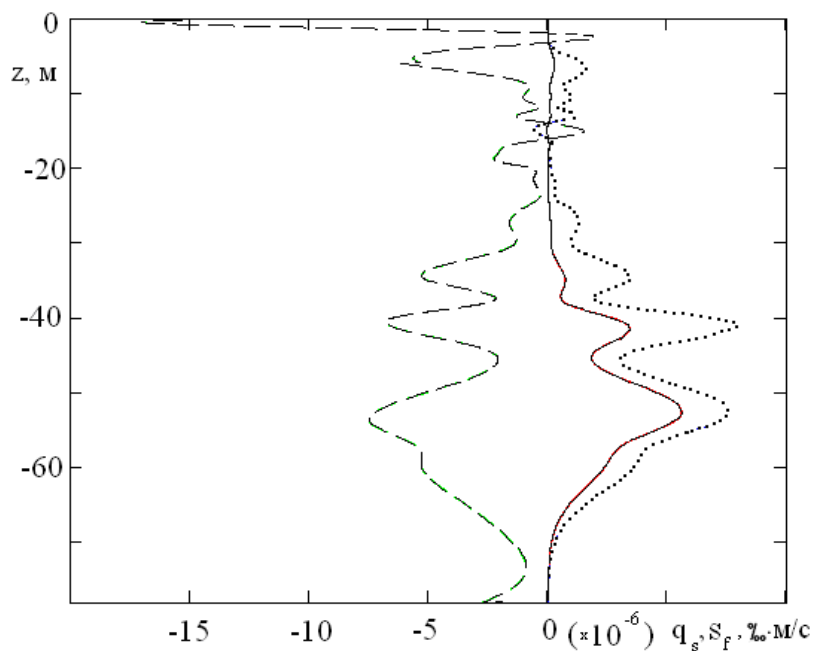


Рис. 7. Профили волновых и турбулентного потоков соли: волновой поток при наличии течения (—) и при его отсутствии (·····); турбулентный поток соли (---)

Волновые потоки соли рассчитаем при вертикальном профиле солёности, показанном на рис. 6. Турбулентный поток соли определяется по формуле

$s_f = -M_3 \frac{dS_0}{dz}$. На рис. 7 представлены вертикальные волновые потоки соли $\overline{u_3 S}$ для 15-минутных внутренних волн второй моды и турбулентный поток. При наличии течения волновой поток соли несколько меньше, чем при отсутствии. Волновой поток при отсутствии течения (пунктирная кривая) по модулю сравним с турбулентным на глубине более 25 м, т. е. вне приповерхностного слоя максимальных градиентов солености.

Выводы.

1. Волновой поток соли $\overline{u_3 S}$ при учете турбулентной вязкости и диффузии отличен от нуля и при наличии течения несколько меньше, чем при его отсутствии.
2. Волновой поток соли при отсутствии течения сравним по абсолютной величине с турбулентным вне приповерхностного слоя, где градиенты солености максимальны.
3. Поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа при учете течения отлична от нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. – М.: Мир, 1981. – Ч. 2. – 363 с.
2. *LeBlond P.H.* On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // *J. Fluid Mech.* – 1966. – 25, part 1. – P. 121 – 142.
3. *Островский Л.А., Соустова И.А.* Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // *Океанология.* – 1979. – 19, вып. 6. – С. 973 – 981.
4. *Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И. и др.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* – 1976. – 12, № 3. – С. 293 – 301.
5. *Grimshaw R.* The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // *Stud. In Appl. Math.* – 1977. – 56. – P. 241 – 266.
6. *Grimshaw R.* The effect of a dissipative processes on mean flows induced by internal gravity-waves packets // *J. Fluid Mech.* – 1982. – 115. – P. 347 – 378.
7. *Иванов В.А., Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В.* Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // *Доп. НАН України.* – 2008. – № 6. – С. 108 – 112.
8. *Самодуров А.С., Носова А.В., Слепышев А.А.* Физические механизмы интенсификации вертикального обмена в зоне сопряжения шельфа и свала глубин // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное исследование ресурсов шельфа.* – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2011. – Вып. 25. – 2. – С. 190 – 203.
9. *Слепышев А.А.* Процессы переноса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами при наличии турбулентности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* – 1997. – 33, № 4. – С. 536 – 548.

10. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. – 1957. – XII, вып. 5 (77). – С. 3 – 122.
11. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 259 с.
12. Longuet-Higgins M.S. On the transport of mass by time varying ocean current // Deep-Sea Res. – 1969. – 16, № 5. – P. 431 – 447.
13. Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС «Михаил Ломоносов» 7 августа – 15 сентября 1985 г. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 1985. – Т. 1. – 135 с.

Vertical fluxes induced by weak-nonlinear internal waves in a baroclinic flow

A.A. Slepyshev

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia

Free internal waves are considered in the Boussinesque approximation with account of turbulent viscosity in a vertically non-uniform flow. Dispersive relation and the wave attenuation decrement are calculated in linear approximation. The Stokes drift speed and vertical wave fluxes of salt are found in the second order of the wave amplitude. It is shown that the salt wave flux absolute value is comparable with that of the turbulent flux outside the layer with maximum salinity gradient, i. e. deeper than the surface layer. When the flow is taken into account the wave flux somewhat decreases, and the component of the Stokes drift velocity (transversal to the wave propagation direction) is different from zero.

Keywords: internal waves, turbulence, Stokes drift.