

## Расчет средних характеристик стратификации водной среды

© 2015 А.Е. Погребной

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

*E-mail: pogrebok57@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2014 г. После доработки 30.09.2014 г.

Проводится анализ проблем, возникающих при использовании традиционной процедуры осреднения вертикальных профилей гидрофизических характеристик. Сделан вывод о необходимости учета вертикальных смещений элементов жидкости. Для этого предложено использовать лагранжевы инварианты, в частности осредненное фоновое распределение поля плотности. Это позволяет рассчитать осредненные глубины залегания различных элементов вертикальной структуры. В качестве среднего вертикального распределения искомого параметра используется его среднее значение для каждого элемента, соответствующее средней глубине залегания этого элемента. Обсуждаются способы повышения надежности идентификации элементов стратификации и применимость предлагаемой методики.

**Ключевые слова:** субстанциональная производная, лагранжевы инвариант, ступенчатая структура.

**Введение.** Осреднение вертикальных профилей гидрофизических величин является одной из наиболее распространенных процедур в экспериментальной гидрофизике. Горизонтальное пространственное осреднение параметров вертикальной стратификации необходимо для описания статистических характеристик бассейнов и географического районирования океана. Временное осреднение выполняется для описания суточной, синоптической, сезонной, межгодовой и т. п. изменчивостей. Среднеклиматические распределения профилей плотности также используются в численных моделях океана (см., например, работы [1, 2]) для расчета изменчивости бароклинной составляющей поля скорости.

Еще одно важнейшее приложение процедуры осреднения – интерполяция данных: осреднение двух или более соседних вертикальных профилей (с необходимыми весовыми коэффициентами) дает промежуточное интерполированное распределение исследуемого параметра. Настолько частое использование процедуры осреднения профилей позволяет отнести ее к классу стандартных.

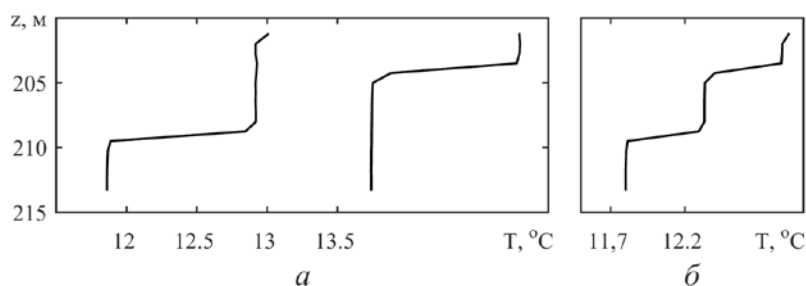
Говоря о средних характеристиках стратификации, следует иметь в виду, что для выполнения процедуры осреднения выборка данных должна ограничиваться набором профилей, в которых присутствуют все основные структурные элементы. Например, в выборках профилей для описания характеристик сезонного термоклина не должны одновременно содержаться данные летних и зимних (когда этот термоклин разрушен) зондирований.

**Недостатки традиционного метода осреднения.** Традиционно процедура осреднения вертикальных распределений гидрофизических парамет-

ров сводится к следующему. Для каждого выбранного горизонта глубин находится среднее значение исследуемого параметра. Именно такая процедура используется в одном из наиболее популярных пакетов численной обработки гидрофизических данных *GrADS* [3].

Однако тщательный анализ показывает, что характерные структурные особенности, присущие каждому индивидуальному профилю, могут существенно искажаться и даже полностью отсутствовать в результирующем среднем профиле, полученном традиционным методом.

Суть сказанного представлена на рис. 1. При осреднении двух профилей со ступенчатым распределением какого-либо параметра (например сезонного термоклина) в результирующем среднем профиле возможно появление двух ступеней вместо одной. Естественно, что при осреднении большего числа подобных профилей количество структурных особенностей может увеличиваться или, наоборот, особенности, присущие каждому индивидуальному профилю, могут полностью исчезнуть.



**Рис. 1.** Осреднение двух температурных профилей: *а* – фрагменты индивидуальных профилей (прографка оси абсцисс соответствует температуре, °C для левого профиля, значения температуры для правого профиля увеличены на 2°C); *б* – результат осреднения представленных профилей традиционным методом (осреднение осуществляется вдоль оси абсцисс)

Феномен эффекта расщепления и смазывания структурных особенностей аналогичен феномену, получаемому при стробоскопической съемке движущихся объектов. Как правило, количество объектов на результирующем снимке равно количеству стробоскопических вспышек либо индивидуальные особенности движущегося объекта полностью размыты.

В гидрофизике движение элементов жидкости по вертикали может быть обусловлено действиями внутренних волн. Пространственная изменчивость глубины залегания структурных особенностей может быть связана также с горизонтальными градиентами фоновой структуры (например вблизи фронтальных зон).

Математически эффект связан с тем, что изменчивость любого гидрофизического параметра  $\lambda$  описывается уравнением [4]

$$\frac{d\lambda}{dt} \equiv \frac{\partial\lambda}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\lambda = F + D, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(t)$  – скорость течения жидкости в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ ,

член  $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$  описывает явную зависимость от времени, а  $(\mathbf{u}\nabla)\lambda$  – влияние

пространственной изменчивости параметра  $\lambda$  в направлении течения на его временную изменчивость,  $F$  – функция источника/стока,  $D$  – слагаемое, связанное с диффузией. При этом оператор

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla) \quad (2)$$

называется субстанциональной, или индивидуальной производной. Если ограничиться рассмотрением движений только вдоль вертикальной координаты  $z$ , то оператор индивидуальной производной запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $w$  – вертикальная скорость.

Главное отличие операторов (2), (3) от временной производной для случая твердого тела – наличие последнего члена в уравнениях (2) и (3), который отражает изменение положения элементов жидкости в пространстве. Именно он обуславливает возникновение эффекта расщепления/смазывания структурных особенностей при традиционном методе осреднения пространственных распределений параметров в гидрофизике.

**Предлагаемая методика осреднения.** В связи с вышесказанным в процедуре осреднения по предлагаемой методике необходимо не только учитывать явную зависимость от времени исследуемого параметра, но и обеспечивать учет возможных вертикальных смещений структурных элементов жидкой среды. Достичь поставленной цели попытаемся в ходе поэтапного решения следующих задач:

- идентифицируем элементы жидкости (структуры) индивидуальных осредняемых профилей;
- рассчитаем осредненные глубины залегания этих элементов;
- для каждого элемента вычислим среднее значение исследуемого параметра, при этом будем считать, что оно соответствует рассчитанной средней глубине залегания этого элемента.

Для идентификации элементов вертикальной структуры столба жидкости желательно использовать какой-либо скалярный параметр среды, значение которого однозначно определяет элемент жидкости. Для этого необходимо, чтобы субстанциональная производная в уравнении (1) равнялась нулю. Такие скалярные параметры в гидрофизике называются лагранжевыми инвариантами. Их значения вдоль траектории перемещения частицы жидкости сохраняются.

Основное свойство лагранжева инварианта вытекает из его определения – он пассивно переносится движущейся жидкостью. То есть его значение остается постоянным для каждой индивидуальной частицы жидкости, а изменяется лишь ее местоположение.

В качестве такого инварианта при выводе теоремы Россби – Эртеля для потенциального вихря в работах [5, 6] использовались плотность для стратифицированного океана и потенциальная температура для атмосферы.

В случае стратифицированной жидкости поверхности постоянной плотности называются изопикническими. Они нигде не пересекаются и разделяют жидкость на слои. В идеальной жидкости (при отсутствии процессов диффузии/обмена) ее элементы никогда не пересекают изопикнические поверхности.

Необходимо отметить, что в реальном океане процессы обмена присутствуют всегда. В результате плотность элемента жидкости может меняться, вследствие чего он покидает свой изопикнический уровень. Поэтому плотность *in situ* не является истинным лагранжевым инвариантом.

Проанализируем, что можно предпринять для повышения надежности идентификации элементов стратификации. Для этого рассмотрим уравнение (1) для плотности. За счет процессов испарения/осадков и нагрева/охлаждения функция источника/стока  $F$  может быть отлична от нуля у поверхности и у дна моря. В стратифицированных же областях основной толщи именно отличие от нуля диффузионного члена  $D$  и приводит к нарушению лагранжевости. Для его аппроксимации в одномерном случае наиболее часто используют следующее соотношение:

$$D = \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – коэффициент обмена. Отметим, что представление диффузионного члена в этой форме оказывается приемлемым для большинства обменных процессов, будь то молекулярная диффузия, турбулентность, двойная диффузия и др.

Из соотношения (4) следует, что экстремальные значения  $D$  соответствуют областям с резкими изменениями градиента плотности или коэффициента обмена. В естественных условиях области с увеличенными значениями  $\alpha$  локализованы там же, где наблюдается изменчивость вертикального градиента. Например, максимальный сдвиг скорости поверхностных течений, способный породить неустойчивость, сосредоточен вблизи сезонного термоклина. Поэтому случай пространственной изменчивости коэффициента обмена мы специально рассматривать не будем.

Заметим, что влияние диффузии на инвариантность параметра идентификации определяется пространственной изменчивостью его градиента, которую можно существенно снизить предварительным сглаживанием. Поэтому в качестве идентификатора элементов структуры предлагается использовать вместо плотности *in situ* ее фоновое (вертикально осредненное) поле.

При выборе вертикального масштаба сглаживания желательно руководствоваться следующим: осреднение должно привести к максимальному снижению резких скачков градиента и при этом необходимо сохранить общую фоновую структуру поля плотности.

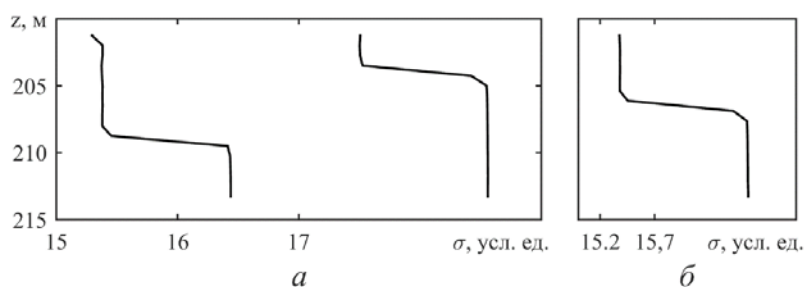
В океане существует два класса структур с ярко выраженными резкими скачками плотностного градиента – структуры ступенчатого и интрузионного типа. Для интрузий (в отличие от ступенчатых структур) характерно немонотонное вертикальное распределение температуры/солёности. Качественно поля плотности в обоих случаях идентичны. Это практически однородные слои толщиной в несколько десятков и даже сотен метров, разделенные высокоградиентными прослойками толщиной несколько метров.

Для описанных структур вертикальный масштаб фонового осреднения поля плотности должен быть больше, чем толщины высокоградиентных прослоек, и меньше, чем характерный масштаб квазиоднородных слоев. Если в структуре поля плотности отсутствуют выраженные особенности и его вертикальный градиент однороден, то диффузионный член мал, выбор масштаба осреднения не критичен и само осреднение теряет смысл.

Известно, что неоднородности в стратифицированном океане вытянуты преимущественно по горизонтали. Их горизонтальный масштаб на несколько порядков превышает вертикальный, в результате чего формируются элементы так называемой тонкой структуры. В том случае, когда речь идет о горизонтальном пространственном осреднении характеристик вертикальной стратификации, будем считать структуру неизменной во времени и зависящей только от горизонтальной и вертикальной координат.

При горизонтальном осреднении в качестве лагранжева инварианта для идентификации элементов вертикальной стратификации, как и в случае с временным осреднением, предлагается использовать фоновое значение плотности, осредненной по указанному выше вертикальному масштабу. Дополнительное преимущество такого выбора в обоих случаях выражается в том, что плотность жидкости, как правило, является монотонной функцией глубины. Следовательно, существует взаимно-однозначная связь глубины  $z$  и плотности  $\rho$ , предполагающая наличие обратной функции  $Z(\rho)$ .

Используя индивидуальные  $Z(\rho)$  для каждого профиля, можно рассчитать осредненные глубины залегания  $\langle Z \rangle$  различных элементов жидкости вертикальной структуры. Пример такого расчета представлен на рис. 2. Следует обратить внимание на качественное различие результатов осреднения, представленных на рис. 1, б и 2, б.

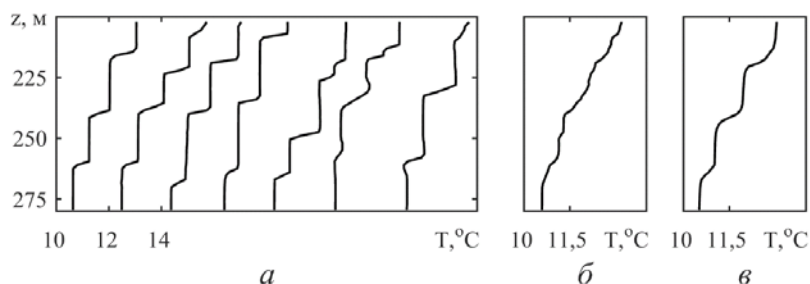


**Рис. 2.** Осреднение глубин залегания элементов стратификации для двух профилей плотности: *a* – фрагменты индивидуальных профилей плотности (прографка оси абсцисс соответствует условным единицам плотности (усл. ед.) для левого профиля, значения плотности для правого профиля увеличены на 2 усл. ед.); *б* – профиль средних значений глубин залегания изопикн (осреднение осуществляется вдоль оси ординат)

Наконец, в качестве среднего вертикального распределения искомого параметра будем использовать его среднее (в данном случае изопикническое) значение для каждого элемента жидкости, соответствующее средней глубине залегания этого элемента.

**Пример использования предлагаемой методики.** Преимущества предлагаемой методики по сравнению с традиционным подходом демонст-

рируются на рис. 3. В качестве исходных данных использован фрагмент разреза, выполненного в северо-западной части Тропической Атлантики между точками с координатами  $10,030^\circ$  с. ш.,  $49,875^\circ$  з. д. и  $10,355^\circ$  с. ш.,  $50,758^\circ$  з. д. Тонкая структура полей температуры и солености в этом районе характеризуется ступенчатым расслоением главного пикноклина, которое прослеживается на тысячи километров и обусловлено конвекцией солевых пальцев [7, 8].



**Рис. 3.** Осреднение серии температурных профилей, измеренных между точками с координатами  $10,030^\circ$  с. ш.,  $49,875^\circ$  з. д. и  $10,355^\circ$  с. ш.,  $50,758^\circ$  з. д.: *a* – фрагменты индивидуальных профилей (прографка оси абсцисс соответствует температуре,  $^\circ\text{C}$  для первого профиля, значения температуры для каждого последующего профиля увеличены на  $2^\circ\text{C}$ ); *б* – результат осреднения представленных профилей традиционным методом; *в* – результат осреднения по методике, предложенной в данной работе

На рис. 3, *a*, *б*, *в* показаны индивидуальные профили температуры, а также профили, осредненные традиционным способом и по предлагаемой методике. Обращает на себя внимание, что на среднем профиле, построенном традиционно, практически полностью отсутствуют структурные особенности (ступеньки) индивидуальных профилей. Тогда как на профиле, построенном по предлагаемой методике, они есть. Заметим, что результаты обработки профилей солености аналогичны.

Таким образом, средние вертикальные распределения гидрофизических параметров, сохраняя исходную структуру, содержат информацию о средних диапазонах глубин тонкоструктурных особенностей, среднем тепло- и соле-содержании однородных слоев. Традиционный подход этого не позволял.

Опыт использования этой методики для океана показывает, что для получения фоновой структуры, как правило, достаточен вертикальный масштаб 10 м, и даже во фронтальной зоне Гольфстрима он не превышает 20 м. Для представленных на рис. 3 данных масштаб составил 4,5 м. Его увеличение в 2 раза (для этого набора зондирований) не приводит к каким-либо количественным изменениям. Критерий выбора масштабов осреднения для получения фонового распределения поля плотности описан выше.

**Выводы.** Данная методика, разработанная на основе общих принципов термодинамики, применима также для осреднения параметров атмосферы и лабораторных экспериментов. Кроме того, использование плотности в качестве лагранжева инварианта не является обязательным. Главное преимущество такого выбора продиктовано ее монотонной зависимостью от глубины. Как и для океана, в случае наличия неоднородностей вертикального

градиента параметра, по которому производится идентификация элементов стратификации, можно использовать дополнительное фоновое осреднение. Вертикальный масштаб осреднения должен быть больше характерных размеров мелких неоднородностей (например высокоградиентных прослоек), но меньше масштабов фоновых неоднородностей (толщин квазиоднородных слоев). В случае отсутствия указанных неоднородностей градиента дополнительное осреднение не требуется.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blumberg A.F., Mellor G.L.* A description of a three-dimensional ocean circulation model // Three-Dimensional Coastal Ocean Models / Ed N.S. Heaps. – Washington, DC: American Geophysical Union, 1987. – 208 p.
2. *Mellor G.L.* User's Guide for a Three-dimensional, Primitive Equation, Numerical Ocean Model Version 1998. – Princeton: Princeton University, 1998. – 41 p.
3. *Doty B.* The Grid Analysis and Display System. GrADS V1.5.1.12, 1995. – <http://www.doty@cola.iges.org>.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
5. *Rossby C.-G.* Planetary flow patterns in the atmosphere // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. – 1940. – 66. – P. 68–87.
6. *Haynes P.H., McIntyre M.E.* On the evolution of vorticity and potential vorticity in the presence of diabatic heating and frictional or other forces // J. Atmos. Sci. – 1987. – 44(4), № 1. – P. 828 – 840.
7. *Охотников И.Н., Погребной А.Е.* Тонкая вертикальная структура на термохалинном фронте в области ступенчатого расслоения // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1993. – 28, № 12. – С. 1218 – 1222.
8. *Пантелеев Н.А., Козлов А.Н., Погребной А.Е.* О расчете вертикальных потоков плавучести, обусловленных конвекцией солевых пальцев // Океанология. – 1993. – 33, № 4. – С. 501 – 506.

## Calculation of average characteristics of water environment stratification

**А.Е. Pogrebnoy**

*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia  
e-mail: pogrebok57@mail.ru*

Problems arising at applying traditional procedure for averaging hydrophysical characteristics' vertical profiles are analyzed. The conclusion on necessity of taking into account vertical displacements of fluid elements is drawn. For this purpose, the Lagrangian invariants (particularly, the averaged background distribution of the density field) are proposed to be applied. It permits to calculate the averaged depths of the vertical structure various elements. The average value for each element corresponding to the average depth of this element is used as an average vertical distribution of a sought parameter. The means for increasing reliability of stratification elements' identification and applicability of the proposed method are discussed.

**Keywords:** substantial derivative, Lagrangian invariant, stepped structure.