УДК 551.465

Гамильтонова формулировка задачи об эволюции изолированного вихря на β-плоскости

© 2016 Г.К. Коротаев

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия
E-mail: korotaevgren@mail.ru

Поступила в редакцию 16.08.2016 г.

На основе «эллиптического приближения» проводится исследование эволюции одиночного синоптического вихря на β-плоскости. Применение «эллиптического приближения» позволило обобщить предложенную ранее теорию, дополнив уравнения, описывающие перемещение вихря инерционными слагаемыми. Показано, что выведенные эволюционные уравнения, записанные в неканонических переменных, имеют обобщенную гамильтонову форму. Анализ решений выведенных уравнений позволяет дать новую интерпретацию самодвижения вихря на β-плоскости, а также охарактеризовать высокочастотные колебания положения центра вихря, наблюдающиеся иногда в численных экспериментах.

Ключевые слова: интенсивный вихрь, β-плоскость, гамильтонов формализм.

Введение. Открытие синоптических вихрей в океане и построение вихреразрешающих моделей океанической циркуляции стимулировало исследования эволюции интенсивных вихрей на β-плоскости. Аналитические и численные исследования показали, что одиночный циклонический вихрь на β-плоскости движется на северо-запад под воздействием планетарной завихренности. В работах [1, 2] было показано, что в процессе движения вихрь формирует почти круговую зону захвата, в пределах которой частицы жидкости вовлекаются во вращательное движение вокруг его центра. Частицы жидкости в пределах зоны захвата для циклонического вихря имеют почти постоянную отрицательную завихренность. В работе [3] методом контурной динамики выполнены весьма аккуратные численные расчеты эволюции вихря, имеющего в начальный момент времени вид кругового пятна постоянной завихренности. Через некоторое время, с образованием зоны захвата, возникает конфигурация, которую приближенно можно описать как круговое пятно положительной завихренности, помещенное в также круговое пятно отрицательной завихренности. В соответствии с общими положениями теории, изложенной в работах [1, 2], суммарная завихренность такой конфигурации должна быть слегка больше нуля.

Численные расчеты долговременной эволюции одиночного синоптического вихря на β-плоскости показывают также (см., например, рис. 8 из работы [3]), что на плавное перемещение вихря накладываются более высокочастотные колебания его центра в окрестности генеральной траектории движения. При определенных параметрах вихря эти колебания сопровождаются деформацией почти круговой формы вихря, что объясняется неустойчивостью его конфигурации. Если же параметры вихря находятся вдали от критических, то почти круговая форма ядра вихря и зоны захвата сохраняется в процессе его перемещения, несмотря на высокочастотные колебания положения центра вихря. Простая конфигурация вихря позволяет использовать так называемую «эллиптическую аппроксимацию», развитую в работе [4], для более детального, нежели это представлено в работах [1, 2], описания эволюции синоптического вихря на β-плоскости. Ниже будет показано, что применение «эллиптической аппроксимации» позволит записать уравнения, описывающие зональный перенос вихря и относительно высокочастотные колебания его центра в гамильтоновой форме.

Во втором разделе статьи обсуждается предложенная модель и выводятся уравнения, описывающие эволюцию вихря. В третьем разделе показано, что выведенные уравнения имеют неканоническую гамильтонову форму. В четвертом разделе проводится анализ решений полученных уравнений. В заключение обсуждаются физические свойства решения.

Модель эволюции одиночного вихря. Рассмотрим следующую модель вихря на β-плоскости. Пусть в начальный момент времени вихрь имеет постоянную положительную завихренность ω_2 в пределах круга радиуса R_2. Как было показано в работе [1] и подтверждено численными расчетами в работах [2, 3], после смещения вдоль меридиана вихрь представляет собой почти круговое ядро положительной завихренности, окруженное зоной захвата, имеющей отрицательную завихренность и также почти круговую форму радиуса R_1. Основываясь на аргументах работы [1], будем считать, что относительная завихренность в пределах зоны захвата однородна и равна ω_1. Поскольку нет оснований полагать, что центры зоны захвата и ядра вихря совпадают, будем считать, что они имеют координаты X_1, Y_1 и X_2, Y_2 соответственно (ось X направлена на восток, ось Y – на север). Действие β-эффекта будем учитывать только в пределах зоны захвата. Вне зоны захвата будем полагать движение жидкости потенциальным, что допустимо, согласно [1], для интенсивного вихря (похожая схема учета β-эффекта в рамках «эллиптического приближения» была предложена Бернаром Легра в частной дискуссии). Мы также не будем принимать во внимание излучение вихрем волн Россби, рассматривая только взаимодействие вихря и зоны захвата. При таких условиях функцию тока можно представить в виде суммы $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где каждое из слагаемых находится из следующих уравнений:

$$\nabla^2\psi_1 = \begin{cases} \omega_1 - \beta(y - Y_1), \; r \le R_1, \\ 0, \; r > R_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\nabla^2\psi_2 = \begin{cases} \omega_2, \; r' \le R_2, \\ 0, \; r' > R_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $r^2 = (x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2$, $r'^2 = (x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2$.

Решения уравнений (1), (2) легко находятся:

$$\psi_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\omega_1(r^2 - R_1^2) - \dfrac{\beta}{8} r^2 (y - Y_1) + \dfrac{\beta R_1^2}{4}(y - Y_1), \ r \le R_1, \\ \dfrac{\omega_1 R_1^2}{2} \ln\left(\dfrac{r}{R_1}\right) + \dfrac{\beta R_1^4}{8r^2}(y - Y_1), \ r > R_1, \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\omega_2(r'^2 - R_2^2), \ r' \le R_2, \\ \dfrac{\omega_2 R_2^2}{2} \ln\left(\dfrac{r'}{R_2}\right), \ r' > R_2. \end{cases} \tag{4}$$

Используя идею работы [4], выпишем уравнения для перемещения границ ядра вихря и зоны захвата

$$S_i \frac{dX_i}{dt} = \oint_{\Gamma_i} \psi dx, \quad S_i \frac{dY_i}{dt} = \oint_{\Gamma_i} \psi dy, \tag{5}$$

где Γ_1 и S_1 – граница и площадь зоны захвата; Γ_2 и S_2 – граница и площадь ядра вихря. Подставляя (3), (4) в (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}(Y_2 - Y_1) - \frac{\beta R_1^2}{8}, \\ \frac{dY_1}{dt} &= -\frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}(X_2 - X_1), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= -\frac{1}{2}\omega_1(Y_2 - Y_1) - \frac{\beta R_1^2}{4} + \frac{\beta R_2^2}{8} + \frac{\beta}{8}\left[(X_2 - X_1)^2 + 3(Y_2 - Y_1)^2\right], \\ \frac{dY_2}{dt} &= \frac{1}{2}\omega_1(X_2 - X_1) - \frac{\beta}{4}(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Система уравнений (6), (7) замыкается уравнением сохранения абсолютной завихренности в пределах зоны захвата

$$\omega_1 + \beta Y_1 = \mathrm{const} \tag{8}$$

или, учитывая (6),

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \beta \frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}(X_2 - X_1). \tag{9}$$

Гамильтонова формулировка задачи. Уравнения (6), (7), (9) выведены в предположении, что как ядро вихря, так и зона захвата имеют круговую форму. Приближенное сохранение круговой формы ядра вихря и зоны захвата, очевидно, не будет нарушаться, только если смещение центров ядра и зоны захвата будет существенно меньше радиуса зоны захвата. Поэтому в правой части уравнения (7) целесообразно опустить квадратичные слагаемые как имеющие меньший порядок величины. Система уравнений (6), (7), (9) при этом приобретает гамильтонову форму с гамильтонианом

$$H(X_1,Y_1,X_2,Y_2,\omega_1)=\pi R_1^2\left\{\left[\frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}(Y_2-Y_1)-\frac{\beta R_1^2}{8}\right]^2+\left(\frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}\right)^2(X_2-X_1)^2\right\}+$$

$$+\frac{\pi R_1^2 R_2^2}{4}\omega_1\omega_2-\frac{\pi R_2^4}{8}\omega_1\omega_2+\frac{\pi R_1^4}{16}\omega_1^2. \tag{10}$$

Следует, однако, отметить, что система уравнений (6), (7), (9) записана с использованием неканонических координат и интеграл (8) является Казимиром. Соответствующая симплектическая матрица для системы уравнений (6), (7), (9) имеет следующий вид:

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\pi\omega_2 R_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\pi\omega_2 R_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\omega_1 R_1^2}{\pi\omega_2^2 R_2^4} & -\dfrac{\beta}{\pi\omega_2 R_2^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega_1 R_1^2}{\pi\omega_2^2 R_2^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\beta}{\pi\omega_2 R_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Легко проверить, что симплектическая матрица (11) удовлетворяет тождеству Якоби, а правая часть линеаризованных уравнений (6), (7), (9) является произведением симплектической матрицы на градиент гамильтониана. Физический смысл гамильтониана (10) и соответствие выведенных выше уравнений построенной ранее теории эволюции синоптического вихря на β-плоскости становятся очевидными после следующих преобразований уравнений (6), (7), (9). Введем $U=\dfrac{dX_1}{dt}$, $V=\dfrac{dY_1}{dt}$. Дифференцируя (6) по времени, получим

$$2\pi R_1^2\frac{dU}{dt}=\pi\omega_2 R_2^2\left(\frac{dY_2}{dt}-V\right)=-\pi(\omega_1 R_1^2+\omega_2 R_2^2)V\,, \tag{12}$$

$$2\pi R_1^2\frac{dV}{dt}=-\pi\omega_2 R_2^2\left(\frac{dX_2}{dt}-U\right)=$$

$$=\pi(\omega_1 R_1^2+\omega_2 R_2^2)U+\pi\omega_2 R_2^2\frac{\beta}{8}(2R_1^2-R_2^2)+\pi\omega_1 R_1^2\frac{\beta R_1^2}{8}. \tag{13}$$

Таким образом, для нахождения скорости движения центра зоны захвата и ее завихренности имеем следующую систему уравнений:

$$2\pi R_1^2\frac{dU}{dt}+\pi(\omega_1 R_1^2+\omega_2 R_2^2)V=0\,, \tag{14}$$

$$2\pi R_1^2 \frac{dV}{dt} - \pi(\omega_1 R_1^2 + \omega_2 R_2^2)U + \pi\omega_2 R_2^2 \frac{\beta}{8}(2R_1^2 - R_2^2) + \pi\omega_1 R_1^2 \frac{\beta R_1^2}{8} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\beta V. \quad (16)$$

Гамильтониан (10) также выражается через переменные системы уравнений (14) – (16)

$$H(U, V, \omega_1) = \pi R_1^2 (U^2 + V^2) + \pi\omega_1\omega_2 R_2^2 \frac{1}{8}(2R_1^2 - R_2^2) + \pi\omega_1^2 R_1^2 \frac{R_1^2}{16}. \quad (17)$$

Система уравнений (14) – (16) имеет гамильтонову форму с гамильтонианом (17), если ввести следующую симплектическую матрицу:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\pi(\omega_1 R_1^2 + \omega_2 R_2^2)}{(2\pi R_1^2)^2} & 0 \\ \dfrac{\pi(\omega_1 R_1^2 + \omega_2 R_2^2)}{(2\pi R_1^2)^2} & 0 & \dfrac{\beta}{\pi R_1^2} \\ 0 & -\dfrac{\beta}{\pi R_1^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Гамильтониан (17) представляется в виде суммы трех слагаемых. Первое и второе равны

$$E_1 = E_2 = \frac{\pi R_1^2}{2}(U^2 + V^2) \quad (19)$$

и представляют собой кинетическую энергию поступательного движения вихря и энергию присоединенной массы, возникающей при обтекании зоны захвата. Смысл последнего слагаемого в формуле (17) проясняется, если рассчитать энергию вращательного движения частиц жидкости в пределах зоны захвата. При этом достаточно сохранить только основные слагаемые в выражении для функции тока, пренебрегая различием в положении центров ядра вихря и зоны захвата. В таком приближении функция тока имеет следующий вид:

$$\psi \approx \psi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\omega_1(r^2 - R_1^2) + \dfrac{1}{4}\omega_2(r^2 - R_2^2), \; r \le R_2, \\ \dfrac{1}{4}\omega_1(r^2 - R_1^2) + \dfrac{\omega_2 R_2^2}{2}\ln\left(\dfrac{r}{R_2}\right), \; R_2 < r \le R_1. \end{cases} \quad (20)$$

Используя выражение (20), найдем

$$E_3 = \frac{1}{2}\iint (\nabla\psi)^2\, dS = \pi\int_0^{R_1} r\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 dr = \pi\int_0^{R_1}\frac{1}{4}\omega_1{}^2 r^3 dr +$$

$$+\frac{1}{2}\pi\omega_1\omega_2\int_0^{R_2} r^3 dr + \frac{1}{2}\pi\omega_1\omega_2 R_2^2\int_{R_2}^{R_1} dr + \mathrm{const}(t) =$$

$$= \frac{\pi\omega_1^2 R_1^4}{16} + \frac{\pi\omega_1\omega_2 R_2^4}{8} + \frac{\pi\omega_1\omega_2(R_1^2 - R_2^2)}{4} + \mathrm{const}(t), \qquad (21)$$

что дает последнее слагаемое в выражении для гамильтониана (17), если не принимать во внимание не зависящую от времени постоянную в формуле (21). Таким образом, гамильтониан (17) представляет собой энергию, как это следует из общей теории [5].

Представленная выше гамильтонова формулировка проблемы эволюции вихря на β-плоскости построена для изначально кругового вихря с постоянной завихренностью. Однако, основываясь на приведенной выше интерпретации гамильтониана как суммы энергий перемещения вихря и вращения частиц жидкости в пределах зоны захвата, а также энергии частиц жидкости, обтекающих зону захвата, оказывается возможным обобщить полученные выше результаты на случай, когда вихри имеют достаточно произвольную радиально-симметрическую изначальную форму. Функция тока в пределах зоны захвата приближенно имеет следующий вид:

$$\psi = \psi_0(r) + \frac{1}{4}\omega(r^2 - R^2),\ \ r \le R\,, \qquad (22)$$

где радиус зоны захвата и ее завихренность теперь обозначены как R и ω соответственно, а $\psi_0(r)$ – изначальная функция тока. Энергия вращения частиц жидкости в пределах зоны захвата задается выражением

$$E_3 = \frac{\pi\omega^2 R^4}{16} + \pi\omega\int_0^R r^2\frac{d\psi_0}{dr}dr + \mathrm{const}(t), \qquad (23)$$

и гамильтониан, представляющий собой энергию вихря, имеет вид

$$H = \pi R^2(U^2 + V^2) + \frac{\pi\omega^2 R^4}{16} + \pi\omega\int_0^R r^2\frac{d\psi_0}{dr}dr, \qquad (24)$$

а симплектическая матрица – та же, что и ранее:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\Gamma}{(2\pi R^2)^2} & 0 \\ \dfrac{\Gamma}{(2\pi R^2)^2} & 0 & \dfrac{\beta}{2\pi R^2} \\ 0 & -\dfrac{\beta}{2\pi R^2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (25)$$

где циркуляция на границе зоны захвата теперь задается выражением

$$\Gamma = \pi R^2 \omega + 2\pi R \frac{d\psi_0(R)}{dR}. \qquad (26)$$

Уравнения, описывающие эволюцию вихря, при этом принимают вид

$$2\pi R^2 \frac{dU}{dt} + \Gamma V = 0, \qquad (27)$$

$$2\pi R^2 \frac{dV}{dt} - \Gamma U + \beta \iint (\psi - \psi_\Gamma) dS = 0, \qquad (28)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\beta V, \qquad (29)$$

так как из уравнения (23) для энергии вращения и (22) для функции тока следует

$$\frac{dE_3}{d\omega} = -\iint (\psi - \psi_\Gamma) dS, \qquad (30)$$

где ψ_Γ – значение функции тока на границе зоны захвата.

Перемещение и осцилляции вихря. Уравнения (27), (28) представляют собой баланс момента количества движения и полностью соответствуют (за исключением слагаемых с производной по времени) уравнениям, описывающим движение вихря на β-плоскости, выведенным в работах [1, 2]. Слагаемые с производной во времени соответствуют изменению количества движения как самого вихря, так и присоединенной массы. Слагаемые, пропорциональные циркуляции на границе зоны захвата, представляют собой силу Жуковского, действующую на вихрь. Наконец, интеграл в уравнении (28) представляет собой компоненту силы Россби, возникающую благодаря β-эффекту. Соотношение (30) указывает, что роль силы Россби заключается в преобразовании энергии вращения в энергию поступательного движения. В отличие от работ [1, 2] уравнения (27), (28) не содержат силы волнового сопротивления, так как излучение волн Россби при движении вихря не учитывается в рассматриваемой модели. Неучет излучения волн Россби, естественно, исключает регулярное смещение вихря вдоль меридиана. В итоге рассматриваемая модель позволяет описать только зональное перемещение вихря и колебания центров зоны захвата и ядра вихря вокруг равновесного положения. Отметим, что именно применение метода работы [4] дает обоснование включения инерционных слагаемых в уравнения движения вихря для частного случая вихря с круговым ядром постоянной завихренности и позволяет обобщить этот результат на случай вихря произвольной конфигурации.

Система уравнений (27) – (29) имеет стационарное решение, отражающее баланс сил Жуковского и Россби и описывающее перемещение вихря. Меридиональная компонента скорости при этом оказывается равной нулю, и вихрь перемещается на запад. Зональная компонента скорости перемещения вихря U зависит от радиуса зоны захвата R и ее завихренности ω. Следуя идеям работ [1, 2] положим, что граница зоны захвата является сепаратриссой функции тока в подвижной системе координат, связанной с вихрем. Тогда из (3), (4) следует, что

$$\Gamma = \Gamma_0 = 4\pi Rc, \tag{31}$$

где $c = -U$ – величина скорости равномерного перемещения вихря. В таком случае уравнение (28) и формула (26) связывают скорость равномерного движения вихря c и его радиус R с завихренностью зоны захвата ω_0, которая пропорциональна меридиональному смещению вихря относительно его начального положения.

Вернемся к уравнениям (6), (7), (9), которые позволяют дать новую интерпретацию зональному самоперемещению вихря. Нетрудно убедиться, что стационарное перемещение ядра вихря и зоны захвата может происходить только в зональном направлении таким образом, что центры зоны захвата и ядра вихря должны быть расположены на одном меридиане, а завихренность зоны захвата не должна меняться во времени, $\omega_1 = \omega_1^0$. В итоге уравнения (6), (7), (9) сводятся к двум уравнениям

$$\begin{aligned} -c &= \frac{\omega_2 R_2^2}{2R_1^2}(Y_2 - Y_1) - \frac{\beta R_1^2}{8}, \\ -c &= -\frac{1}{2}\omega_1(Y_2 - Y_1) - \frac{\beta R_1^2}{4} + \frac{\beta R_2^2}{8}. \end{aligned} \tag{32}$$

Исключая скорость движения вихря c из уравнений (32), найдем, что

$$\frac{\omega_1 R_1^2 + \omega_2 R_2^2}{R_2^2}(Y_2 - Y_1) + \frac{\beta R_1^2}{4} - \frac{\beta R_2^2}{4} = 0$$

и, таким образом, центр ядра вихря смещен к югу относительно центра зоны захвата. За счет этого и вклада β-эффекта и происходит самодвижение вихря на запад.

Рассмотрим теперь характеристики колебаний центров ядра вихря и зоны захвата. Заметим, прежде всего, что циркуляцию Г, входящую в уравнения (27), (28) в силу (26) и (31), можно представить в виде следующей функции завихренности зоны захвата:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \pi R^2(\omega - \omega_0). \tag{33}$$

Аналогичным образом условие равномерного движения вихря, следующее из уравнения (28), с учетом (23) дает

$$\frac{dE_3}{d\omega} = -\iint(\psi - \psi_\Gamma)dS = \frac{\pi(\omega - \omega_0)R^4}{8} - \frac{c\Gamma_0}{\beta}. \tag{34}$$

Отметим, что радиус вихря во всех приведенных формулах не меняется во времени, так как частота колебаний предполагается много большей характерного времени эволюции вихря.

Уравнения (27), (28) с учетом (33), (34) имеют вид

$$2\pi R^2 \frac{dU}{dt} + \left(\Gamma_0 + \pi R^2 (\omega - \omega_0)\right) V = 0, \qquad (35)$$

$$2\pi R^2 \frac{dV}{dt} - \left(\Gamma_0 + \pi R^2 (\omega - \omega_0)\right) U + c\Gamma_0 - \beta \frac{\pi(\omega - \omega_0) R^4}{8} = 0, \qquad (36)$$

образуя вместе с (29) замкнутую систему уравнений. Комбинируя (29) и (35), найдем

$$U = -c + \frac{2c}{\beta R}(\omega - \omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\beta}. \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (35) и используя еще раз (29), получим для описания колебаний нелинейное уравнение, которое можно проинтегрировать в эллиптических функциях. Ограничимся здесь замечанием, что из линеаризованного уравнения находится частота малых осцилляций скоростей движения вихря σ:

$$\sigma^2 = 4\frac{c^2}{R^2} - \frac{\beta c}{2} + \left(\frac{\beta R}{4}\right)^2 . \qquad (38)$$

Полученное выражение для частоты колебаний центров вихря и зоны захвата было бы интересно сопоставить с результатами численных расчетов.

Заключение. Применение «эллиптического приближения» [4] для исследования эволюции одиночного синоптического вихря на β-плоскости позволило обобщить предложенную ранее теорию, дополнив баланс сил, действующих на вихрь, инерционным слагаемым. Показано, что выведенные эволюционные уравнения имеют гамильтонову форму, если учесть неканоничность используемого набора переменных. Эволюционные уравнения, описывающие движение ядра вихря и центра зоны захвата для частного случая изначально кругового вихря с постоянной завихренностью, представлены в двух формах записи: «лагранжевой», когда наряду с завихренностью зоны захвата переменными являются координаты центра ядра вихря и зоны захвата, и «эйлеровой», когда переменными являются компоненты скорости движения вихря и завихренность зоны захвата. Анализ «лагранжевого» решения позволяет дать интерпретацию самодвижения вихря на β-плоскости, не основанную на балансе сил. Оказывается, что центры ядра вихря и зоны захвата смещены вдоль меридиана и их синхронное перемещение аналогично поступательному движению пары точечных вихрей одинаковой интенсивности, но разных знаков.

Включение в уравнения эволюции вихря инерционных слагаемых приводит к возможности развития высокочастотных осцилляций скорости перемещения вихря, реально наблюдающихся в численных экспериментах. Представленная теория позволяет рассчитать частоту таких колебаний.

В настоящем исследовании сознательно не принимался во внимание процесс излучения волн Россби движущимся вихрем. Если описывать только плавную эволюция вихря, при которой инерционные слагаемые несущественны, учет влияния излучения волн Россби достигается включением в общий баланс сил силы волнового сопротивления, рассчитанной в [1, 2]. Однако осцилляции центра зоны захвата могут изменить условия излучения, так что более полная задача требует дополнительного исследования.

Отметим, наконец, что в настоящей работе мы использовали фактически «круговое приближение», а не «эллиптическое» для формы ядра вихря и зоны захвата. Представляется интересным, несмотря на громоздкость выкладок, рассмотреть более гибкую эллиптическую аппроксимацию, которая может дать оценки устойчивости вихря.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2014-0011 «Исследования закономерностей изменений состояния морской среды на основе оперативных наблюдений и данных системы диагноза, прогноза и реанализа состояния морских акваторий» (шифр «Оперативная океанография»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коротаев Г.К.* Асимптотический режим динамики интенсивного баротропного вихря // Морские гидрофизические исследования. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – №1 (88). – С. 5 – 18.
2. *Korotaev G., Fedotov A.* Dynamics of an isolated barotropic eddy on a beta-plane // J. Fluid Mech. – 1994. – 264. – P. 277 – 301.
3. *Lam J.S.-L., Dritschel D.G.* On the beta-drift on an initially circular vortex patch // Ibid. – 2001. – 436. – P. 107 – 129.
4. *Legras B., Dritschel D.G.* The elliptic model of two-dimensional vortex dynamics. I: The basic state // Phys. Fluid A. – 1991. – 3, № 5. – P. 845 – 854.
5. *Shepherd T.G.* Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structures in geophysical fluid dynamics // Adv. Geoph. – 1990. – 32. – P. 287 – 338.

Hamiltonian formulation of the problem of a single vortex evolution on a beta-plane

G.K. Korotaev

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
e-mail: korotaevgren@mail.ru

Based on the “elliptical approach”, evolution of a single synoptic vortex on the β-plane is studied. Application of the “elliptical approach” permits to generalize the earlier-proposed theory having expanded the equations describing vortex motion by the inertia force. It is shown that the deduced evolution equations written down using non-canonical variables are of the generalized Hamiltonian form. Being analyzed, the deduced equations’ solutions both allow new interpretation of the vortex self-motion on the β-plane and permit to characterize high-frequency oscillations of the vortex center position sometimes arising in the numerical experiments.

Keywords: intensive vortex, β-plane, Hamiltonian formalism.