

## Фазовая структура колебаний жидкости с плавающей упругой ледяной пластинкой при нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн

**А. Е. Букатов**, **А. А. Букатов\***

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

*\*E-mail: newisland@list.ru*

Поступила в редакцию 10.07.2017 г. После доработки 21.08. 2017 г.

На основе построенных методом многих масштабов асимптотических разложений до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения однородной жидкости конечной глубины и для возвышения поверхности пластинка – жидкость (лед – вода) проанализированы дисперсионные свойства колебаний, формируемых при взаимодействии прогрессивных гармоник поверхностных волн конечной амплитуды. Рассмотрены изменения частоты колебаний за счет вклада обусловленных учетом нелинейности величин первого и второго приближений. Исследовано влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений ледяной пластинки на амплитуду, частоту и фазовую скорость волновых возмущений. Показано, что частота колебаний при волновых числах, больших максимального резонансного значения, увеличивается при учете нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки. Растет она и при увеличении толщины пластинки, а смена знака (с плюса на минус) амплитуды второй взаимодействующей гармоники уменьшает значение частоты при фиксированном волновом числе. Рост фазовой скорости при учете нелинейности ускорения значительнее, чем без учета. При отрицательном значении амплитуды второй взаимодействующей гармоники фазовая скорость в случае учета нелинейности ускорения меньше, чем без учета.

**Ключевые слова:** колебания ледяной пластинки, волны конечной амплитуды, нелинейное взаимодействие волн, изгибная деформация пластинки, фазовые характеристики.

**Для цитирования:** Букатов А. Е., Букатов А. А. Фазовая структура колебаний жидкости с плавающей упругой ледяной пластинкой при нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн // Морской гидрофизический журнал. 2018. Т. 34, № 1. С. 5–19. doi:10.22449/0233-7584-2018-1-5-19

## Phase structure of fluid fluctuations with a floating elastic ice plate under nonlinear interaction of progressive surface waves

**A. E. Bukatov**, **A. A. Bukatov\***

*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia*

*\*e-mail:newisland@list.ru*

Asymptotic expansions up to the third-order terms are constructed based on the multiple scales method for the fluid velocity potential of the finite-depth homogeneous fluid and elevation of the plate-fluid surface (ice-water surface). The obtained expansions constitute a foundation for analyzing the fluctuations' dispersive features formed under interaction of progressive harmonics of the finite-amplitude surface waves. Changes of the fluctuations' frequency taking place due to the contribution of the values of the first and second approximations conditioned by the taken into account non-linearity are considered. The effect of non-linearity of the ice plate vertical displacements' acceleration upon the amplitude, frequency and phase velocity of the wave disturbances is studied. It is shown that at the wave numbers exceeding the maximum resonance value, the oscillation frequency increases in case non-linearity of the plate vertical displacements' acceleration is taken into account. It also grows with the plate thickness, and change of a sign (plus into minus) of the second interacting harmonic amplitude reduces the frequency value if the wave number is fixed. When the acceleration non-linearity is taken into consideration, the phase velocity increases more significantly than when it is not. Under a negative value of the second interacting harmonic amplitude and in case the acceleration non-linearity is taken into account, the phase velocity is lower than when it is not.

**Keywords:** ice plate fluctuations, waves of finite amplitude, nonlinear interaction of waves, flexural deformation of plate, phase characteristics.

**For citation:** Bukatov, A.E. and Bukatov, A.A., 2018. Phase structure of fluid fluctuations with a floating elastic ice plate under nonlinear interaction of progressive surface waves. *Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal*, 34(1), pp. 5-19. doi:10.22449/0233-7584-2018-1-5-19 (in Russian).

© Букатов А.Е., Букатов А.А., 2018

МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. 34, № 1 2018

5

**Введение.** В линейной постановке исследование колебаний в жидкости с плавающей упругой пластинкой проведено в работах [1–8]. Анализ влияния массовых и упругих сил пластинки на характеристики вынужденных неустановившихся изгибно-гравитационных волн малой амплитуды выполнен в статье [9]. Изучению нелинейных колебаний абсолютно гибкой пластинки (битого льда), плавающей на поверхности однородной идеальной жидкости конечной глубины, посвящена работа [10]. Колебания конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластинкой без учета нелинейности ускорения ее вертикальных смещений рассмотрены в статьях [11–13]. Оценка влияния нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки, обусловленных ее изгибом, на распространение периодических поверхностных волн дана в работе [14]. Формирование нелинейных колебаний абсолютно гибкой плавающей пластинки при нелинейном взаимодействии бегущих периодических волновых гармоник проанализировано в статье [15].

В настоящей работе исследуются колебания, формируемые в системе ледяная пластинка – жидкость при взаимодействии гармоник бегущих периодических поверхностных волн конечной амплитуды.

**1. Постановка задачи.** Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины  $H$  плавает тонкая упругая пластинка постоянной толщины  $h$ . В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость неограниченны. Рассмотрим нелинейные колебания пластинки при взаимодействии первой и второй гармоник прогрессивных волн конечной амплитуды, предполагая движение жидкости потенциальным, а колебания пластинки безотрывными. В безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg} t_1$ ,  $\zeta = k\zeta^*$ ,  $\varphi = (k^2/\sqrt{kg})\varphi^*$ , где  $k$  – волновое число;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $t$  – время;  $\varphi(x, z, t)$  – потенциал скорости движения жидкости;  $\zeta(x, t)$  – прогиб пластинки или возвышение поверхности пластинка – жидкость, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1.1)$$

для потенциала скорости с граничными условиями на поверхности пластинка – жидкость ( $z = \zeta$ )

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = p, \quad (1.2)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

и на дне ( $z = -H$ ) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho};$$

$E, h, \rho_1, \nu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластинки;  $\rho$  – плотность жидкости. Потенциал скорости и прогиб пластинки при  $z = \zeta$  связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

В динамическом условии (1.2) выражение с множителем  $\kappa$  представляет собой инерцию вертикальных смещений пластинки. Первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения пластинки.

**2. Уравнения для нелинейных приближений.** Решение задачи (1.1)–(1.5) найдем методом многих масштабов [16]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с  $t = T_0$  переменные  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 t$ , где  $\varepsilon$  малое, но конечное, и предположим справедливость разложений

$$\zeta = \varepsilon \zeta_0, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0, \quad f = \varepsilon f_0, \quad \zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3), \quad (2.1)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3), \quad f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Подставив  $\varphi$  из выражений (2.1) в (1.1) и (1.3), с точностью до величин третьего порядка малости получим

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим теперь динамическое (1.2), кинематическое (1.5) и начальное (1.4) условия. Представим потенциал скорости поверхности пластинка – жидкость  $z = \varepsilon \zeta_0$  в виде

$$\varphi(x, \varepsilon \zeta_0, t) = \varphi(x, 0, t) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, 0, t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta_0^2 \varphi_{zz}(x, 0, t) + \dots \quad (2.2)$$

Подставим  $\zeta = \varepsilon \zeta_0$ ,  $f = \varepsilon f_0$ ,  $\varphi(x, \varepsilon \zeta_0, t)$  и  $\varphi_z(x, \varepsilon \zeta_0, t)$  в соответствующие условия (1.2) и (1.5), имея в виду при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2},$$

и учитывая зависимость  $\zeta_0$  от  $x$  и  $t$  в выражении (2.2). Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и приравняв их нулю, найдем уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (2.3)$$

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta_n}{\partial x^4} - \kappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} + \zeta_n = F_n^*, \quad z = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (2.6)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0 \quad (2.7)$$

для определения нелинейных приближений.

Здесь

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0, \quad n = 1, 2, 3;$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \kappa k N,$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}, \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \kappa k N_3,$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2},$$

$$N_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right),$$

$$N_3 = \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + N_5,$$

$$N_4 = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}, \quad N_5 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1},$$

$$L_3 = \zeta_1 N_6 - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2,$$

$$N_6 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3}, \quad F_2^0 = -\kappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$F_3^0 = -\kappa k \left[ \zeta_1 N_7 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) \right],$$

$$N_7 = \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

Отметим, что слагаемые  $F_2^0, F_3^0$ , входящие в правые части динамических условий (2.4) для второго ( $n = 2$ ) и третьего ( $n = 3$ ) приближений, обусловленные учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки.

**3. Выражения для прогиба пластинки и потенциала скорости движения жидкости.** Уравнения (2.3)–(2.7) получены для общего случая неустановившихся колебаний конечной амплитуды. Найдем решение этих уравнений в случае взаимодействия бегущих периодических волновых гармоник  $\zeta_{11} = \cos \theta$  и  $\zeta_{12} = a_1 \cos 2\theta$ ,  $\theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2)$ . Зададим первое приближение ( $n = 1$ ) возвышения поверхности пластинка – жидкость в виде

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12}, \quad (3.1)$$

где  $a_1$  – постоянная порядка единицы, а  $\beta = 0$  при  $t = 0$ . Удовлетворяя условию на дне и учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия (2.4), (2.5), можно записать

$$\varphi_1 = \tau \left[ \frac{\text{ch}(z+H)}{\text{sh}H} \sin \theta + a_1 \frac{\text{ch}2(z+H)}{\text{sh}2H} \sin 2\theta \right], \quad (3.2)$$

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \text{th}H)^{-1} \text{th}H.$$

Амплитуду  $a_1$  и фазовый сдвиг  $\beta(T_1, T_2)$  определим из последующих приближений.

Подставив  $\zeta_1$  и  $\varphi_1$  в правые части динамического (2.4) и кинематического (2.5) уравнений для второго приближения и решив задачу (2.3)–(2.7) при  $n = 2$ , учитывая требование отсутствия первой и второй гармоник в частном решении, найдем  $\zeta_2$  и  $\varphi_2$ . В свою очередь,  $\zeta_1$  и  $\varphi_1$  и  $\zeta_2$  и  $\varphi_2$  определяют правые части динамического и кинематического условий при  $n = 3$ . Исключив из них слагаемые, порождающие секулярность, найдем  $\zeta_3$  и  $\varphi_3$ .

В результате возвышение поверхности бассейна  $\zeta$  и потенциал скорости движения жидкости  $\varphi$  в безразмерных переменных до величин третьего порядка малости определяются из выражений

$$\zeta = \varepsilon \cos \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos 2\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 a_{nj} \cos j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 a_{3n} \cos n\theta, \quad (3.3)$$

$$\varphi = \varepsilon \frac{\tau}{\text{sh}H} \text{ch}(z+H) \sin \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_{n2} \text{ch}2(z+H) \sin 2\theta +$$

$$+ \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 b_{nj} \text{ch}j(z+H) \sin j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 b_{3n} \text{ch}n(z+H) \sin n\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n b_{n0} t, \quad (3.4)$$

$$\theta = x + \sigma t, \sigma = \tau + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \varepsilon = ak,$$

где  $a$  – амплитуда начальной гармоника.

Здесь

$$b_{12} = a_1 \frac{\tau}{\operatorname{sh} 2H}, \quad a_1 = \pm \left( \frac{\mu_2 r_1}{4r_2 (2\tau^2 \operatorname{cth} 2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2)(1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)} \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$r_1 = \left( 2\operatorname{cth} H + \operatorname{th} 2H \left( \operatorname{cth} H \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right) \left( \tau^2 (\operatorname{cth} H + \kappa k) + \mu_1 \right),$$

$$r_2 = \tau^2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \kappa k \left( \operatorname{cth} 2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} H \right) \right) + \mu_1 \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau \mu_2 \left( 2\operatorname{cth} H + \operatorname{th} 2H \left( \operatorname{cth} H \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right)}{4a_1 (2\tau^2 \operatorname{cth} 2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2)(1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)},$$

$$l_3 = -\frac{3}{2} a_1 \tau (2\operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H), \quad l_4 = -4a_1^2 \operatorname{cth} 2H,$$

$$l_7 = a_1 \tau^2 \left( \frac{11}{2} - \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H + \kappa k \left( 5\operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) \right),$$

$$l_8 = a_1^2 \tau^2 (5 - \operatorname{cth}^2 2H + 4\kappa k \operatorname{cth} 2H),$$

$$b_{23} = \frac{l_3 \mu_3 + 3l_7 \tau}{3\operatorname{sh} 3H (\mu_3 - 9\kappa k \tau^2 - 3\tau^2 \operatorname{cth} 3H)},$$

$$b_{24} = \frac{l_4 \mu_4 + 4l_8 \tau}{3\operatorname{sh} 4H (\mu_4 - 16\kappa k \tau^2 - 4\tau^2 \operatorname{cth} 4H)},$$

$$a_{23} = \mu_3^{-1} (l_7 + 3\tau b_{23} (\operatorname{ch} 3H - \kappa k 3\operatorname{sh} 3H)),$$

$$a_{24} = \mu_4^{-1} (l_8 + 4\tau b_{24} (\operatorname{ch} 4H - \kappa k 4\operatorname{sh} 4H)),$$

$$j_3 = -\frac{5}{8} \tau - \frac{3}{8} a_1^2 \tau - 6b_{24} \operatorname{ch} 4H - \frac{3}{2} a_{24} \tau \operatorname{cth} H + 3a_{23} \sigma_1,$$

$$j_4 = -\frac{9}{2} a_1 \tau - 6b_{23} \operatorname{ch} 3H - 2a_{23} \tau \operatorname{cth} H + 4a_{24} \sigma_1,$$

$$j_5 = -\frac{69}{8} a_1^2 \tau - 10b_{24} \operatorname{ch} 4H - \frac{5}{2} a_{24} \tau \operatorname{cth} H - 5a_1 \left( \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H - a_{23} \tau \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$j_6 = -5a_1^3 \tau - 6a_1 (2b_{24} \operatorname{ch} 4H - a_{24} \tau \operatorname{cth} 2H),$$

$$m_3 = \tau \left( \frac{9}{2} a_1 \sigma_1 + 2b_{24} \operatorname{ch} 4H (2\operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} H) \right) + \frac{1}{2} \tau^2 \left( \frac{1}{4} \operatorname{cth} H (1 - 23a_1^2) + 7a_1^2 \operatorname{cth} 2H - \right. \\ \left. - 3a_{24} \right) + 3b_{23} \sigma_1 \operatorname{ch} 3H + \kappa k \left( \tau (2b_{24} \operatorname{sh} 4H (1 \operatorname{lcth} 4H - 4\operatorname{cth} H) + 3a_1 \sigma_1 + \right. \\ \left. + \left( 2\operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) + \tau^2 \left( a_1^2 \left( \frac{21}{8} - 2\operatorname{cth}^2 2H - \frac{7}{2} \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H \right) - \frac{1}{8} - \frac{3}{2} a_{24} \operatorname{cth} H - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H \right) + 9b_{23} \sigma_1 \operatorname{sh} 3H \right),$$

$$m_4 = \tau \left( 4\sigma_1 a_1^2 + \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H (5\operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} H) \right) + 2\tau^2 \left( a_1 \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{4} a_1 \operatorname{cth} H + a_{23} \right) + \\ + 4b_{24} \sigma_1 \operatorname{ch} 4H + \kappa k \left( \tau \left( \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{sh} 3H (1 \operatorname{lcth} 3H - 3\operatorname{cth} H) + 8a_1^2 \sigma_1 \operatorname{cth} 2H \right) + \right. \\ \left. + \tau^2 \left( a_1 \left( \frac{37}{4} - 4\operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \frac{3}{4} \operatorname{cth}^2 H \right) + 2a_{23} \operatorname{cth} H \right) + 16b_{24} \sigma_1 \operatorname{sh} 4H \right),$$

$$m_5 = \tau \left( 2b_{24} \operatorname{ch} 4H (6\operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} H) + 3b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H \left( \frac{7}{2} \operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \\ + \tau^2 \left( \frac{7}{2} a_1^2 \operatorname{cth} 2H - \frac{7}{8} a_1^2 \operatorname{cth} H + 5a_{23} a_1 + \frac{5}{2} a_{24} \right) + \kappa k \left( \tau (2b_{24} \operatorname{sh} 4H (19\operatorname{cth} 4H - 4\operatorname{cth} H) + \right. \\ \left. + 3b_{23} a_1 \operatorname{sh} 3H \left( \frac{11}{2} \operatorname{cth} 3H - 3\operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^2 \left( a_1^2 \left( \frac{3}{8} - 6\operatorname{cth} 2H - \frac{11}{2} \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H \right) + \right. \\ \left. + 10a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{5}{2} a_{24} \operatorname{cth} H \right),$$

$$m_6 = 4\tau b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H (4\operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} 2H) + \tau^2 a_1 (a_1^2 \operatorname{cth} 2H + 6a_{24}) + \\ + 2\kappa k a_1 (4\tau b_{24} \operatorname{sh} 4H (5\operatorname{cth} 4H - 2\operatorname{cth} 2H) + \tau^2 (6a_{24} \operatorname{cth} 2H - a_1^2 (1 + 4\operatorname{cth}^2 2H))),$$

$$q_1 = \mu_1 \left( \frac{3}{2} b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H - \tau \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4} a_1^2 + a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^2 a_1 \left( -\frac{1}{2} \sigma_1 + \right. \\ \left. + 3b_{23} \operatorname{ch} 3H \left( \frac{1}{2} \operatorname{th} 3H + \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^3 \left( 9a_1^2 \operatorname{cth} 2H + a_1 a_{23} + \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \left( \frac{5}{2} - a_1^2 \right) \right) + \\ + \kappa k \left( \tau^2 a_1 \left( 3b_{23} \operatorname{sh} 3H \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} 3H + 3\operatorname{cth} 2H \right) - 2\sigma_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\ \left. + \tau^3 \left( 2a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \tau^2 \operatorname{cth}^2 H + \frac{3}{8} + a_1^2 \left( 8\operatorname{cth}^2 2H + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + \frac{39}{4} \right) \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
q_2 = & \mu_2 \left( 3b_{23} \operatorname{ch} 3H + 4b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H + \tau (a_{23} \operatorname{cth} H + 2a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 3a_1^3) \right) + \\
& + 2\tau^2 \left( \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H (\operatorname{cth} H - \operatorname{th} 3H) + 4b_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H \operatorname{ch} 4H - \sigma_1 \right) + \\
& + 2\tau^3 \left( a_{23} + a_1 (3a_1 \operatorname{cth} H + 2a_{24} + \operatorname{cth} 2H (5a_1^2 - 2)) \right) + \\
& + \kappa k \left( 2\tau^2 \left( \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{sh} 3H (3\operatorname{cth} H - 5\operatorname{cth} 3H) + 8b_{24} a_1 \operatorname{sh} 4H (2\operatorname{cth} 2H - \operatorname{cth} 4H) - \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + 2\tau^3 \left( 2a_1^3 (3 + 4\operatorname{cth} 2H) + a_1 \left( 4\operatorname{cth} 2H (a_{24} + \operatorname{cth} H) + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H - \frac{3}{2} \right) + a_{23} \operatorname{cth} H \right) \right), \\
\sigma_2 = & \frac{1}{4} \left( \frac{q_1}{\mu_1} + \frac{q_2}{2a_1 \mu_2} \right), b_{3n} = \frac{j_n \mu_n + n m_n \tau}{n \operatorname{sh} nH (\mu_n - n^2 \tau^2 \kappa k - n \tau^2 \operatorname{cth} nH)}, n = 3 \dots 6, \\
a_{3n} = & (n \tau b_{3n} (\operatorname{ch} nH + n \kappa k \operatorname{sh} nH) + m_n) \mu_n^{-1}, n = 3 \dots 6, \mu_n = 1 + n^4 D_1 k^4, n = 1 \dots 6, \\
b_{20} = & \tau^2 \left( a_1^2 (1 + \operatorname{cth}^2 2H) + \frac{1}{4} (1 + \operatorname{cth}^2 H) + \kappa k \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 4a_1^2 \operatorname{cth} 2H \right) \right), \\
b_{30} = & a_1 \tau^2 \left( 2\operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \kappa k \left( \frac{9}{4} + 2\operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \frac{1}{4} \operatorname{cth}^2 H \right) \right).
\end{aligned}$$

При этом  $b_{22} = b_{32} = a_2 = a_3 = l_1 = l_2 = l_5 = l_6 = j_1 = j_2 = m_1 = m_2 = 0$ .

Формулы (3.3)–(3.4) для  $\zeta$  и  $\varphi$  определяют формируемое волновое возмущение и при отказе от учета нелинейности ускорения вертикальных смещений льда в динамическом условии (2.4). Однако в таком случае следует учесть, что

$$\begin{aligned}
r_2 = & \tau^2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \kappa k \left( 2\operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) \right) + \mu_1 \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \operatorname{cth} 2H \right), \\
l_7 = & a_1 \tau^2 \left( \frac{11}{2} - \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H + \kappa k \left( 6\operatorname{cth} 2H - \frac{3}{2} \operatorname{cth} H \right) \right), \\
m_3 = & \tau \left( 2b_{24} \operatorname{ch} 4H (2\operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} H) + \frac{9}{2} a_1 \sigma_1 \right) + \frac{1}{2} \tau^2 \left( a_1^2 \left( 7\operatorname{cth} 2H - \frac{23}{4} \operatorname{cth} H \right) + \frac{1}{4} \operatorname{cth} H - \right. \\
& \left. - 3a_{24} \right) + 3b_{23} \sigma_1 \operatorname{ch} 3H + \kappa k \tau \left( 3a_1 \sigma_1 \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 2\operatorname{cth} 2H \right) + \frac{3}{2} \tau \left( \frac{15}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} - a_{24} \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + 24b_{24} \operatorname{ch} 4H + 9b_{23} \sigma_1 \operatorname{sh} 3H \right), \\
m_4 = & \tau \left( \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H (5\operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} H) + 4\sigma_1 a_1^2 \right) + 2\tau^2 \left( a_1 \left( \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \right) + a_{23} \right) + \\
& + 4b_{24} \sigma_1 \operatorname{ch} 4H + \kappa k \tau \left( 2(9b_{23} \operatorname{ch} 3H + 4a_1^2 \sigma_1 \operatorname{cth} 2H) + \tau (5a_1 + 2a_{23} \operatorname{cth} H) + \right. \\
& \left. + 16b_{24} \sigma_1 \operatorname{sh} 4H \right),
\end{aligned}$$



$$m_5 = \tau \left( 2b_{24} \operatorname{ch} 4H (6 \operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} H) + 3b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H \left( \frac{7}{2} \operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \\ + \tau^2 \left( \frac{7}{2} a_1^2 \left( \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \right) + 5 \left( a_{23} a_1 + \frac{1}{2} a_{24} \right) \right) + 5\kappa\tau \left( 8b_{24} \operatorname{ch} 4H + \frac{9}{2} b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H + \right. \\ \left. + \tau \left( \frac{17}{8} a_1^2 + 2a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} a_{24} \operatorname{cth} H \right) \right),$$

$$m_6 = 4b_{24} \tau a_1 \operatorname{ch} 4H (4 \operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} 2H) + \tau^2 a_1 (a_1^2 \operatorname{cth} 2H + 6a_{24}) + \\ + \kappa a_1 \tau (48b_{24} \operatorname{ch} 4H + \tau (6a_1^2 + 12a_{24} \operatorname{cth} 2H)),$$

$$q_1 = \mu_1 \left( -\frac{3}{8} \tau - a_1 \left( \frac{15}{4} a_1 \tau + a_{23} \tau \operatorname{cth} 2H + \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H \right) \right) + a_1 \tau^2 \left( 3b_{23} \operatorname{ch} 3H \left( \frac{1}{2} \operatorname{th} 3H + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{cth} 2H \right) - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) + \tau^3 \left( \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \left( \frac{5}{2} - a_1^2 \right) + 9a_1^2 \operatorname{cth} 2H + a_1 a_{23} \right) - \\ - \kappa \tau^2 \left( a_1 \left( \frac{9}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H + \sigma_1 \left( 2 \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) \right) + \tau \left( \frac{1}{4} a_1^2 - 2a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{8} \right) \right),$$

$$q_2 = \mu_2 (3b_{23} \operatorname{ch} 3H - 3a_1^3 \tau + 4b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H + a_{23} \tau \operatorname{cth} H + 2a_{24} \tau a_1 \operatorname{cth} 2H) + \\ + \tau^2 (8b_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H \operatorname{ch} 4H - 3b_{23} \operatorname{ch} 3H (\operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} H) - 2\sigma_1) + \tau^3 (2a_1^2 (5a_1 \operatorname{cth} 2H + \\ + 3 \operatorname{cth} H) + 4a_1 (a_{24} - \operatorname{cth} 2H) + a_{23}) - 2\kappa \tau^2 (9b_{23} \operatorname{ch} 3H + 16a_1 b_{24} \operatorname{ch} 4H + \sigma_1 \operatorname{cth} H + \\ + \tau (2a_1^3 + 4a_1 (1 - a_{24} \operatorname{cth} 2H) - a_{23} \operatorname{cth} H)),$$

$$b_{30} = a_1 \tau^2 \left( 2 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right).$$

В размерных переменных ( $\zeta^*$ ,  $\varphi^*$ ,  $x_1$ ,  $z_1$ ,  $t_1$ ,  $a$ ) получим

$$\zeta = a \cos \theta + a a_1 \cos 2\theta + (a^2 k a_{23} + a^3 k^2 a_{33}) \cos 3\theta + (a^2 k a_{24} + a^3 k^2 a_{34}) \cos 4\theta + \\ + a^3 k^2 a_{35} \cos 5\theta + a^2 k^2 a_{36} \cos 6\theta, \quad (3.6)$$

$$\varphi = a \left( \frac{g}{k} \right)^{1/2} \left( \frac{\tau}{\operatorname{sh} H} \operatorname{ch}(z+H) \sin \theta + b_{12} \operatorname{ch} 2(z+H) \sin 2\theta \right) + a^2 \sqrt{kg} (b_{23} \operatorname{ch} 3(z+H) + \\ + b_{24} \operatorname{ch} 4(z+H) \sin 4\theta + b_{20} t) + a^3 k \sqrt{kg} (b_{33} \operatorname{ch} 3(z+H) \sin 3\theta + b_{34} \operatorname{ch} 4(z+H) \sin 4\theta + \\ + b_{35} \operatorname{ch} 5(z+H) \sin 5\theta + b_{36} \operatorname{ch} 6(z+H) + b_{30} t),$$

$$\theta = kx + \sqrt{kg} (\tau + a k \sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2) t.$$

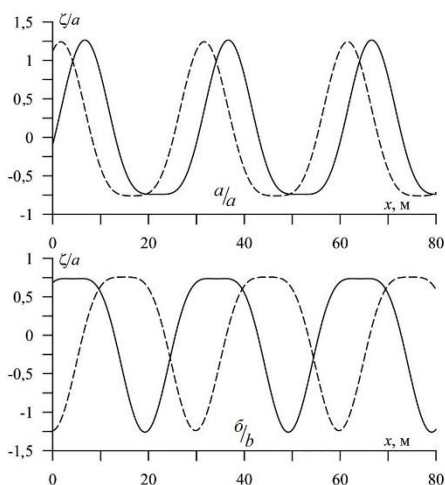
Здесь и далее индекс 1 у латинских символов  $x$ ,  $z$ ,  $t$  и знак звездочки у греческих  $\zeta$  и  $\varphi$  опущены.

**4. Анализ результатов.** Полученное решение (3.6) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волнового числа  $k$ , являющихся положительными действительными корнями  $k = k_1$ ,  $k = k_2$ ,  $k = k_3$ ,  $k = k_4$  уравнений

$$\mu_n - n^2 \tau^2 \kappa k - n \tau^2 \operatorname{cth} nH = 0, \quad n = 3 \dots 6 \quad (4.1)$$

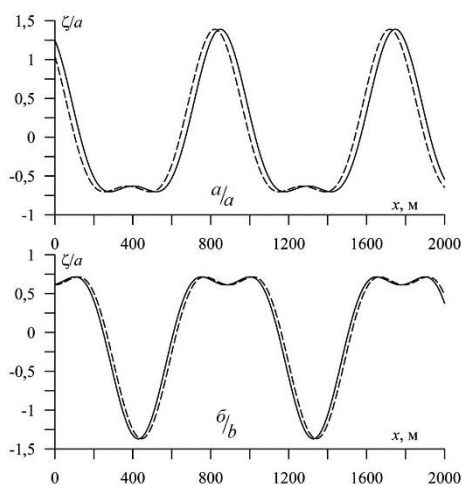
соответственно. При этом  $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$ . Отметим, что одно из этих резонансных значений  $k = k_1$ , получаемое из уравнения (4.1) при  $n = 3$ , совпадает с меньшим из двух резонансных значений, получаемых в случае, когда первое приближение  $\zeta_1$  задается в виде  $\zeta_1 = \zeta_{11}$  [14].

Чтобы количественно оценить влияние упругих и массовых сил пластинки на характеристики формируемых возмущений, проводились численные расчёты при значениях модуля упругости  $E = 0,5 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициента Пуассона  $\nu = 0,34$  и плотности  $\rho_1/\rho = 0,87$ , соответствующих ледяной пластинке [17]. На рис. 1, 2 приведены профили возвышения поверхности лед – вода (изгиба ледяной пластинки) вдоль направления перемещения волны (отрицательное направление оси  $x$ ) для  $E = 3 \cdot 10^3$  Н/м<sup>2</sup> и значений  $h = 1$  м,  $H = 100$  м при  $t = 17$  мин,  $k = 0,21$  м<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = ak = 0,21$  (рис. 1) и  $t = 10$  ч,  $k = 7 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-2}$  (рис. 2). Профили  $\zeta(x)$  на рис. 1, а; 2, а соответствуют положительному значению амплитуды второй взаимодействующей гармоники ( $a_1 > 0$ ), а на рис. 1, б; 2, б – отрицательному ( $a_1 < 0$ ). Штриховые линии – профили, полученные с учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений ледяной пластинки ( $F_2^0 \neq 0, F_3^0 \neq 0$ ), а сплошные – без учета ( $F_2^0 = 0, F_3^0 = 0$ ).



**Рис. 1.** Профили волны изгибной деформации ледяной пластинки при амплитуде начальной гармоники  $a = 1$  м и волновом числе  $k = 0,21$  м<sup>-1</sup>, если  $a_1 > 0$  (а) и  $a_1 < 0$  (б)

**Fig. 1.** The wave profiles of the flexural deformation of the ice plate with the amplitude of the initial harmonic  $a = 1$  m and wave number  $k = 0.21$  m<sup>-1</sup>, in case  $a_1 > 0$  (a) and  $a_1 < 0$  (b)



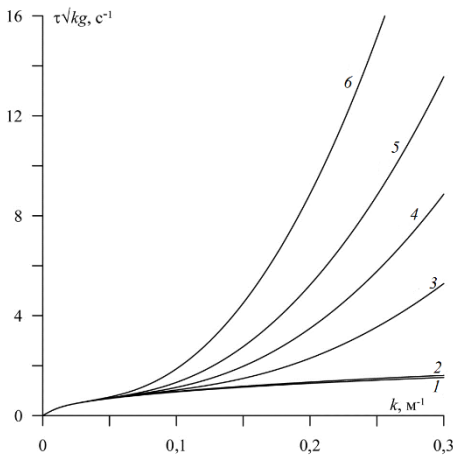
**Рис. 2.** Профили волны изгибной деформации ледяной пластинки при амплитуде начальной гармоники  $a = 2$  м и волновом числе  $7 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>, если  $a_1 > 0$  (а) и  $a_1 < 0$  (б)

**Fig. 2.** The wave profiles of the flexural deformation of the ice plate with the amplitude of the initial harmonic  $a = 2$  m and wave number  $7 \cdot 10^{-3}$  m<sup>-1</sup>, in case  $a_1 > 0$  (a) and  $a_1 < 0$  (b)

Из анализа графиков  $\zeta(x)$  следует, что при взаимодействии волновых гармоник учёт нелинейности ускорения вертикальных смещений ледяной пластинки при ее изгибной деформации ускоряет смещение профиля волны в отрицательном направлении оси  $x$  (направлении движения волны) и незначительно изменяет амплитуду волны изгиба, зависящую от волнового числа

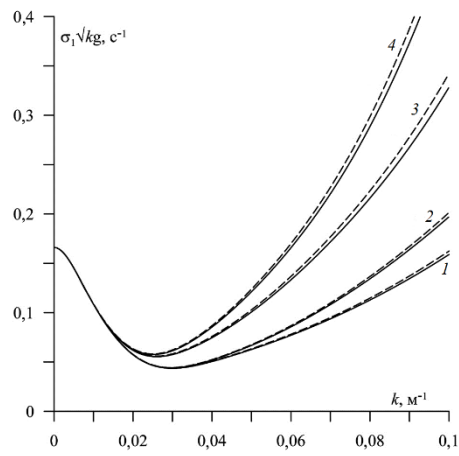
и характеристик пластинки. При  $a_1 > 0$  максимальные смещения поверхности бассейна достигаются в вершинах поднятий волны, а минимальные – в подошвах впадин. Изменение знака амплитуды  $a_1$  второй взаимодействующей гармоники обуславливает существенную деформацию профиля изгиба. В случае  $a_1 < 0$  максимальные смещения профиля проявляются в виде впадин. При этом учет нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки при изгибе обуславливает замедление скорости перемещения волны. С увеличением длины волны основной гармоники становится заметнее вклад высших гармоник во впадинах и поднятиях на профилях  $\zeta(x)$ , а с ее уменьшением – профиль волны приближается к гармоническому виду.

Распределение по волновому числу частоты колебаний в линейном случае и обусловленной учетом нелинейности величины сдвига частоты в приближении порядка малости  $\varepsilon$  и в приближении порядка  $\varepsilon^2$  показано на рис. 3, 4, 5 соответственно при  $H = 100$  м. На рис. 3 кривые 1, 3, 4 получены при  $h = 0,5$  м, а кривые 2, 5, 6 – при  $h = 1$  м. Линии с номером 3, 5 отвечают модулю упругости  $E = 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, а с номером 4, 6 – значению  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>. Кривые 1, 2 соответствуют случаю абсолютно гибкой пластинки ( $E = 0$ ), моделирующей битый лед. Приведенные графики свидетельствуют об увеличении линейной компоненты частоты колебаний с ростом толщины льда и его модуля упругости, что согласуется с работами [9, 17]. Чем короче длина волны (большее значение волнового числа), тем значительнее проявляется влияние  $h$  и  $E$ . В длинноволновом диапазоне оно практически отсутствует.



**Рис. 3.** Распределение частоты колебаний по волновому числу в линейном случае при толщине льда 0,5 м (кривые 1, 3, 4) и 1 м (кривые 2, 5, 6) в случае модуля упругости  $E = 10^9$  Н/м<sup>2</sup> (кривые 3, 5),  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> (кривые 4, 6),  $E = 0$  (кривые 1, 2)

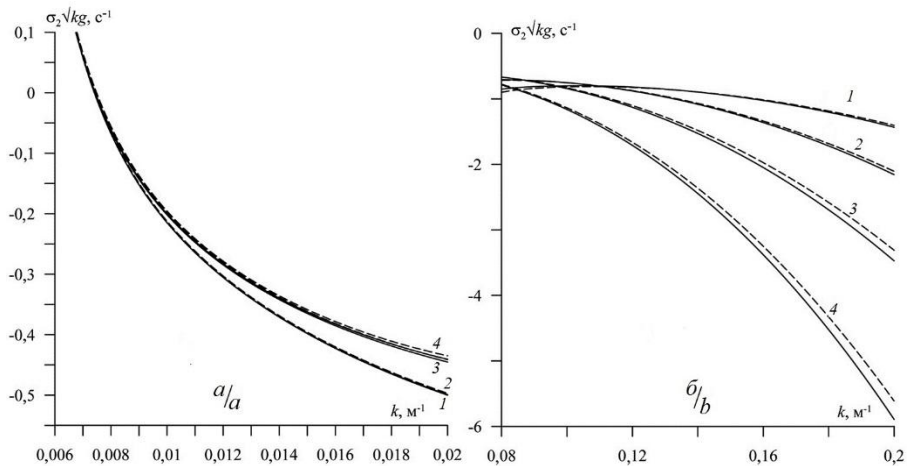
**Fig. 3.** Distribution of the fluctuation frequency with respect to the wave number in the linear case with an ice thickness 0,5 m (the curves 1, 3, 4) and 1 m (the curves 2, 5, 6) in the case of the elastic modulus  $E = 10^9$  N/m<sup>2</sup> (the curves 3, 5),  $E = 3 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> (the curves 4, 6),  $E = 0$  (the curves 1, 2)



**Рис. 4.** Распределение по волновому числу обусловленной нелинейностью компоненты частоты колебаний в первом приближении без учета множителя  $\varepsilon = ak$  в случае  $a_1 > 0$  при  $h = 0,5$  м (кривые 1, 2) и  $h = 1$  м (кривые 3, 4), если  $E = 10^9$  Н/м<sup>2</sup> (кривые 1, 3) и  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> (кривые 2, 4)

**Fig. 4.** Distribution of the fluctuation frequency component due to the nonlinearity in the first approximation, without taking into account the factor  $\varepsilon = ak$  in case  $a_1 > 0$  when  $h = 0,5$  m (the curves 1, 2) and  $h = 1$  m (the curves 3, 4), if  $E = 10^9$  N/m<sup>2</sup> (the curves 1, 3) and  $E = 3 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> (the curves 2, 4)

Распределение обусловленной нелинейностью компоненты частоты колебаний по волновому числу в приближении порядка  $\varepsilon$  без учета множителя  $\varepsilon = ak$  приведено на рис. 4 для  $a_1 > 0$ , где кривые с номером 1, 2 соответствуют  $h = 0,5$  м, а с номером 3, 4 значению  $h = 1$  м. Кривые 1, 3 получены при  $E = 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, а кривые 2, 4 – при  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>. Сплошные линии построены без учета нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки, а штриховые с учетом. Из рисунка видно, что влияние нелинейности ускорения ( $F_2^0 \neq 0, F_3^0 \neq 0$ ) проявляется в увеличении сдвиговой компоненты частоты в приближении порядка  $\varepsilon$ . Причем вклад учета нелинейности ускорения растет с увеличением волнового числа (уменьшение длины волны). В случае  $a_1 < 0$  величина приведенной компоненты сохранится, но знак изменится на противоположный. Это видно из выражения  $\sigma_1$ , где в знаменателе присутствует  $a_1$ . Следовательно, смена знака  $a_1$  ведет к смене знака  $\sigma_1$ .

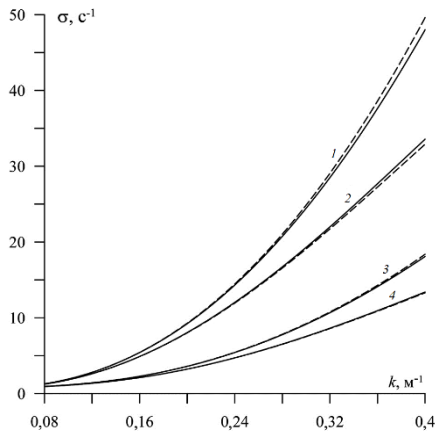


**Рис. 5.** Распределение сдвиговой компоненты частоты колебаний второго порядка малости по волновому числу с точностью до множителя при  $a_1 > 0$ , если  $k < k_4$  (а) и  $k > k_1$  (б)

**Fig. 5.** Distribution of the fluctuation frequency displacement component of the second order according to the wave number within the accuracy of a factor when  $a_1 > 0$ , in case  $k < k_4$  (a) and  $k > k_1$  (b)

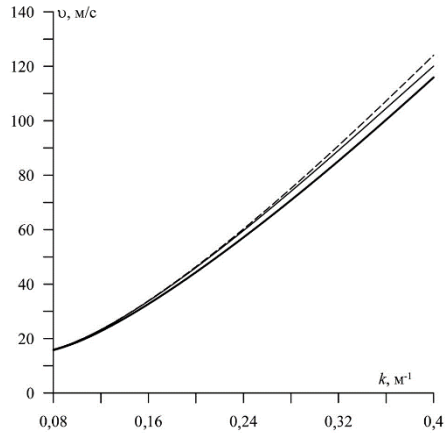
Дисперсионные кривые, связывающие сдвиговую компоненту частоты второго порядка малости с волновым числом, показаны с точностью до множителя  $\varepsilon^2 = a^2 k^2$  на рис. 5 при фиксированном  $\varepsilon$  в случае  $a_1 > 0$ . При этом на рис. 5, а они приведены для значений волнового числа из диапазона  $k < k_4$ , а на рис. 5, б – для  $k$  из диапазона  $k > k_1$ . Все обозначения на рис. 5 те же, что и на рис. 4. Поведение графиков свидетельствует, что в диапазоне  $k < k_4$  существует такое значение волнового числа, при переходе через которое знак компоненты порядка малости  $\varepsilon^2$  меняется с плюса на минус. В диапазоне  $k > k_1$  эта компонента отрицательна при рассмотренных значениях  $k$ . Учёт нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки уменьшает величину модуля компоненты при фиксированном значении  $k$ . Увеличение упругости пластинки приводит к росту абсолютной величины сдвиговой частоты. Аналогичный эффект наблюдается и при увеличении толщины ледяной пластинки. Характер распределения сдвиговой

частоты второго порядка малости по волновому числу при фиксированном  $\epsilon$  для  $a_1 < 0$  в качественном отношении практически такой же, как и при  $a_1 > 0$  (рис. 5).



**Рис. 6.** Распределение частоты колебаний, формируемых при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, по волновому числу при  $a_1 > 0$  (линии 1, 3) и  $a_1 < 0$  (линии 2, 4), если  $h = 1$  м (линии 1, 2) и  $h = 0,5$  м (линии 3, 4)

**Fig. 6.** Distribution of the fluctuations frequency formed in the case of nonlinear interaction of wave harmonics, by wavenumber when  $a_1 > 0$  (the lines 1, 3) and  $a_1 < 0$  (the lines 2, 4), in case  $h = 1$  m (the lines 1, 2) and  $h = 0,5$  m (the lines 3, 4)



**Рис. 7.** Влияние учёта нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки на фазовую скорость сформированной изгибно-гравитационной волны

**Fig. 7.** The influence of taking into account the nonlinearity of vertical displacement acceleration of the plate on the phase velocity of the generated flexural-gravitational wave

Распределение частоты колебаний ( $\sigma = \sqrt{kg}(\tau + ak\sigma_1 + a^2k^2\sigma_2)$ ), формируемых при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, по волновому числу приведено на рис. 6. Здесь линии 1, 3 приведены для  $a_1 > 0$ , а линии 2, 4 – для  $a_1 < 0$ . Линиям 1, 2 отвечает толщина пластинки 1 м, а линиям 3, 4 – толщина 0,5 м. Штриховые кривые показывают распределение частоты колебаний при учете нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки при ее изгибной деформации, а сплошные линии – без учета. Как и следовало ожидать, учет нелинейности ускорения приводит к увеличению частоты колебаний. Растет  $\sigma$  и при увеличении толщины упругой пластинки. Смена знака амплитуды  $a_1$  с плюса на минус уменьшает значение частоты колебаний при фиксированном волновом числе.

Влияние учета нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки при ее изгибе на фазовую скорость сформированной изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды иллюстрируют графики  $v(k)$ , изображенные на рис. 7 для  $k > k_1$ . Они получены при  $a_1 > 0$ ,  $H = 100$  м,  $h = 1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$   $\text{Н/м}^2$  как с учетом (штриховая линия), так и без учета (тонкая сплошная линия) нелинейности вертикального ускорения. Толстая сплошная линия представляет фазовую скорость в линейном приближении. Анализ результатов численных расчетов в рассматриваемом диапазоне волновых чисел показывает, что учет нелинейности обусловил увеличение скорости перемещения волны изгиба. При этом увеличение скорости при учете

нелинейности вертикальных смещений больше, чем без ее учета. Отметим, что с ростом толщины пластинки или модуля ее упругости растет и значение фазовой скорости [9, 17].

Если  $a_1 < 0$ , то значения  $v(k)$  в случае учета нелинейности ускорения меньше, чем без учета. При этом  $v(k)$  как при учете, так и без учета нелинейности ускорения принимает меньшие значения, чем в линейном приближении.

В диапазоне волновых чисел  $k < k_4$  (длинные волны) влияние характеристик пластинки на распределение  $v$  по  $k$  практически не проявляется [9, 17]. Зависимости  $v(k)$  с учетом и без учета слагаемых  $F_2^0$  и  $F_3^0$  в выражении (2.4) совпадают между собой как для  $a_1 > 0$ , так и для  $a_1 < 0$ . Причем в случае  $a_1 > 0$  график  $v(k)$  проходит выше соответствующего линейному приближению, а в случае  $a_1 < 0$  ниже, хотя и незначительно.

**Заключение.** На основе построенных методом многих масштабов асимптотических разложений до величин третьего порядка малости для потенциала скорости движения однородной жидкости конечной глубины и для возвышения поверхности пластинка – жидкость (лед – вода) выполнен анализ фазовых характеристик возмущений, формируемых при нелинейном взаимодействии двух бегущих периодических волн. Дана оценка вклада обусловленных нелинейностью величин сдвиговой частоты колебаний в приближении первого и второго порядка малости. Показана зависимость этих величин от знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники и от учета нелинейности ускорения вертикальных смещений ледяной пластинки. Смена знака амплитуды второй гармоники приводит к изменению знака сдвиговой компоненты частоты в первом приближении. Влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки проявляется в увеличении этой сдвиговой компоненты частоты.

Учет нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки уменьшает величину модуля сдвиговой компоненты второго порядка малости. Увеличение упругости (или толщины) пластинки приводит к росту абсолютной величины этой компоненты.

Частота колебаний с учетом обусловленных нелинейностью сдвиговых компонент при волновых числах, больших максимального критического значения, увеличивается при учете нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки. Частота растет и при увеличении толщины пластинки, а смена знака амплитуды второй гармоники с плюса на минус уменьшает значение частоты при фиксированном волновом числе. В этом диапазоне волновых чисел нелинейность обуславливает увеличение скорости перемещения волны изгиба при положительном значении амплитуды второй гармоники. Рост скорости при учете нелинейности ускорения вертикальных смещений больше, чем без учета. При отрицательном значении амплитуды второй гармоники в случае учета нелинейности ускорения фазовая скорость меньше, чем без учета.

В длинноволновом диапазоне при волновых числах, меньших минимального критического значения, влияние характеристик пластинки на распределение фазовой скорости по волновому числу практически не проявляется.

Распределения фазовой скорости по длине волны с учетом и без учета нелинейности ускорения совпадают между собой как при положительном, так и при отрицательном значении амплитуды второй гармоники. Причем для положительного значения амплитуды величина фазовой скорости больше, а для отрицательного – меньше, чем в линейном приближении.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0003.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейсин Д. Е.* Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 163–167.
2. *Ткаченко В. А., Яковлев В. В.* Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость-пластинка // Прикладная механика. 1984. Т. 20, № 3. С. 70–75.
3. *Squire V. A.* A theoretical, laboratory, and field study of ice-coupled waves // J. Geophys. Res. 1984. Vol. 89, iss. C5. P. 8069–8079. doi:10.1029/JC089iC05p08069
4. *Schulkes R. M. S. M., Sneyd A. D.* Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 186. P. 25–46. <https://doi.org/10.1017/S0022112088000023>
5. *Duffy D. G.* The response of floating ice to a moving, vibrating load // Cold Reg. Sci. Technol. 1991. Vol. 20, iss. 1. P. 51–64. [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(91\)90056-M](https://doi.org/10.1016/0165-232X(91)90056-M)
6. Moving loads on ice plates / V. A. Squire [et al.]. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996. 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1649-4>
7. *Pogorelova A. V., Kozin V. M.* Flexural-gravity waves due to unsteady motion of point source under a floating plate in fluid of finite depth // J. Hydrodynam. 2010. Vol. 22, iss. 5, suppl. 1. P. 71–76. doi:10.1016/S1001-6058(09)60172-4
8. *Стурова И. В.* Влияние ледяного покрова на колебания жидкости в замкнутом бассейне // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43, № 1. С. 128–135.
9. *Bukatov A. E., Cherkosov L. V.* Transient vibrations of an elastic plate floating on a liquid surface // Soviet Applied Mechanics. 1970. Vol. 6, iss. 8. P. 878–883. <https://doi.org/10.1007/BF00889434>
10. *Bukatov A. E., Bukatov A. A.* Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // Int. J. Offshore Polar. 1999. Vol. 9, no. 3. P. 161–166.
11. *Гольдштейн Р. В., Марченко А. В.* О длинных волнах в системе ледяной покров – жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда. Л. : Гидрометеиздат, 1989. С. 188–205.
12. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 3. С. 146–154.
13. *Ильичев А. Т.* Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода – лед // Успехи математических наук (УМН). 2015. Т. 70, вып. 6. С. 85–138. doi:10.4213/rm9690
14. *Bukatov A. E., Bukatov A. A.* Finite-amplitude waves in a homogeneous fluid with a floating elastic plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2009. Vol. 50, iss. 5. P. 785–791. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0107-x>
15. *Bukatov A. E., Bukatov A. A.* Interaction of Surface Waves in a Basin with floating broken ice // Physical Oceanography. 2003. Vol. 13, iss. 6. P. 313–332. <https://doi.org/10.1023/B:POCE.0000013230.35798.a4>
16. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 455 с.
17. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л. : Гидрометеиздат, 1967. 215 с.

*Сведения об авторах:*

**Букатов Алексей Евтихиевич**, заведующий отделом океанографии ФГБУН МГИ (Севастополь, Россия), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: 0000-0001-8666-7938.

**Букатов Антон Алексеевич**, старший научный сотрудник отдела морских информационных систем и технологий, ФГБУН МГИ (Севастополь, Россия), кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0002-1165-8428, [newisland@list.ru](mailto:newisland@list.ru).