

## Ассимиляция данных наблюдений в адаптивной модели морской экосистемы при известных средних значениях процессов в морской среде

© 2017 И. Е. Тимченко, И. П. Лазарчук\*, Е. М. Игумнова

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

*\*E-mail: lazarchuk.syst.analysis@mhi-ras.ru*

Поступила 30.01.2017 г.

Рассмотрена ассимиляция данных наблюдений в адаптивных моделях морских экосистем, построенных методом адаптивного баланса влияний. Показано, что используемый в уравнениях этого метода баланс обратных связей между переменными экосистемы и скоростями их изменения позволяет ввести стационарное состояние экосистемы, характеризующееся наблюдаемыми средними значениями переменных. Предложен метод оценки нормированных коэффициентов влияний, основанный на применении теоремы Эйлера об однородных функциях к функциям, представляющим материальные балансы биохимических реакций превращения веществ. Показано, что в качестве оценок производных от продуктов реакций по их ресурсам, входящим в уравнения материальных балансов, могут быть использованы нормированные отношения средних значений моделируемых процессов. Построен пример одномерной адаптивной модели экосистемы верхнего слоя моря, имеющей в основе схему причинно-следственных связей из модели планктонной динамики и круговорота азота Фэшема, Даклоу и МакКельви. Показано, что ассимиляция данных наблюдений в подобной модели происходит путем автоматической адаптации переменных модели к усваиваемой информации при условии сохранения материальных балансов в реакциях превращения веществ. В этой модели выполнена ассимиляция имитированных данных наблюдений концентрации хлорофилла  $a$  и расчетных данных о динамике морской среды. Построены временные сценарии биохимических процессов, подтверждающие применимость предложенного метода оценки коэффициентов влияний по отношениям средних значений моделируемых процессов.

**Ключевые слова:** метод адаптивного баланса влияний, ABC-метод, адаптивные модели, морская экосистема

DOI: 10.22449/0233-7584-2017-5-79-96

### Введение

Растущий объем информации о процессах в верхнем слое моря, обусловленный развитием численного моделирования физических характеристик морской среды [1] и спутниковым мониторингом морской поверхности [2, 3], открывает перспективы оперативного контроля над сценариями тех процессов, которые не наблюдаются непосредственно. Поскольку ненаблюдаемые процессы связаны с наблюдаемыми процессами известными из опыта зависимостями, общая система уравнений математической модели морской среды дает возможность рассчитывать сценарии всех моделируемых процессов.

В экосистемах верхнего слоя моря на фоне динамических процессов развиваются сложные биохимические взаимодействия веществ и живых объектов [4, 5]. Основная проблема моделирования экосистем заключается в параметризации причинно-следственных зависимостей между переменными модели: приходится привлекать огромное количество эмпирических связей

и коэффициентов, которые существенно усложняют уравнения модели и приводят к неизбежным погрешностям в результатах моделирования.

Ассимиляция данных наблюдений в моделях экосистем необходима для того, чтобы приблизить модельные оценки сценариев процессов к реальности. Этой цели служат вероятностные и вариационные методы усвоения данных наблюдений в численных моделях динамики океана [6 – 10]. В ряде исследований уравнения переноса и диффузии веществ в численных моделях морских экосистем дополнены функциями источников и стоков, описывающими химико-биологические реакции между ними. Данный подход позволяет усваивать наблюдения химико-биологических процессов непосредственно в уравнениях численных моделей морской среды. Однако такой подход приводит к сложным моделям морских экосистем, содержащим уравнения в частных производных типа реакция – адвекция – диффузия [2, 5, 11].

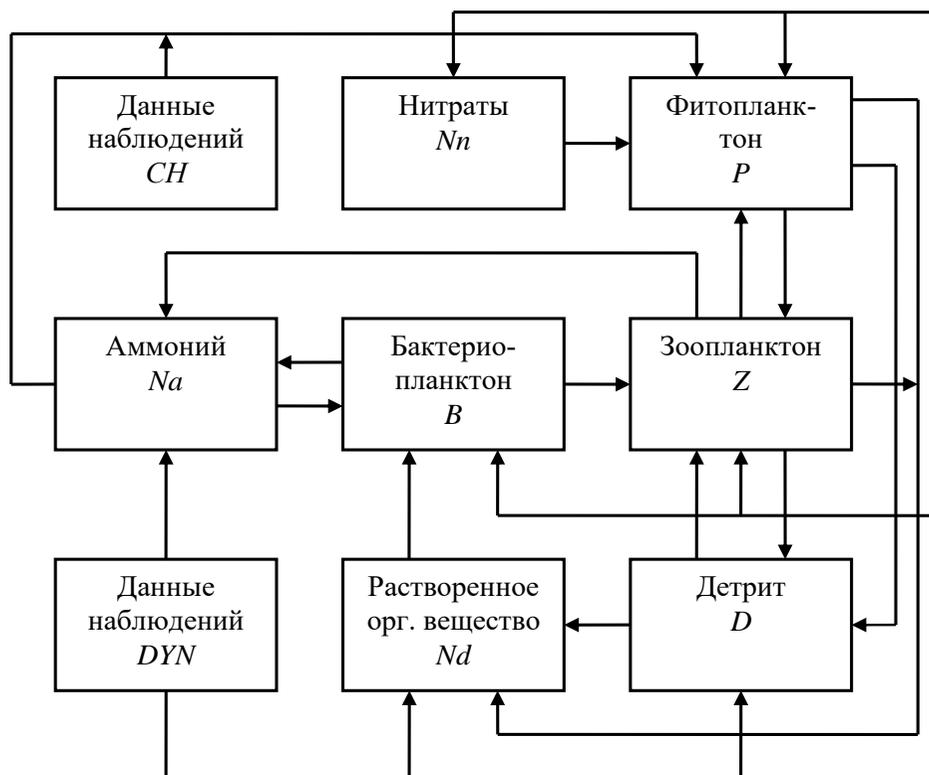
Задача слежения за динамикой процессов в морских экосистемах упрощается, когда накоплены архивные данные наблюдений, которые могут быть использованы в более простых адаптивных моделях морских экосистем [12 – 15]. В этих моделях реакции преобразования химических и биологических веществ описываются коэффициентами влияний, определяемыми по данным наблюдений. Ассимиляция данных наблюдений в адаптивных моделях экосистем сводится к автоматической подстройке переменных экосистемы к внешним влияниям, в качестве которых используются результаты расчетов переноса и диффузии веществ, а также результаты текущих наблюдений биохимических процессов. Если позволяет объем накопленной информации, сложная система функций, описывающих связи между биохимическими процессами, может быть заменена более простой системой коэффициентов влияний адаптивной модели экосистемы.

В настоящей работе рассматривается подобный упрощенный подход к ассимиляции данных наблюдений в адаптивной модели морской экосистемы. Целью работы явилась проверка принципиальной возможности ассимиляции наблюдений в адаптивной модели экосистемы, когда имеется минимальный объем априорной информации о реальных биохимических процессах в морской среде. Предполагалось, что известны лишь знаки влияний одних процессов на другие и средние значения этих процессов. Для выполнения указанной проверки использованы вычислительные эксперименты, проведенные с адаптивным вариантом упрощенной модели планктонной динамики и круговорота азота, предложенной в работе [16].

**Адаптивный подход к моделированию динамических процессов в морских экосистемах.** Этот подход отличается применением сбалансированных обратных связей в уравнениях биохимических переменных модели экосистемы. Как известно, обратные связи ставят скорость изменения процессов в зависимость от самих процессов. Если моделируемая переменная экосистемы попадает в выражение для функции источника в правой части уравнения, то имеет место положительная обратная связь, если в функцию стока – отрицательная. Обычно моделируемые переменные включаются в функции источников и стоков в правой части уравнений динамической модели морской среды без каких-либо дополнительных условий, балансирую-

щих положительные и отрицательные обратные связи в каждом из уравнений модели. Эти условия заменяет принцип глобального баланса обратных связей, который характерен для традиционных моделей морских экосистем.

Так, например, в известной модели планктонной динамики и круговорота азота, разработанной Фэшем, Даклоу и МакКельви [16], гидрохимические процессы в верхнем перемешанном слое моря представлены семью компонентами экосистемы: концентрациями фитопланктона ( $P$ ), зоопланктона ( $Z$ ), бактерий ( $B$ ), азота нитратов ( $Nn$ ), азота аммония ( $Na$ ), растворенного органического азота ( $Nd$ ) и детрита ( $D$ ). Схема причинно-следственных связей, основанная на этой модели, приведена на рис. 1.



**Рис. 1.** Схема причинно-следственных связей между переменными экосистемы, основанная на модели Фэша, Даклоу и МакКельви [16].  $CH$  – наблюдения концентрации хлорофилла  $a$ , усваиваемые в блоке фитопланктона  $P$ ;  $DYN$  – данные о динамике морской среды, усваиваемые в остальных блоках

Гидродинамическая часть модели описывает сезонные изменения глубины перемешанного слоя, от которых зависит концентрация моделируемых субстанций. Так, в режиме вовлечения под действием усиливающегося приводного ветра концентрация моделируемых веществ в верхнем слое уменьшается, что эквивалентно увеличению значений функций стоков в соответствующих уравнениях дифференциальной модели экосистемы. Обратное явление – увеличение значений функций источников – наблюдается при

уменьшении глубины перемешанного слоя, когда концентрация веществ возрастает.

В рассматриваемой работе функции, учитывающие динамику морской среды под действием приводного ветра, были включены в модель биохимических процессов, представленную обыкновенными дифференциальными уравнениями. В частности, уравнение для концентрации фитопланктона в этой модели имело следующий вид [16]:

$$\frac{dP}{dt} = (1 - \gamma_1)\sigma(t)P - G_1 - \mu_1 P - \frac{(m + h^+(t))P}{M},$$

где:  $\gamma_1$  – доля общей первичной продукции, преобразованной фитопланктоном в растворенное органическое вещество;  $\sigma(t)$  – среднесуточная удельная скорость роста фитопланктона,  $G_1$  – скорость потребления зоопланктоном фитопланктона  $P$ ;  $\mu_1$  – удельная скорость естественной смертности фитопланктона,  $m + h^+(t)$  – скорость вертикального обмена через границу однородного слоя,  $h^+(t) = \max[h(t), 0]$ ;  $M(t)$  – глубина перемешанного слоя.

Рассмотрим положительные и отрицательные обратные связи в этом уравнении. Первое слагаемое представляет собой функцию источника, которая связана положительной обратной связью первого порядка со скоростью изменения концентрации фитопланктона  $P$ . Второе и третье слагаемые являются функциями стока, связывающими концентрацию  $P$  отрицательными обратными связями первого порядка со скоростью ее изменения. Последнее слагаемое представляет собой внешнее влияние на концентрацию фитопланктона, обусловленную динамикой толщины верхнего перемешанного слоя.

Положительные и отрицательные обратные связи в этом уравнении не являются сбалансированными, поскольку коэффициенты, стоящие перед функцией  $P$  в правой части уравнения, не связаны между собой какими-либо дополнительными соотношениями. Поэтому неточности при задании балансов функций источников и стоков, вызванные погрешностями параметризации этих коэффициентов, могут приводить к неустойчивости решений. Аналогичные выводы следуют из анализа остальных уравнений модели, поскольку в каждом из них присутствуют как положительные, так и отрицательные обратные связи и нет дополнительных условий, балансирующих их влияние. Общий баланс преобразования химических и биологических ресурсов в продукты экосистемы обеспечивается путем объединения всех уравнений в систему и тщательного подбора параметризаций внутрисистемных связей.

При адаптивном подходе к моделированию экосистем баланс обратных связей автоматически устанавливается в каждом из уравнений модели экосистемы, что позволяет заменить, когда это возможно, сложные параметризации причинно-следственных зависимостей между процессами на коэффициенты влияний, оцениваемые по данным наблюдений. Таким образом определяется роль априорной информации, используемой в адаптивных моделях экосистем. Кроме того, упрощается задача совместного описания динамиче-

ских и биохимических процессов, так как в численной модели экосистемы производится локальная (в пределах ячейки расчетной сетки) подстройка переменных экосистемы к внешнему влиянию адвекции и диффузии веществ. Эта подстройка также автоматически контролируется обратными связями, которые удерживают переменные модели в заданных пределах их естественной изменчивости. Следствием являются быстрая сходимость и устойчивость алгоритмов численного решения уравнений экосистемы.

**Метод построения адаптивных моделей морских экосистем.** Адаптивными моделями в данном исследовании называются модели причинно-следственных связей между переменными сложной системы, формализованные методом адаптивного баланса влияний (*ABC*-методом) [12]. В этом методе применяются отрицательные обратные связи второго порядка между переменными модели и скоростями их изменения, содержащиеся в каждом из модульных уравнений метода.

Пусть для описания процессов в экосистеме использовано множество взаимосвязанных процессов, представляемых функциями  $0 \leq u_i \leq 2C_i$ , которые отвечают поставленной цели моделирования, где  $C_i$  – средние значения процессов. Переменные  $u_i$  оказывают внутрисистемные влияния друг на друга в соответствии с причинно-следственными связями, которые предполагаются известными. Эти связи формируют материальные балансы моделируемых субстанций, которые могут быть представлены соотношением:

$$u_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j + A_i, \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  – коэффициенты внутрисистемных влияний;  $n$  – число переменных;  $A_i$  – внешние влияния, приложенные к экосистеме. Внутрисистемные влияния выражают собой реакции преобразования ресурсов  $u_j$  в продукты  $u_i$ . В результате данных реакций происходит приращение или уменьшение количества продукта на то число единиц, которое обеспечено имеющимся количеством ресурсов и условиями прохождения реакции.

*ABC*-метод основан на следующих предположениях:

1. Существует стационарное состояние равновесия экосистемы, в котором при отсутствии внешних влияний переменные модели экосистемы в соотношении (1) принимают свои средние значения:

$$C_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} C_j. \quad (2)$$

Стационарное состояние  $\{C_i\}$  адаптивной модели системы процессов  $\{u_i\}$  определяется заданием значений коэффициентов влияний  $\{a_{ij}\}$ . Эти значения сохраняются при осреднении выражений (1).

2. Внешние воздействия на экосистему не изменяют ее стационарное состояние, а лишь приводят к отклонениям переменных  $u_i$  от их средних значений  $C_i$ .

3. Переменные экосистемы адаптируются к внешним влияниям таким образом, что сохраняются материальные балансы внутрисистемных  $\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j\right)$  и внешних ( $A_i$ ) реакций взаимодействия веществ (1) в форме приращений количества продуктов реакций по отношению к их средним значениям  $C_i$ :

$$u_i = C_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j + A_i. \quad (3)$$

Переменные экосистемы непрерывно подстраиваются под внешние влияния, адаптируясь к ним в пределах своих интервалов изменчивости  $0 \leq u_i \leq 2C_i$ .

Введенные предположения означают, что экосистема обладает устойчивостью по отношению к внешним влияниям  $A_i$  и возвращается в свое стационарное состояние всякий раз, когда исчезают внешние влияния. Следовательно, применимость *ABC*-метода ограничена тем случаем, когда экосистема устойчива и внешние влияния не изменяют ее структуру.

В работах [12 – 15] показано, что система уравнений метода адаптивного баланса построена таким образом, чтобы сохранялись динамические балансы масс моделируемых субстанций (1). С этой целью предложена следующая общая (модульная) структура уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = r_i u_i [F_i^- - F_i^+], \quad (4)$$

в которой  $r_i$  – удельные скорости изменения переменных;  $F_i^-$  – монотонно убывающий, а  $F_i^+$  – монотонно растущий базовые функционалы, аргументами которых являются разности значений левой и правой частей уравнений динамических балансов (1). Функционалы связаны между собой дополнительными условиями:  $F_i^- + F_i^+ = 2C_i$ , которые балансируют обратные связи в уравнениях модели (4) с учетом ресурсного лимитирования внутрисистемных реакций  $u_i \leq 2C_i$ . В частности, функционалы  $F_i^+$  могут быть определены следующим образом:

$$F_i^+ = F_i^+(u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j - A_i) = u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j - A_i.$$

Тогда имеет место следующая модульная система логистических уравнений адаптивной модели:

$$\frac{du_i}{dt} = 2r_i u_i \left[ C_i - \left( u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j - A_i \right) \right], \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что нетривиальные решения системы уравнений (5) удовлетворяют условию (3).

Для того чтобы внутрисистемные и внешние влияния не выводили переменные модели за пределы областей их изменчивости  $0 \leq u_i \leq 2C_i$ , ставятся следующие дополнительные ограничения:

$$\left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j \right| \leq C_i, \quad (6)$$

$$u_i = IF[u_i < 0; 0; IF(u_i > 2C_i; 2C_i; u_i)]. \quad (7)$$

Отрицательные обратные связи второго порядка стабилизируют численное решение системы уравнений (5), что, в свою очередь, обеспечивает быстрое приспособление значений переменных модели друг другу и к внешним влияниям.

Основной проблемой практического применения адаптивных моделей морских экосистем является определение коэффициентов влияний  $a_{ij}$  по данным наблюдений. К настоящему времени разработан ряд подходов к решению этой проблемы [12 – 15]. В данном исследовании мы остановимся на способе оценки коэффициентов влияний, основанном на предположении о том, что они сохраняют свои значения при осреднении балансовых соотношений (1), т. е. при переводе экосистемы в стационарное состояние (2), поскольку коэффициенты  $a_{ij}$  показывают, какая часть ресурсов  $u_j$  преобразуется в продукты  $u_i$ .

**Ассимиляция данных наблюдений путем оценки коэффициентов влияний по средним значениям переменных экосистемы.** Данные наблюдений биохимических процессов и расчетные данные о динамике морской среды являются факторами внешнего влияния по отношению к адаптивным моделям морских экосистем. Ассимиляция содержащейся в наблюдениях информации означает адаптацию переменных модели к внешним влияниям, которые непосредственно включаются в соответствующие уравнения адаптивной модели (5) в качестве дополнительных функций источников и стоков  $A_i$ . Поэтому проблема ассимиляции состоит в инициализации коэффициентов влияний на основе той информации о моделируемых процессах, которая заключена в наблюдениях.

Если известны значения переменных, то для оценки коэффициентов влияния в системе уравнений (5) можно использовать гипотезу об однородности функций, представляющих материальные балансы внутрисистемных реакций (1) и применить к ним теорему Эйлера об однородных функциях [17]. Согласно этой теореме, если  $t$  – некоторый параметр и имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n u_i(tu_j) = t \sum_{i=1}^n u_i(u_j),$$

$$\text{то } u_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial u_j} u_j.$$

В этом случае в качестве коэффициентов влияний  $a_{ij}$  в ABC-модели системы (5) могут быть использованы частные производные  $\partial u_i / \partial u_j$  и система уравнений принимает следующий общий вид:

$$\frac{du_i}{dt} = 2u_i \left[ C_i - \left( u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\partial u_i}{\partial u_j} u_j - A_i \right) \right], \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Если имеются архивные наблюдения осредненных процессов  $\bar{u}_i$  и  $\bar{u}_j$ , значения отношений  $\partial \bar{u}_i / \partial \bar{u}_j$  определяются по сценариям этих процессов, осредненным с некоторым масштабам. В рассматриваемом случае, когда предполагаются известными только средние значения процессов  $C_i$ , в качестве коэффициентов влияний в системе уравнений (5) можно использовать приближенные оценки. Отношение наблюдаемых средних значений  $C_i / C_j$  характеризует среднюю скорость изменения продуктов реакций  $u_i$  по отношению к ресурсам  $u_j$ . Поэтому при отсутствии внешних влияний балансовое соотношение (3) можно выразить следующим образом:

$$u_i = C_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n a'_{ij} \frac{C_i}{C_j} u_j \quad (8)$$

В формуле (8) коэффициенты  $a'_{ij}$  являются безразмерными величинами, а роль производных  $\partial u_i / \partial u_j$  выполняет отношение средних значений  $C_i / C_j$ . Для того чтобы при подобной аппроксимации внутрисистемных влияний исключить нарушение устойчивости решений системы уравнений (5), должна быть выполнена нормировка коэффициентов  $a'_{ij}$ . В соответствии с условиями (6) – (7) устойчивость решений будет гарантирована, если каждая из сумм положительных и отрицательных коэффициентов влияний не превышает 0,5. Предположим, что в уравнении для переменной  $u_i$  модели экосистемы содержится  $m$  положительных и  $n - m$  отрицательных влияний ресурсов  $u_j$ . Тогда из неравенства (6) следует, что коэффициенты положительных  $a'_{ij}^+$  и отрицательных  $a'_{ij}^-$  влияний в системе уравнений (5) должны удовлетворять условиям

$$a'_{ij}^+ \leq \frac{1}{2m}, \quad (1 \leq j \leq m); \quad a'_{ij}^- \leq \frac{1}{2(n-m)}, \quad (m+1 \leq j \leq n). \quad (9)$$

Отсюда для случая, когда имеется  $m$  положительных и  $n - m$  отрицательных влияний, балансовое соотношение (8) может быть представлено следующим образом:

$$u_i = C_i + \frac{C_i}{2m} \sum_{j=1, j \neq i}^m C_j^{-1} u_j - \frac{C_i}{2(n-m)} \sum_{j=m+1, j \neq i}^n C_j^{-1} u_j. \quad (10)$$

С учетом выражения (10) система уравнений  $ABC$ -модели (5) принимает вид

$$\frac{du_i}{dt} = 2r_i u_i \left\{ C_i - \left[ u_i - \frac{C_i}{2m} \sum_{j=1, j \neq i}^m C_j^{-1} u_j + \frac{C_i}{2(n-m)} \sum_{j=m+1, j \neq i}^n C_j^{-1} u_j - A_i \right] \right\}. \quad (11)$$

Для того чтобы учесть ресурсное лимитирование процессов роста, например, в группе процессов  $ABC$ -модели экосистемы  $\{u_p\}$  ( $m+1 \leq p \leq s$ ), в уравнении (11) необходимо использовать логические операторы  $AG_i \arg \min(a_{im+1}u_{m+1}, \dots, a_{is}u_s)$  [3, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} = & 2r_i u_i \left\{ C_i - \left[ u_i - \frac{C_i}{2m} \sum_{j=1, j \neq i}^m C_j^{-1} u_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - AG_i \arg \min(a_{im+1}u_{m+1}, \dots, a_{im+s}u_{m+s}) + \frac{C_i}{2(n-s-1)} \sum_{j=s+1, j \neq i}^n C_j^{-1} u_j - A_i \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$AG_i \arg \min(a_{im+1}u_{m+1}, \dots, a_{is}u_s) = IF(a_{ip}u_p = M_p; a_{ip}u_p; 0),$$

$$M_p = \min(a_{im+1}u_{m+1}, \dots, a_{is}u_s);$$

$$a_{ip} = \frac{C_i}{2s} C_p^{-1}.$$

Если рассматривать временные сценарии переменных экосистемы в отдельной точке морской среды в дискретные моменты времени  $t_k$ , разделенные интервалами  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ , то система уравнений  $ABC$ -модели экосистемы (5) может быть представлена в конечных разностях по методу Эйлера:

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^k + 2\Delta t r_i u_i^k \left[ C_i - \left( u_i^k - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j^k - A_i^k \right) \right] = \\ &= u_i^k + 2\Delta t r_i u_i^k C_i - 2\Delta t r_i u_i^k \left( u_i^k - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j^k - A_i^k \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Для этих разностных уравнений удобно принять дополнительное условие  $2\Delta t r_i C_i = 1$ . Тогда уравнение (12) упрощается:

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k \left[ 1 - \frac{1}{2C_i} \left( u_i^k - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j^k - A_i^k \right) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, предлагаемый метод ассимиляции данных наблюдений сводится к включению в уравнения адаптивной модели для переменных  $u_i$  наблюдаемых значений внешних влияний  $A_i$ , приведенных к интервалам  $(-C_i \leq A_i \leq C_i)$ . Ввиду погрешностей коэффициентов влияний, оцениваемых по отношениям средних значений с нормировкой по формулам (9), конечно-разностные уравнения (13) будут давать отклонения сценариев процессов от некоторых (условных) средних значений  $C_i^*$ , которые отличаются от наблюдаемых средних значений  $C_i$ . Однако из рассмотренных свойств ABC-метода известно, что внешние влияния, имеющие нулевые средние значения, не изменяют стационарное состояние системы уравнений модели  $\{C_i\}$ . Поэтому в рассчитываемые сценарии процессов в экосистеме легко внести поправки, устраняющие различие между фактическими и условными средними значениями.

**Ассимиляция данных наблюдений в адаптивном варианте модели морской экосистемы.** В качестве примера использования предлагаемого метода рассмотрим ассимиляцию данных наблюдений в адаптивном варианте модели морской экосистемы, основанном на упрощенной схеме причинно-следственных связей модели [16], изображенной на рис. 1. Для системы ABC-уравнений этой модели, подставляя соответствующие функции влияний в системе уравнений (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 2r_P P \{C_P - [P - a_{P/N_a} N_a - a_{P/N_n} N_n + a_{P/Z} Z - F(CH) - DYN(P)]\}, \\ \frac{dZ}{dt} &= 2r_Z Z \{C_Z - [Z - a_{Z/B} B - a_{Z/D} D - a_{Z/P} P - DYN(Z)]\}, \\ \frac{dB}{dt} &= 2r_B B \{C_B - [B - a_{B/N_a} N_a - a_{B/N_d} N_d - DYN(B)]\}, \\ \frac{dD}{dt} &= 2r_D D \{C_D - [D - a_{D/P} P - a_{D/Z} Z - DYN(D)]\}, \\ \frac{dN_a}{dt} &= 2r_{N_a} N_a \{C_{N_a} - [N_a + a_{N_a/P} P + a_{N_a/B} B - a_{N_a/Z} Z - DYN(N_a)]\}, \\ \frac{dN_n}{dt} &= 2r_{N_n} N_n \{C_{N_n} - [N_n + a_{N_n/P} P - DYN(N_n)]\}, \\ \frac{dN_d}{dt} &= 2r_{N_d} N_d \{C_{N_d} - [N_d - a_{N_d/P} P - a_{N_d/Z} Z - a_{N_d/D} D + a_{N_d/B} B - DYN(N_d)]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Символами  $DYN(u_i)$  в уравнениях (14) обозначены внешние влияния динамики глубины верхнего перемешанного слоя моря на переменные модели, символом  $F(CH)$  – влияние на концентрацию фитопланктона наблюдений хлорофилла  $a$ , усваиваемых в уравнении для  $P$ . Фигурные скобки в пра-

вых частях адаптивной модели (14) сохраняют материальные балансы биохимических реакций взаимодействия компонентов экосистемы, обеспечиваемые балансами обратных связей в каждом из уравнений с учетом внешних влияний.

Будем считать, что априорно имеется минимальная информация об экосистеме: известны только средние значения переменных модели  $C_i$  и знаки внутрисистемных влияний. В этих условиях необходимо использовать рассмотренный выше подход построения оценок коэффициентов по теореме Эйлера в предположении однородности балансовых соотношений (2). Для определения коэффициентов влияний  $a_{M/N}$  воспользуемся формулами (8) и (9), в которые подставим известные средние значения  $C_i$  соответствующих переменных экосистемы.

Запишем модель (14) в конечных разностях, используя модульные уравнения ABC-метода (12):

$$\begin{aligned} P^{k+1} &= 2P^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_P} [P^k - a_{P/N_a} N_a^k - a_{P/N_n} N_n^k + a_{P/Z} Z^k - F(CH) - DYN(P)] \right\}, \\ Z^{k+1} &= 2Z^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_Z} [Z^k - a_{Z/B} B^k - a_{Z/D} D^k - a_{Z/P} P^k - DYN(Z)] \right\}, \\ B^{k+1} &= 2B^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_B} [B^k - a_{B/N_a} N_a^k - a_{B/N_d} N_d^k - DYN(B)] \right\}, \\ D^{k+1} &= 2D^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_D} [D^k - a_{D/P} P^k - a_{D/Z} Z^k - DYN(D)] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$N_a^{k+1} = 2N_a^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_{N_a}} [N_a^k + a_{N_a/P} P^k + a_{N_a/B} B^k - a_{N_a/Z} Z^k - DYN(N_a)] \right\},$$

$$N_n^{k+1} = 2N_n^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_{N_n}} [N_n^k + a_{N_n/P} P^k - DYN(N_n)] \right\},$$

$$N_d^{k+1} = 2N_d^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_{N_d}} [N_d^k - a_{N_d/P} P^k - a_{N_d/Z} Z^k - a_{N_d/D} D^k + a_{N_d/B} B^k - DYN(N_d)] \right\}.$$

В целях обеспечения устойчивости решений системы уравнений (15) дополним ее условиями (7):

$$u_i^k = IF[u_i^k < 0; 0; IF(u_i^k > 2C_i; 2C_i; u_i^k)].$$

### **Вычислительные эксперименты по усвоению данных наблюдений в модели экосистемы**

Рассмотрим имитационные вычислительные эксперименты с построенной адаптивной моделью. Поскольку целью экспериментов являлась проверка предлагаемого метода ассимиляции данных наблюдений, она проводилась

без привязки адаптивной модели экосистемы (15) к конкретной морской акватории. Поэтому в качестве средних значений переменных модели были выбраны значения  $C_i$  в мг/м<sup>3</sup>, которые приведены в табл. 1. Эти средние значения были использованы для оценки абсолютных величин нормированных коэффициентов влияний, которые показаны в табл. 2 как элементы матрицы внутрисистемных влияний  $a_{ij}$ .

Т а б л и ц а 1

**Средние ( $C_i$ ), условные средние ( $C_i^*$ ) значения компонент морской экосистемы**

Средние значения	$C_i$	Условные средние значения	$C_i^*$
$C_P$	4,00	$C_P^*$	3,00
$C_Z$	4,20	$C_Z^*$	5,97
$C_B$	3,74	$C_B^*$	2,06
$C_D$	4,40	$C_D^*$	6,64
$C_{N_a}$	4,76	$C_{N_a}^*$	7,13
$C_{N_n}$	4,83	$C_{N_n}^*$	5,58
$C_{N_d}$	2,92	$C_{N_d}^*$	3,71

Т а б л и ц а 2

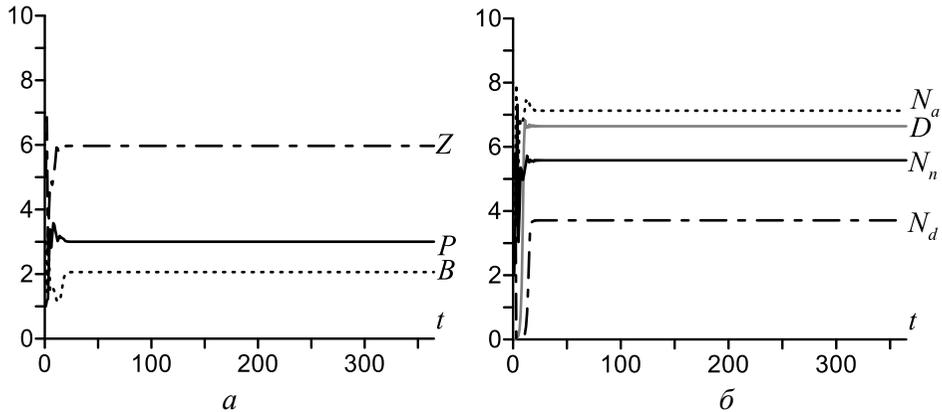
**Коэффициенты взаимных влияний морской экосистемы**

$a_{ij}$	$P$	$Z$	$B$	$D$	$N_a$	$N_n$	$N_d$
$P$	1,00	0,68	–	–	0,21	0,21	–
$Z$	0,17	1,00	0,18	0,15	–	–	–
$B$	–	0,45	1,00	–	0,19	–	0,31
$D$	0,25	0,24	–	1,00	–	–	–
$N_a$	–	0,50	0,60	–	1,00	–	–
$N_n$	0,60	–	–	–	0,80	1	–
$N_d$	0,12	0,12	0,39	0,11	–	–	1,00

Поскольку найденные коэффициенты влияний являлись приближенными оценками истинных коэффициентов, им должны были соответствовать условные стационарные средние значения  $C_i^*$  переменных экосистемы. Для их вычисления система уравнений (15) была решена с коэффициента-

ми  $a_{ij}$  из табл. 2 при произвольных начальных условиях и при отсутствии внешних влияний на экосистему, т. е. при  $F(CH) = DYN(u_i) = 0$ .

На рис. 2, а, б приведены графики сходимости итераций к условному стационарному решению, а в табл. 1 помещены вычисленные условные средние значения переменных модели ( $C_i^*$ ).

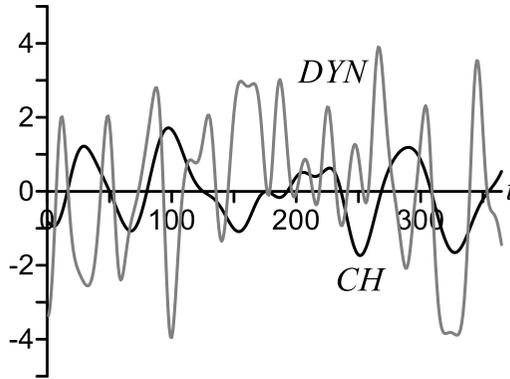


**Рис. 2.** Сходимость решений уравнений (15) к условному стационарному состоянию  $\{C_i^*\}$  от произвольных начальных условий при нормированных коэффициентах влияний, определенных по формулам (9)

Как следует из рис. 2, сходимость итерационного процесса решения уравнений *ABC*-модели (15) оказалась довольно быстрой. Из сравнения величин  $C_i$  и  $C_i^*$  (табл. 1) видно, что их значения заметно отличаются друг от друга. Напомним, что идея предлагаемого метода ассимиляции данных наблюдений заключалась в том, что в силу свойств *ABC*-метода моделирования отмеченные различия средних значений  $C_i$  и  $C_i^*$  сохраняются постоянными при включении имеющих нулевые средние значения переменных внешних воздействий на экосистему. Иными словами, реакции адаптивной модели экосистемы (15) на внешние влияния, приведенные к нулевым средним значениям, заключаются в отклонениях сценариев переменных экосистемы от неизменных условных средних значений. Следовательно, для получения истинных сценариев переменных достаточно лишь внести известные поправки к рассчитываемым по модели (15) средним значениям сценариев.

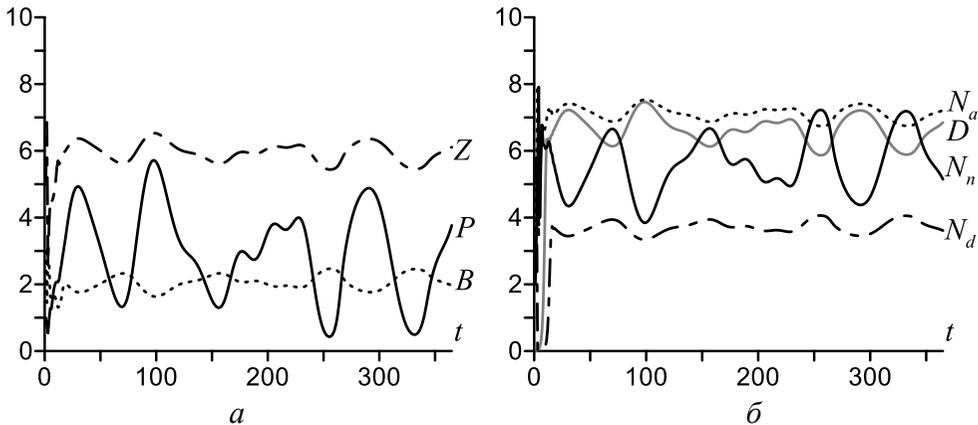
Для проверки вышеописанной идеи были имитированы данные наблюдений отклонений концентраций хлорофилла  $a$  ( $CH$ ) от средних значений  $C_{CH}$  (рис. 3). Эти данные были использованы в качестве дополнительной функции источника в правой части уравнения для концентрации фитопланктона модели (15):

$$P^{k+1} = 2P^k \left\{ 1 - \frac{1}{2C_P} [P^k - a_{P/N_a} N_a^k - a_{P/N_n} N_n^k + a_{P/Z} Z^k - CH] \right\}.$$



**Рис. 3.** Внешние влияния на экосистему:  $CH$  – усваиваемые в модели данные отклонений концентрации хлорофилла  $a$  от средних значений  $C_{CH}$ ;  $DYN$  – усваиваемые расчетные данные о динамике морской среды

Результаты усвоения в модели данных наблюдений отклонений концентрации хлорофилла  $a$   $CH$  от средних значений  $C_{CH}^*$  показаны на рис. 4. Как и следовало ожидать, наибольшее воздействие эти наблюдения оказали на сценарий концентрации фитопланктона.

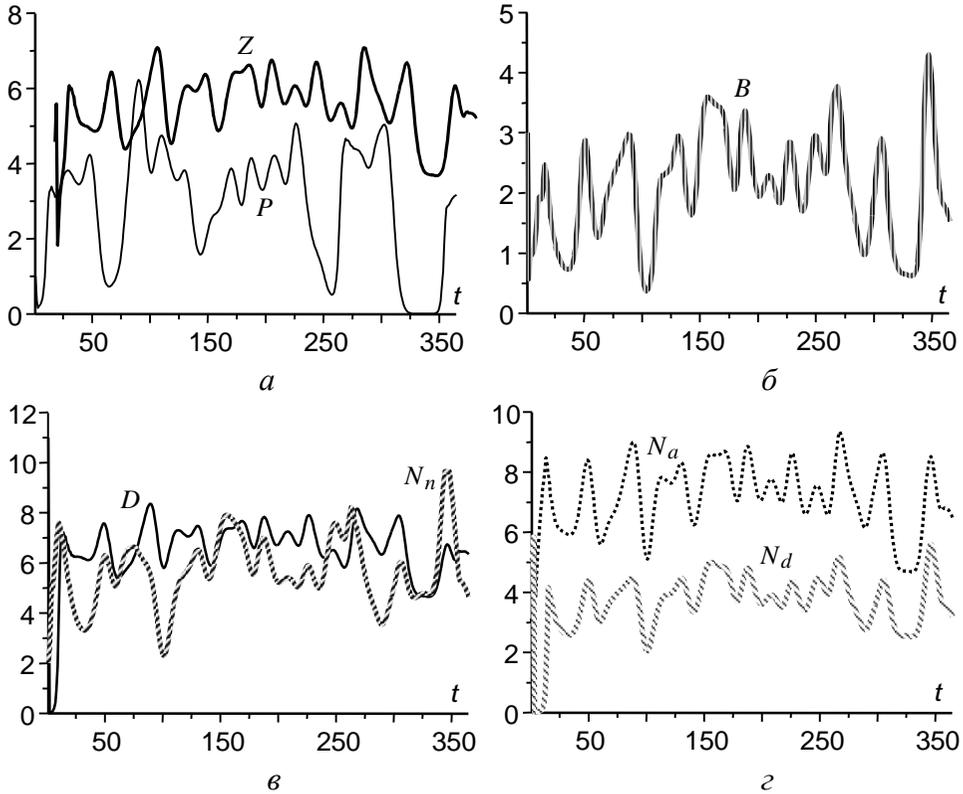


**Рис. 4.** Результаты усвоения в модели данных наблюдений концентрации хлорофилла  $a$  ( $CH$ )

Через внутрисистемные причинно-следственные связи это воздействие распространилось на остальные переменные модели экосистемы.

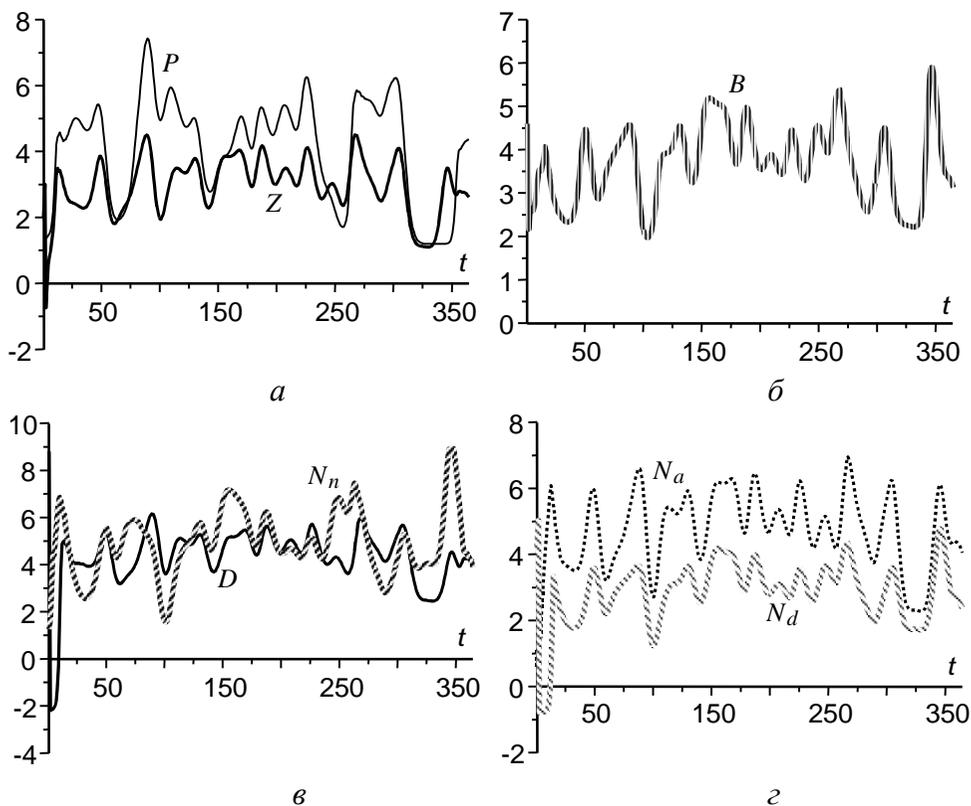
В следующем вычислительном эксперименте была имитирована одновременная ассимиляция данных наблюдений концентрации хлорофилла  $a$  и данных о влиянии динамики морской среды на внутрисистемные процессы в экосистеме. Предполагалось, что имеются результаты расчетов процессов переноса и диффузии моделируемых субстанций, выполненные с использованием численной гидродинамической модели, для той точки морской среды,

в которой рассчитываются сценарии изменения концентрации этих субстанций. Было принято, что функция *DYN* (рис. 3) имитирует сценарий влияния динамики морской среды, к которому адаптируются концентрации всех моделируемых веществ. Результаты усвоения в модели экосистемы этой информации по отношению к условным средним значениям  $C_i^*$  показаны на рис. 5.



**Рис. 5.** Результаты ассимиляции в модели экосистемы данных наблюдений концентрации хлорофилла *a* *CH* и расчетных данных о динамике морской среды *DYN* по отношению к условным средним значениям  $C_i^*$

Изображенные на рис. 5 сценарии процессов получены как отклонения от условных средних значений  $C_i^*$ . Однако располагая истинными средними значениями переменных  $C_i$ , помещенными в табл. 1, несложно внести постоянные поправки к значениям  $C_i^*$ , чтобы получить оценки истинных сценариев процессов в экосистеме. После введения этих поправок сценарии принимают вид, изображенный на рис. 6.



**Рис. 6.** Результаты ассимиляции в модели экосистемы данных наблюдений концентрации хлорофилла *a* *CH* и расчетных данных о динамике морской среды *DYN* после приведения их к известным из наблюдений средним значениям  $C_i$

### Заключение

Основной вывод из проведенных вычислительных экспериментов заключается в том, что свойства адаптивных моделей морских экосистем позволяют предложить приближенные методы усвоения в них данных наблюдений и расчетных данных о значениях переноса и диффузии моделируемых субстанций. В частности, оценка коэффициентов влияний и построение по ним сценариев концентрации химических веществ и живых организмов оказываются возможными при ограниченной априорной информации, которая содержится в средних значениях переменных и в известных знаках причинно-следственных связей между ними. При ассимиляции временных рядов наблюдений с нулевыми средними значениями переменные модели адаптируются друг к другу и к внешним влияниям, сохраняя свои условные средние значения. Это дает возможность приводить воспроизводимые моделью сценарии процессов к реальным средним значениям и получать адекватные реальности оценки сценариев, которые учитывают внутрисистемные причинно-следственные связи.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили возможность использовать теорему Эйлера об однородных функциях для представления

коэффициентов влияний в форме частных производных от продуктов биохимических реакций, происходящих в экосистеме, по ресурсам, формирующим их значения. Гипотеза о замене этих производных отношениями наблюдаемых средних значений процессов введена в предположении, что коэффициенты преобразования ресурсов в продукты сохраняются и для осредненных процессов. В результате замены производных отношениями наблюдаемых средних значений коэффициенты перед отношениями средних значений становятся безразмерными, что, в свою очередь, позволяет ввести их нормировку, обеспечивающую устойчивость решений уравнений модели. Рассмотренный метод ассимиляции данных наблюдений имеет свою специфику, поскольку в адаптивных моделях морских экосистем происходит автоматическая подстройка переменных модели экосистемы к усваиваемой информации. Эта особенность моделей не исключает последующей валидации модельных сценариев путем сопоставления их значений с текущими данными наблюдений и корректировки ошибок моделирования другими методами ассимиляции.

Работа выполнена в ходе проведения плановых исследований ФГБУН МГИ РАН по проекту № 007-00694-16 ПР «Фундаментальная океанология».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саркисян А.С. Об основных направлениях моделирования физических характеристик мирового океана и морей // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2016. – 52, № 4. – С. 381 – 387. – doi:10.7868/S0002351516040106
2. Коротаев Г.К., Еремеев В.Н. Введение в оперативную океанографию Черного моря. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2006. – 382 с.
3. Кочергин В.П., Тимченко И.Е. Мониторинг гидрофизических полей океана. – Ленинград: Гидрометеоздат, 1987. – 280 с.
4. Математические модели в биологической океанографии / Ред. Т. Платт, К.Х. Манн, Р.Е. Уланович. – Париж: ЮНЕСКО, 1984. – 196 с.
5. Murray J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. – N.-Y.: Springer, 2008. – 736 p.
6. Timchenko I.E. Stochastic Modeling of Ocean Dynamics. – Chur: Harwood Academic Publishers, 1984. – 320 p.
7. Ghil, M., Malanotte-Rizzoli P. Data Assimilation in Meteorology and Oceanography // Advanc. Geophysics / Edit. by R.R. Dmowska, B. Saltzman. – San Diego: Academic Press, Inc., 1991. – 33. – P. 141 – 266. – doi:10.1016/S0065-2687(08)60442-2
8. Marchuk G.I., Zalesny V.B. A numerical technique for geophysical data assimilation problems using Pontryagin's principle and splitting-up method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1993. – 8, Iss. 4. – P. 311 – 326. – doi:10.1515/rnam.1993.8.4.311
9. Robinson A.R., Lermusiaux P.F.J. Overview of Data Assimilation // Harvard Reports in Physical/Interdisciplinary (Ocean Science). – Cambridge, Massachusetts: Harvard University, 2000. – No. 62. – 28 p. – URL: [http://robinson.seas.harvard.edu/PAPERS/red\\_report\\_62.html](http://robinson.seas.harvard.edu/PAPERS/red_report_62.html) (дата обращения: 07.07.2017).
10. Mzyuk A.I., Knysh V.V., Kubryakov A.I., Korotaev G.K. Assimilation of the climatic hydrological data in the  $\sigma$ -coordinate model of the Black Sea by the algorithm of adaptive statistics // Phys. Oceanogr. – 2009. – 19, Iss. 6. – P. 339 – 357. – doi:10.1007/s11110-010-9058-2
11. Cantrell R.S., Cosner C. Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. – Chichester, UK: John Wiley and Sons, 2004. – 421 p. – doi:10.1002/0470871296.fmatter

12. *Тимченко И.Е., Игумнова Е.М., Тимченко И.И.* Системный менеджмент и ABC-технологии устойчивого развития. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2000. – 225 с.
13. *Тимченко И.Е., Игумнова Е.М., Лазарчук И.П., Солодова С.М.* Обратные связи в адаптивных моделях морских экосистем // Морской гидрофизический журнал. – 2014. – № 2. – С. 3 – 21. – URL: [http://мгфж.рф/images/files/2014/02/201402\\_01.pdf](http://мгфж.рф/images/files/2014/02/201402_01.pdf) (дата обращения: 07.07.2017).
14. *Timchenko I.E., Igumnova E.M., Timchenko I.I.* Adaptive Balance Models for Environmental-Economic Systems. – CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. – 486 p. – ISBN 1530208831. – URL: [www.amazon.com/dp/1530208831](http://www.amazon.com/dp/1530208831) (дата обращения: 07.07.2017).
15. *Ivanov V.A., Igumnova E.M., Timchenko I.E.* Coastal Zone Resources Management. – Kyiv: Akademperiodika, 2012. – 304 p.
16. *Fasham M., Ducklow H., McKelvie S.* A nitrogen-based model of plankton dynamics in the oceanic mixed layer // J. Mar. Res. – 1990. – 48, № 3. – P. 591 – 639. – URL: <http://www.ingentaconnect.com/content/jmr/jmr/1990/00000048/00000003/art00006> (дата обращения: 07.07.2017).
17. *Ильин В.А., Позняк В.Г.* Основы математического анализа. В 2-х частях. Часть 1. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.

## **Assimilation of the observational data in the marine ecosystem adaptive model at the known mean values of the processes in the marine environment**

**I. E. Timchenko, I. P. Lazarchuk\*, E. M. Igumnova**

*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russian Federation  
\*e-mail: [lazarchuk.syst.analysis@mhi-ras.ru](mailto:lazarchuk.syst.analysis@mhi-ras.ru)*

Assimilation of observational data in the marine ecosystem adaptive models constructed by the adaptive balance of causes method is considered. It is shown that the feedbacks' balance between the ecosystem variables and the rates of their change used in the method equations, permits to introduce a stationary state of the ecosystem characterized by the observed mean values of the variables. Proposed is the method for assessing the normalized coefficients of influences based on application of the Euler's theorem on homogeneous functions to the functions representing material balances of biochemical reactions of the substances' transformation. It is shown that the normalized ratios of the modeled processes' mean values can be used as the estimates of the reaction products' derivatives obtained based on their resources included in the equations of material balances. One-dimensional adaptive model of the sea upper layer ecosystem is constructed as an example; it is based on the scheme of cause-and-effect relations of the Fasham, Ducklow and McKelvie model of plankton dynamics and nitrogen cycle. It is shown that in such a model, observational data is assimilated by automatic adaptation of the model variables to the assimilated information providing that the substances' material balance are preserved in the transformation reactions. The data simulating both observations of the chlorophyll *a* concentrations and the marine environment dynamics are assimilated in the model. Time scenarios of the biochemical processes are constructed; they confirm applicability of the proposed method to assessing the influence coefficients based on the ratios of the simulated processes' mean values.

**Keywords:** adaptive balance of causes method, ABC-method, adaptive models, marine ecosystem.