

## Обобщенная реологическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним трением и эффективной сжимаемостью

В. А. Лисютин

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия  
E-mail: vlisiutin@mail.ru

Поступила в редакцию 19.08.2018 г., после доработки – 01.10.2018 г.

**Введение.** В статье представляется квазидвухфазная теория распространения продольной волны в неконсолидированных морских осадках. В морских осадках могут распространяться продольная и сдвиговая волны. Акустическими характеристиками этих волн являются фазовые скорости, коэффициенты затухания и их частотные зависимости. Экспериментально показано, что в сухих гранулированных средах коэффициент затухания прямо пропорционален частоте. В насыщенных средах отмечаются отклонения от этого закона, откуда следует, что существует два физических механизма потерь – внутреннее и вязкое трение.

**Материалы и методы.** Среда в сухом состоянии представляется в виде обобщенного элемента Кельвина – Фойгта, состоящего из пружины и прумпфера – элемента, сочетающего консервативные свойства пружины и диссипативные свойства демпфера. С применением математического аппарата дробных производных выводятся волновое и дисперсионное уравнения, включающие только внутреннее трение. Затем выводится новое двухфазное уравнение состояния, где часть жидкости считается связанной с твердой фазой, а часть считается подвижной. Подстановка этого уравнения состояния в волновое уравнение приводит к квадратному дисперсионному уравнению, корни которого дают волновые числа двух типов волн – быстрой и медленной (теория *Grain Shearing + Effective Compressibility*, или сокращенно *GS + EC*). Согласно теории *GS + EC*, существенная дисперсия скорости звука и отклонения частотной зависимости затухания от линейного закона в диапазоне средних частот возникают по причине изменения сжимаемости среды.

**Анализ результатов.** Результаты теории *GS + EC* сопоставляются с экспериментальными данными измерений фазовой скорости и затухания, взятыми из открытых источников. Показывается, что на низких частотах неконсолидированная среда обладает большей, чем на высоких частотах, сжимаемостью вследствие вытеснения флюида из сужений порового пространства.

**Обсуждение и заключение.** Вязкая диссипация проявляется на средних частотах, когда флюид еще мобилен, но и вязкие силы достаточно велики. На высоких частотах гранулы и флюид колеблются вместе и затухание в среде возникает за счет сил внутреннего трения.

**Ключевые слова:** неконсолидированные морские осадки, межгранулярное трение, вязкая диссипация, дисперсия фазовой скорости, коэффициент затухания, тангенс потерь.

**Благодарности:** исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополя в рамках научного проекта № 18-42-920001.

**Для цитирования:** Лисютин В. А. Обобщенная реологическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним трением и эффективной сжимаемостью // Морской гидрофизический журнал. 2019. Т. 35, № 1. С. 85–100. doi:10.22449/0233-7584-2019-1-85-100

# Generalized Rheological Model of the Unconsolidated Marine Sediments with Internal Friction and Effective Compressibility

V. A. Lisyutin

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

e-mail: vlisiutin@mail.ru

*Introduction.* The quasi-two-phase theory of propagation of an elastic wave in the unconsolidated marine sediments is represented. The longitudinal and shear waves can propagate in marine sediments. The phase velocities, the attenuation coefficients and their frequency dependences are the acoustic features of these waves. It is shown experimentally that in the dry granular media, the attenuation coefficient is directly proportional to frequency. Whereas in the saturated media, the deviations from this law are noted whence it follows that there are two physical loss mechanisms: the internal and viscous friction.

*Data and methods.* The medium in a dry state is represented as a generalized Kelvin-Voigt element consisting of a spring and a springpot that is an element combining the spring conservative properties and the dashpot dissipative properties. The wave equation and the dispersion relation including the internal friction only are deduced using the mathematical apparatus of the fractional derivatives. Then, a new two-phase equation of state is deduced, where a part of the fluid is considered to be associated with a solid phase and another part is mobile. Substitution of the equation of state into the wave equation results in a quadratic dispersion relation whose roots yield the wave numbers of two types of the waves, namely the fast and slow ones (Grain Shearing + Effective Compressibility or GS + EC theory). According to the GS + EC theory, significant sound speed dispersion and deviations of the attenuation frequency dependence upon the linear law in the mid-frequency range occur due to a change of the medium compressibility.

*Results.* The results of the GS + EC theory are compared with the experimental measurement data on of phase velocity and attenuation taken from the open sources. It is shown that at low frequencies, the unconsolidated medium is of greater compressibility than at high ones that is a result of the fluid displacement from the pore space narrowing.

*Discussion and conclusion.* Viscous dissipation is manifested at the medium frequencies, when the fluid is still mobile and the viscous forces are rather significant. At high frequencies, the granules and the fluid oscillate together, and attenuation in the medium arises due to the forces of the internal friction.

**Keywords:** unconsolidated marine sediments, intergranular friction, viscous dissipation, phase velocity dispersion, attenuation coefficient, loss tangent.

**Acknowledgements:** the investigation is carried out at the financial support of RFBR and the city of Sevastopol within the framework of the scientific project № 18-42-920001.

**For citation:** Lisyutin, V.A., 2019. Generalized Rheological Model of the Unconsolidated Marine Sediments with Internal Friction and Effective Compressibility. *Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal*, [e-journal] 35(1), pp. 85-100. doi:10.22449/0233-7584-2019-1-85-100 (in Russian).

**Введение.** Морское дно мелководной части Черного моря не только вмещает природные и культурные ресурсы, но и является накопителем антропогенных загрязнений. Основной природный ресурс дна – песок, культурный – археологические артефакты, а мониторинг состояния дна может дать информацию об экологическом состоянии всей акватории [1].

С точки зрения акустики мелкое море представляет собой волновод, ограниченный сверху полностью отражающей поверхностью, снизу – частично отражающим слоистым дном. Главный объект исследования в акустике мелкого моря – дно и морские осадки [2]. Наибольший интерес представляет пористый водонасыщенный переходный слой дна толщиной десятки

метров, состоящий из неконсолидированных осадков. В переходном слое могут распространяться упругие волны двух типов: продольная (компрессионная,  $p$ -волна) и сдвиговая ( $s$ -волна) [2–4]. Акустическими характеристиками этих волн, а соответственно, и дна являются фазовые скорости  $c(f)$  (т. е. определенные на тональной частоте в безграничной среде), коэффициенты затухания  $\alpha(f)$  ( $\alpha$ , дБ/м = 8,69  $\alpha$ , Нп/м) и их частотные зависимости.

В акустике мелкого моря применяется целый ряд более или менее эффективных методов исследования дна [2, 3, 5–11]. Все эти методы так или иначе решают задачу восстановления акустических характеристик дна по измеренному в водном слое звуковому полю. Если измерения проводятся на тональной частоте, тогда информация о среде заключена в пространственной интерференционной структуре поля, осредненном законе спадаания либо вертикальных профилях мод [2, 5–7]. Следует отметить, что для определения акустических характеристик осадков тонально-пространственные методы должны применяться с осмотрительностью, поскольку результат инверсии зависит от изначально выбранной модели слоистого дна. Более информативными являются методы, основанные на анализе поля импульсного источника в широкой полосе частот [7–10]. Здесь информация о дне заключена в дисперсионно-диссипативных характеристиках волноводных мод. Адекватность результатов широкополосной инверсии может быть повышена, если известны результаты профилирования дна, выявляющие его слоистую структуру [8].

При реализации любого из перечисленных методов инверсии требуется решение дисперсионного уравнения, связывающего фазовые скорости упругих волн в дне с фазовыми скоростями нормальных волн (мод), распространяющихся в волноводе по горизонтали [2].

Заслуживают отдельного внимания также и неволноводные методы исследования дна, основанные на анализе частотно-угловых зависимостей коэффициента отражения звука, которые можно определить с борта движущегося судна, используя акустические профилографы [11].

В акустике мелкого моря в первом приближении сдвиговую волну считают нераспространяющейся (жидкое дно), скорость звука в дне – не зависящей от частоты, а коэффициент затухания – прямо пропорциональным частоте, что позволяет представлять волновое число в дне в виде

$k_p = \frac{\omega}{c_p} - i\alpha_p = \frac{\omega}{c_p}(1 - i\beta_p)$ , где  $c_p$  – скорость звука;  $\alpha_p$  – коэффициент затухания, Нп/м;  $\beta_p$  – постоянный тангенс потерь [2],

$$\beta_p = \frac{\alpha_p c_p}{\omega} = -\frac{\text{Im}(k_p)}{\text{Re}(k_p)}. \quad (1)$$

Предположение о прямой пропорциональности затухания и частоты дает возможность экстраполировать результаты лабораторных измерений, выполненных на частотах сотни кГц в низкочастотную область [3]. Такая модель осадков и дна хорошо соответствует основной модели волновода мелкого моря, где дно представляется в виде однородного полупространства (волновод Пекериса). Полупространство является осреднением всех слоев, поэтому модель Пекериса и в настоящее время используется наиболее часто [5–10].

При расчетах звуковых полей на тональной частоте представления дна в виде жидкого полупространства часто вполне достаточно [2, 6]. Ситуация меняется, когда ставится задача инверсии акустических и физических характеристик дна и требуются расчеты в широкой полосе частот [8–11]. Здесь правильное отображение частотных зависимостей затухания и фазовой скорости может иметь принципиальное значение.

**Состояние проблемы и постановка задачи.** В сухих песках, горных породах, грунтах коэффициент затухания действительно пропорционален первой степени частоты ( $\alpha \sim \omega^1$ ), или, что эквивалентно, тангенс потерь постоянен ( $\beta = \text{const}$ ). Измерения в водонасыщенных средах обнаруживают отклонения от этой зависимости в основном для сред с высокой проницаемостью, например крупного песка [3, 4]. Такая частотная зависимость затухания предполагает как минимум два физических механизма потерь. Основной механизм – внутреннее трение, второй – вязкая диссипация при движении жидкости относительно гранул. Внутреннее трение приводит к прямо пропорциональной зависимости между затуханием и частотой, вязкое трение – к отклонениям от этой зависимости [4].

Актуальной проблемой акустики морских осадков является разработка адекватной модели контакта между гранулами в неконсолидированной насыщенной среде. Известные модели можно подразделить на две категории: линейные, основанные на законе Гука, и микронелинейные, базирующиеся на феноменологическом соотношении между напряжением и деформацией.

На линейной модели контакта построена наиболее известная теория Био – Столла и ее современные интерпретации [12–14]. Линейная модель предполагает упругий скелет в неконсолидированной среде и показывает на высоких частотах затухание  $\alpha \sim \omega^{1/2}$ , что не соответствует измерениям.

Микронелинейная модель контакта положена в основу *GS* (*Grain Shearing*) и *VGS* (*Viscous GS*) теории, разработанной М. Букингемом [15, 16]. Согласно *GS*-теории, распространение и затухание упругих волн в осадках объясняется трением между гранулами, которое придает среде продольную и поперечную жесткость, и в то же время вызывает потери энергии. *GS*-теория является однофазной, пренебрегает вязким трением и показывает частотную зависимость затухания  $\alpha \sim \omega^1$ , что соответствует экспериментам только на высоких частотах [15]. В *VGS*-теории вязкое трение симулируется подобным жидкости реологическим элементом, что не позволяет связать входные параметры теории с физическими параметрами среды [16].

В конечном итоге океанологической задачей инверсии является восстановление физических характеристик дна, для чего необходима модель, связывающая акустические и физические характеристики морских осадков.

Целью настоящей статьи является развитие двухфазной теории, основанной на подходящем феноменологическом уравнении состояния сухой среды. Теория первоначально учитывает только внутреннее трение, но подключает затем возможность движения флюида в представлении об эффективной сжимаемости. Поскольку сдвиг не связан с изменением объема, сдвиговые волны рассматриваться не будут. Математически компактную модель однофазной среды можно построить, используя аппарат дробных производных [17, 18].

Представляемая здесь теория является развитием более простой модели, изложенной в работе [19], основывается на аналогичных положениях и сохраняет все принятые там обозначения.

**Однофазная модель среды.** Рассмотрим безграничную однородную двухкомпонентную среду с пористостью  $P$ , состоящую из минеральных частиц и жидкости. Равновесная плотность  $\rho_m$  и равновесный (суспензионный) объемный модуль упругости  $K_m$  двухкомпонентной среды определяются формулами [3]:  $\rho_m = P\rho_f + (1 - P)\rho_g$ ,

$$\frac{1}{K_{m(ean)}} = \frac{P}{K_f} + \frac{1-P}{K_g}, \quad (2)$$

где  $\rho_f, \rho_g, K_f, K_g$  – плотности и модули упругости флюида и твердой фазы соответственно. Скорость звука в такой суспензии будет равна  $c_0 = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}}$ .

Предположим пока, что движения флюида нет, но между гранулами среды имеется взаимодействие, условно называемое микротрением. Название условно потому, что при малых деформациях законы микротрения существенно отличаются от кулоновского сухого или вязкого трения, а физическая природа микротрения является дискуссионным вопросом [15–18, 19].

Следуя вначале работам [17–19], представим модель среды в виде обобщенного элемента Кельвина – Фойгта (соединенных параллельно пружины и прумпфера (*springpot*) – элемента, сочетающего консервативные свойства пружины и диссипативные свойства демпфера) (рис. 1). Пружина представляет чистую (вещественную) упругость двухкомпонентной среды  $K_m$ , прумпфер – межгранулярное взаимодействие, законы которого предполагают упруго-пластичный характер деформации контактов между гранулами. Уравнение состояния прумпфера имеет вид:  $\sigma(t) = M\tau^n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n}$ , где  $M$  – модуль плоской волны;  $\tau$  – константа, отражающая баланс между накоплением и диссипацией энергии;  $n$  – порядок дробной производной, определяющий величину показателя в степенном законе частотной зависимости затухания;  $0 < n < 1$  (показатель стресс-релаксации [15]). Тогда механическое напряжение  $\sigma$  на границе элементарного объема среды связано с деформацией уравнением состояния

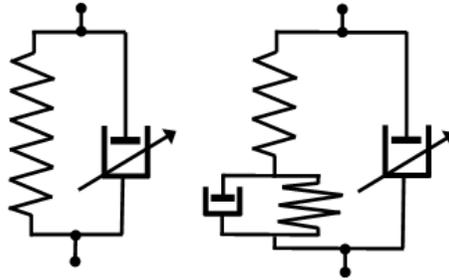
$$\sigma(t) = K_m \varepsilon(t) + M\tau^n \frac{\partial^n \varepsilon(t)}{\partial t^n}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \text{div}(\mathbf{u})$  – объемная деформация среды;  $\mathbf{u}$  – вектор смещения среды.

Рассмотрим плоскую компрессионную волну вида  $u_x = U_0 \exp(i\omega t - ik_p x)$ . Подставляя  $\varepsilon = \text{div}(\mathbf{u})$  в уравнение (3), взяв  $x$  – компоненту дивергенции от полученного выражения и применяя уравнение движения в виде

$\rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div} \vec{\sigma}$ , получаем дробное волновое уравнение для продольной компоненты вектора смещения:

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = K_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + M\tau^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \quad (4)$$



**Р и с. 1.** Реологические модели простого нелинейного контакта и контакта, заполненного флюидом

**F i g. 1.** Rheological models the simple non-linear contact and the one filled with fluid

Подставив в уравнение (4) гармоническую зависимость и определив комплексную фазовую скорость волны как  $\tilde{c}_p = \frac{\omega}{k_p}$ , получаем дисперсионное уравнение

$$\tilde{c}_p = \sqrt{\frac{K_m + \gamma(i\omega t_0)^n}{\rho_m}}, \quad (5)$$

где  $\gamma = (\tau/t_0)^n M$  – эквивалентная жесткость неконсолидированной среды с межгранулярным взаимодействием, Па;  $t_0 = 1$  с – константа, восстанавливающая правильную физическую размерность. Величина  $\gamma$  может быть определена только с помощью инверсии экспериментальных данных. Уравнение (5) совпадает с дисперсионным уравнением GS-теории [15, 19].

Вещественные фазовые скорости  $c_p$  и коэффициенты затухания  $\alpha_p$  могут быть получены из комплексных фазовых скоростей:  $c_p = (\text{Re}(\tilde{c}_p^{-1}))^{-1}$ ,  $\alpha_p = -\omega \text{Im}(\tilde{c}_p^{-1})$ , Нп/м.

**Модель квазидвухфазной среды с эффективной сжимаемостью.** Проведем мысленный эксперимент «сжатие среды в рубашке с дренажем» [12], где объем среды, включающий множество зерен, окружён эластичной рубашкой и сжимается внешним давлением  $p = -\sigma$  (3). Жидкость имеет возможность вытекать из рубашки через поры в виде цилиндрических трубок.

Если жидкость неподвижна, не вытекает из рубашки, то объёмный модуль среды определяется формулой (2). Если жидкость подвижна, то часть ее ( $= \Delta V_f$ ) будет выжиматься из выделенного объема ( $= V_u$ ) среды. Эту часть жидкости представим в виде мягкой пружины и демпфера, соединив их, как показано на рис. 1. Мягкости будут складываться, и сжимаемость среды будет иметь вид [20]

$$K_u^{-1} = \frac{1}{p} \frac{\Delta V_u}{V_u} = \frac{1}{K_m} + \frac{1}{p} \frac{\Delta V_f}{V_u}, \quad (6)$$

где  $V_u$  – кубический объем среды с линейным размером  $l$ , малым по сравнению с длиной волны, но большим по сравнению с сечением пор. Тогда вместо  $K_m$  в уравнении (3) надо писать  $K_u$ :  $-p = \sigma = K_u \varepsilon(t) + M \tau^n \frac{\partial^n \varepsilon(t)}{\partial t^n}$ .

Рассмотрим плоскую волну  $p = p_0 \exp(i\omega t - ik_p x)$ , распространяющуюся вдоль оси  $X$ . Вычислим объем выжатой жидкости  $\Delta V_f$ , предполагая пока, что поры имеют постоянное цилиндрическое сечение, не пересекаются и ориентированы вдоль оси  $X$ . Решая уравнение Навье – Стокса [20], можно получить формулу для средней по сечению поры относительной скорости течения флюида:

$$u_{av} = \frac{p_0 k_p (\rho_g - \rho_f)}{\omega \rho_g \rho_f} \left( 1 - \frac{2J_1(i^{3/2} w)}{i^{3/2} w J_0(i^{3/2} w)} \right), \quad (7)$$

где

$$w = \sqrt{\frac{a^2 \rho_f}{\eta}} \omega. \quad (8)$$

Здесь  $J_{0,1}$  – функции Бесселя;  $a$  – радиус пор;  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости, Па·с. Обозначим функцию частотной коррекции в формуле (7) как  $F_C(w)$ :

$$F_C(w) = 1 - \frac{2J_1(i^{3/2} w)}{i^{3/2} w J_0(i^{3/2} w)}. \quad (9)$$

Диапазон изменения действительной части  $F_C(w)$  – от 0 до 1.

Вычислим объем флюида, протекающий по одной из пор:

$$\Delta V_0 = \pi a^2 u_{av} T = \pi a^2 u_{av} \frac{l}{c_p} = \frac{\pi a^2 u_{av} l k_p}{\omega}. \text{ Тогда, считая, что в выделенном объеме}$$

заключено  $N$  пор, последнее слагаемое в уравнении (6) можно записать

$$\text{как } \frac{1}{p} \frac{\Delta V_f}{V_u} = -\frac{k_p^2 (\rho_g - \rho_f)}{\omega^2 \rho_g \rho_f} \frac{\pi a^2 l N}{V_u} F_C. \text{ Подставляя это выражение в уравнение}$$

(6), получаем сжимаемость неконсолидированной среды в виде

$$K_u^{-1}(\omega) = \frac{1}{K_m} - \frac{k_p^2 (\rho_g - \rho_f)}{\omega^2 \rho_g \rho_f} \frac{\pi a^2 l N}{V_u} F_C(w). \quad (10)$$

Величина  $P^* = \frac{\pi a^2 l N}{V_u}$  составляет геометрическую пористость среды. Од-

нако с точки зрения рассматриваемой динамической задачи о течении флюида пористость  $P$ , входящая в формулу для  $K_m$ , и  $P^*$  различаются. Пористость  $P$  измеряется в соответствии с определением ( $P = V_f / V_{\text{media}}$ ) как объем жидкости, содержащийся в единичном объеме среды. При лабораторных измерениях

песок высыпают в жидкость, и жидкость будет заполнять весь внутрипоровый объем. В реальной среде часть общего объема пор может не входить в лабиринт взаимосвязанных пор, образуя изолированные полости, в которых течение отсутствует. Долю общего объема среды, образуемую порами, в которых возможно течение Био, будем называть перколяционной пористостью и обозначать  $\phi$ . Перколяционную пористость надо определять через проницаемость среды [19].

Свяжем перколяционную пористость с проницаемостью, сравнив закон Дарси [3] с формулой Пуазейля, что дает

$$\phi = \frac{s\xi k}{a^2}, \quad (11)$$

где  $k$  – проницаемость среды,  $m^2$ ;  $\xi$  – извилистость;  $s$  – структурный коэффициент, зависящий от геометрии порового пространства, для круглых труб принимается  $s = 8$ , для сферических гранул  $s\xi \approx 15 \div 20$ .

При выводе уравнения (10) предполагалось, что все цилиндрические поры ориентированы вдоль направления распространения плоской волны. На самом деле ориентация пор равновероятна в трех направлениях. Внутри пор, перпендикулярных к направлению распространения волны движения флюида не будет, поэтому второе слагаемое в уравнении (10) следует дополнить поправочным коэффициентом  $S_v$ , величина которого для изотропной среды  $S_v = 1/3$ .

Заменяя в уравнении (10)  $P^*$  на  $\phi$ , получаем

$$K_u^{-1} = \frac{1}{K_m} - S_v \phi \frac{(\rho_g - \rho_f) k_p^2}{\rho_g \rho_f \omega^2} F_C(w). \quad (12)$$

Вводя в выражение (12) обозначение  $A = \frac{(\rho_g - \rho_f)}{\rho_g \rho_f}$ , заменяя волновое число на комплексную фазовую скорость, имеем

$$K_u = \frac{K_m \tilde{c}_p^2}{\tilde{c}_p^2 - S_v \phi K_m A F_C(w)}. \quad (13)$$

Заменяя в уравнении (5)  $K_m$  на  $K_u$  (13), после преобразований получаем квадратное уравнение

$$\rho_m \tilde{c}_p^4 - (K_m + \gamma D + S_v \phi \rho_m K_m A F_C) \tilde{c}_p^2 + S_v \phi K_m \gamma D A F_C = 0, \quad (14)$$

где  $D = (i\omega t_0)^n$  – дисперсионный член внутреннего трения. Корни (14)

$$\tilde{c}_p^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (15)$$

где

$$a = \rho_m, \quad (16)$$

$$b = -(K_m(1 + S_v \phi \rho_m A F_C) + \gamma D), \quad (17)$$

$$c = S_v \phi K_m \gamma D A F_C, \quad (18)$$

дают квадраты комплексных фазовых скоростей двух типов волн – быстрой и медленной.

Таким образом, уравнения (14)–(18) включают два источника дисперсии: внутреннее трение, работающее во всем диапазоне частот, и *EC*-дисперсию – вязкое трение, проявляющееся только в определенной полосе частот. Представленную теорию будем называть далее *GS + EC* (*Grain Shearing + Effective Compressibility*).

Следует отметить, что уравнение (4) – однофазное, постоянная плотность в левой части (4) подразумевает, что частички жидкости и твердой фазы колеблются вместе. Теория *GS + EC*, в отличие от работы [19], пренебрегает инерционной связью между фазами среды, выявляя новую связь, реализующуюся через посредство изменения объемного модуля упругости среды. Инерционная связь будет оказывать влияние на дисперсию сдвиговой волны, которую мы здесь по договоренности считаем нераспространяющейся.

**Анализ полученного решения.** Если исключить возможность относительного движения флюида, положив  $\phi = 0$ , тогда  $a = \rho_m$ ;  $b = -(K_m + \gamma D)$ ;  $c = 0$ ;  $K_u = K_m$ , и формулы (15) и (5) совпадают, т. е. теория *GS + EC* переходит в *GS*-теорию.

Для подразделения всего диапазона частот на низкие и высокие, определим в уравнении (8) характерное время  $\tau_r = a^2 \rho_f / \eta$  и релаксационную частоту  $f_r = 1 / \tau_r$ ,  $\omega_r = 2\pi / \tau_r$ , тогда уравнение (8) принимает вид  $w = \sqrt{\omega \tau_r} = \sqrt{2\pi f / f_r}$ .

На низких ( $f \ll f_r$ ) частотах  $\text{Re}(F_c) \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}(F_c) \rightarrow 0$ ,  $K_u \approx K_m$ . В этом случае  $a \approx \rho_m$ ,  $b = -(K_m + \gamma D)$ ,  $c \approx 0$  и теория *GS + EC* снова переходит в *GS*-теорию, т. е.  $\alpha \sim \omega^1$ .

На сейсмических частотах дисперсией можно пренебречь, считая  $D = 1$ , тогда  $c_{p0} = \sqrt{(K_m + \gamma) / \rho_m}$  – низкочастотный предел скорости звука.

Знак минус в уравнении (15) соответствует медленной волне Био. В быстрой волне частички среды колеблются в одном направлении, так что фазы сжатия твердой и жидкой компонент совпадают. Принято говорить, что в медленной волне колебания скелета и флюида противофазны. Физическая интерпретация медленной волны в неконсолидированной среде другая. Поскольку скелета нет, то нет и дальнедействующих упругих сил, возвращающих твердую фазу среды к положению равновесия, поэтому медленная волна – это осциллирующие потоки флюида, направленные от большего давления к меньшему – те диффузионные потоки выдавливания, которые и были учтены в уравнении (6). Наблюдать медленную волну можно, наступив ногой на водонасыщенный песок. Заметим, что в отличие от консолидированных сред, в которых медленная волна на высоких частотах становится распространяющейся, в неконсолидированной среде медленная волна будет существовать только на самых низких частотах, а на высоких, наоборот, исчезнет, поскольку гранулы и запертый флюид будут колебаться вместе.

**Сопоставление результатов теории *GS + EC* с экспериментальными данными.** Входными параметрами теории, определяющими фазовую скорость и коэффициент затухания, являются модуль межгранулярной жесткости  $\gamma$  и показатель стресс-релаксации  $n$ . Эти параметры определяются инверсией

экспериментальных данных. Форма дисперсионной кривой, т. е. отклонение коэффициента затухания от закона  $\alpha_p \sim f^1$ , определяется перколяционной пористостью – внутренним параметром модели, связывающим акустические и физические характеристики среды [19].

Хотя поры между гранулами песка отчетливо видны в микроскоп, трудно подобрать точное определение для характерного размера пор. Поэтому, инвертируя уравнение (11), будем считать, что  $a_0$  – это радиус трубчатых пор, соответствующий измеренным значениям пористости  $P$  и проницаемости  $\kappa$ .

Тогда  $a_0 = \sqrt{\frac{8\xi\kappa}{P}}$ . Это значение будет служить начальным приближением.

Наилучшая величина  $a$  может быть определена по частоте перегиба дисперсионных кривых [19].

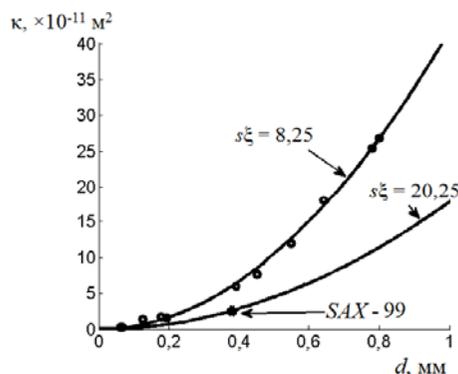
А. Тургут и Т. Ямамото [21] для случая непересекающихся пор с различными размерами дают обобщенную форму соотношения (11):  $\frac{s\xi\kappa}{\phi a^2} = \chi$ ,

$\chi = \exp(\sigma^2)$ , где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение размера пор в случае нормального закона распределения. Тогда  $\sigma^2 = \ln(\chi)$  – интересный параметр для инверсии, косвенно характеризующий гранулометрический состав среды.

Для определения структурного коэффициента  $s$  воспользуемся соотношением Козени – Кармана [3] в виде

$$\kappa = \frac{1}{36s\xi} \frac{P^3}{(1-P)^2} d^2, \quad (19)$$

где  $d$  – средний диаметр гранул. На рис. 2 показана зависимость измеренной проницаемости от диаметра гранул. Для этого из открытой печати взяты результаты измерений проницаемости среды из шариков различного размера (на рис. 2 – кружки), данные измерений, полученные в ходе экспериментов, которые будут проанализированы ниже (другие фигуры). Поскольку пористость среды из шариков зависит не от размера, а только от плотности упаковки, то, принимая случайную упаковку, считаем  $P = P_0 = 0,37$ . Построенная на основании расчетов по формуле (19) линия дает для шариков  $s\xi \approx 8,25$  [19].



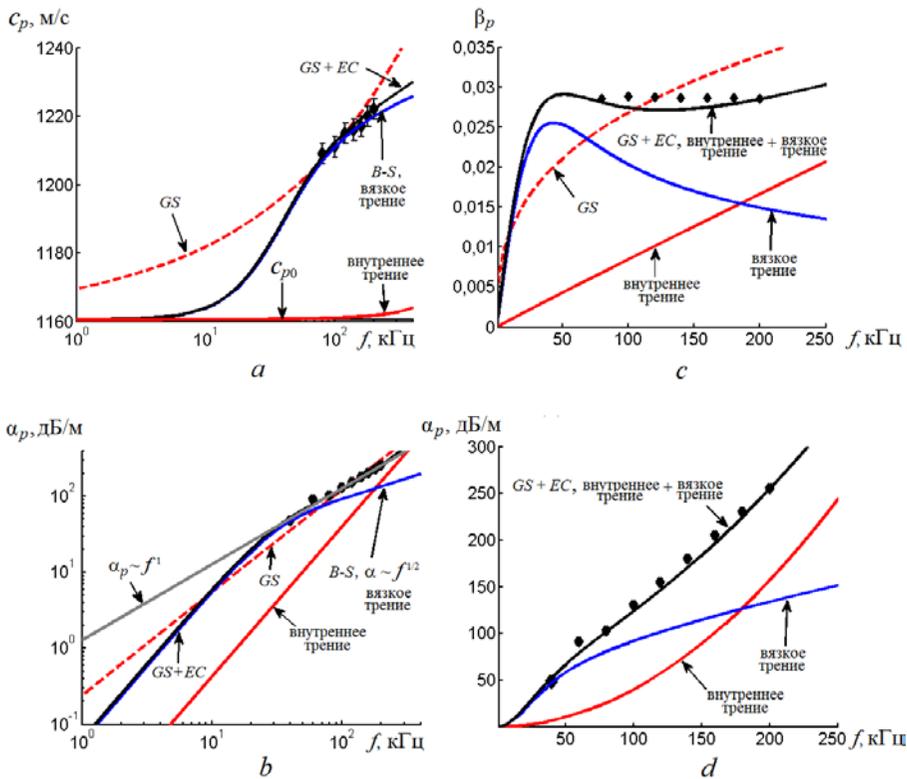
Р и с. 2. Гидравлическая проницаемость среды в зависимости от диаметра гранул

F i g. 2. Hydraulic permeability depending on the granules' diameter

Проанализируем вначале результаты тестового эксперимента «стеклянные шарики в силиконовом масле». Положим пока  $S_v = 1$  здесь и ниже. Данные взяты из работы [22]. Этот интересный эксперимент был специально осуществлен для проверки и сопоставления теорий GS и Био – Столла. Поскольку вязкость силиконового масла в 100 раз больше, чем у воды, ожидалось, что переходная область, где зависимость затухания меняется с  $\sim f^2$  на  $\sim f^{1/2}$ , сдвинется в сторону более высоких частот и окажется внутри диапазона измерений.

Входные параметры следующие:  $d = 0,4$  мм;  $\rho_g = 2500$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_g = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho_f = 968$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_f = 9,68 \cdot 10^8$  Па;  $\eta = 98 \cdot 10^{-3}$  Па·с;  $P = 0,36$ ;  $\kappa = 8,3 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>;  $\xi = 1,47$ ;  $a_0 = 5,25 \cdot 10^{-5}$  м.

Графики частотных зависимостей фазовой скорости, затухания и двух компонент, обусловленных влиянием внутреннего и вязкого трения, приведены на рис. 3, *a*, *b*. Здесь же показаны и дисперсионные кривые теории Био – Столла (*B-S*), на рис. 3, *a*, *b* они совпадают с вязкой компонентой скорости и затухания.



**Р и с. 3.** Частотные зависимости скорости звука (*a*), коэффициента затухания (*b*), тангенса потерь (*c*), затухания (*d*) и компонент трения. Эксперимент «стеклянные шарики в силиконовом масле» (*a*, *b* – логарифмические координаты; *c*, *d* – линейные координаты)

**Fig. 3.** Frequency dependences of sound speed (*a*), attenuation coefficient (*b*), loss tangent (*c*), attenuation (*d*) and friction components. Experiment “glass beads in the silicone oil” (*a*, *b* – the logarithmic coordinates; *c*, *d* – the linear coordinates)

Результаты инверсии следующие:  $a = 0,9a_0$ ;  $\gamma = 98$  Па;  $n = 0,97$ ;  $s\xi = 8,25$ ;  $\chi = 2,97$ ;  $\phi = 0,115$ ;  $\sigma^2 = 1,09$ .

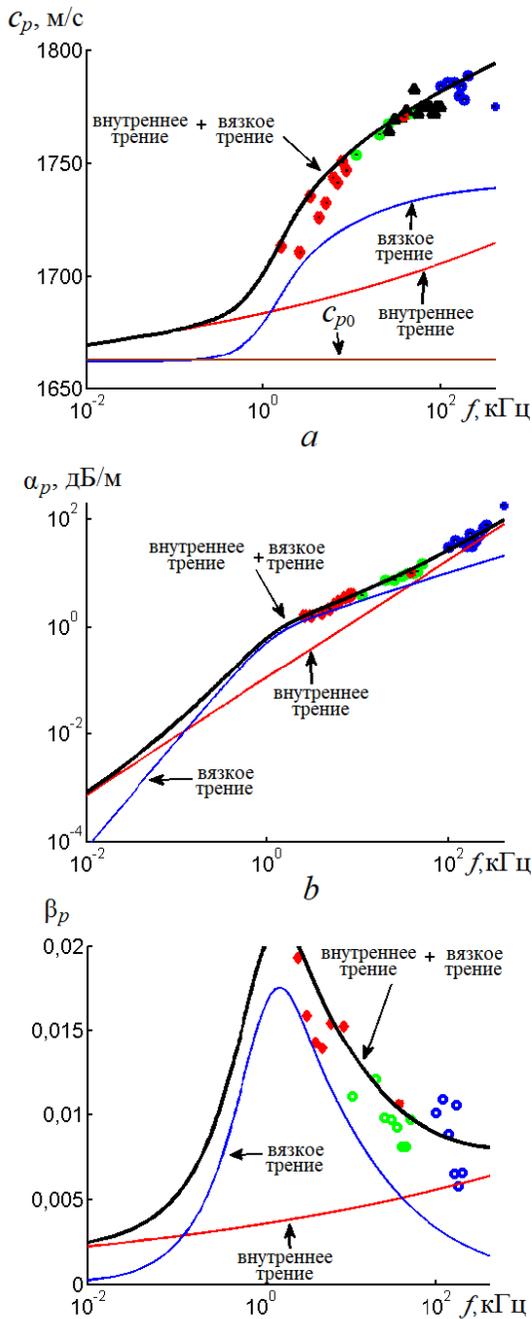
Как видно из рис. 3, *b*, частотная зависимость затухания следует закону  $\alpha_p \sim f^1$ , из чего авторами работы [22] был сделан вывод, что теория Био – Столла не подтверждается, и внутреннее трение вносит определяющий вклад в общее затухание (ниже будет показано, что этот вывод, вероятно, ошибочен). С другой стороны, не подтверждается и *GS*-теория – соответствующая линия пересекает экспериментальные тренды  $c_p(f)$  и  $\alpha_p(f)$ , т. е. только внутренним трением объяснить положение экспериментальных точек тоже невозможно. Графики теории *GS + EC* показывают очень хорошее соответствие, плавно следуя за экспериментальными точками.

На рис. 3, *c, d* показаны частотные зависимости двух компонент затухания – внутреннего и вязкого трения. Компоненты скорости и затухания вычисляли, полагая в уравнениях (17), (18) поочередно:  $\phi = 0$  (только внутреннее трение);  $n = 0$  (только вязкое трение). Сопоставление графиков показывает, что только суммарным влиянием внутреннего и вязкого трения можно объяснить расположение экспериментальных точек. Компоненты вязкого и внутреннего трения в данном эксперименте случайно сложились таким удивительным образом, что дисперсия скорости в основном обусловлена консервативным влиянием флюида, внутреннее трение проявляется только на верхней границе частотного диапазона (рис. 3, *a*). Влияние же внутренней и вязкой компонент затухания (рис. 3, *b – d*) распределилось следующим образом: до середины диапазона измерений преобладает влияние вязкого трения, выше середины – внутреннего, но в сумме получилось  $\alpha \sim f^1$ ,  $\beta \approx \text{const}$ ! Еще раз подчеркнем, что зависимость  $\alpha \sim f^1$  получилась в данном эксперименте, вероятно, случайно, – такую зависимость показывает не исключительно внутреннее трение, а сумма внутреннего и вязкого трения!

Инверсия возвращает низкое значение межгранулярной жесткости и высокое значение показателя стресс-релаксации. Физически это можно объяснить наличием между контактирующими поверхностями вязкого масла, уменьшающего внутреннее трение на низких частотах, но препятствующего вытеснению этого флюида из межгранулярной щели на высоких частотах.

Проанализируем результаты измерений, имеющие для акустики мелкого моря наибольшую практическую значимость. Результаты получены в ходе морского эксперимента *SAX – 99 (Sediment Acoustics Experiment)* [16, 23]. Фазовые скорости и затухание продольной волны измерялись на месте различными системами на разных частотах. Общие входные параметры следующие:  $d = 0,379$  мм;  $\rho_g = 2690$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_g = 3,2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho_f = 1023$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_f = 2,395 \cdot 10^9$  Па;  $\eta = 1$  мПа·с;  $P = 0,385$ ;  $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>;  $\xi = 1,35$ ;  $a_0 = 2,65 \cdot 10^{-5}$  м. Алгоритм инверсии был настроен на наилучшее соответствие между экспериментальными точками и графиком тангенса потерь (1)  $\beta_p(f)$ . Поскольку тангенс потерь зависит и от скорости, и от затухания, он оказывается более чувствителен к изменению входных параметров.

Графики приведены на рис. 4. Результаты инверсии следующие:  $a = 0,95a_0$ ;  $\gamma = 1,05 \cdot 10^8$  Па;  $n = 0,114$ ;  $s = 15$ ;  $\chi = 9,9$ ;  $\phi = 0,08$ ;  $\sigma^2 = 2,29$  – гранулометрический состав среды достаточно широкий, естественный. Чтобы график наилучшим образом соответствовал точкам  $\beta_p(f)$ , приходится немного отклонить теоретическую линию  $c_p(f)$  вверх от середины экспериментального тренда, зато линия  $\alpha_p(f)$  проходит прямо по экспериментальным точкам. Как видно из дисперсионных кривых, по относительному вкладу сил внутреннего и вязкого трения можно выделить шесть диапазонов частот [19]:



**Рис. 4.** Частотные зависимости скорости звука (a), коэффициента затухания (b), тангенса потерь (c) и компонент трения. Эксперимент SAX – 99  
**Fig. 4.** Frequency dependences of sound speed (a), attenuation coefficient (b), loss tangent (c), attenuation (d) and friction components. Experiment SAX – 99

ствие рассеяния возрастает затухание, фазовая скорость уменьшается.

1) Очень низкие частоты. Вязкое трение много меньше внутреннего, затухание  $\alpha_p \sim f^1$ , слабая дисперсия за счет роста  $Re(\gamma D)$ . Сжимаемая среда вследствие легкого вытеснения флюида.

2) Частота ниже релаксационной. Этот диапазон – в окрестности первой точки пересечения частотной зависимости внутреннего и вязкого трения на рис. 4. Здесь вязкая диссипация по величине равна внутреннему трению. Скорость звука возрастает, частотная зависимость затухания изменяется от  $\alpha_p \sim f^1$  к  $\alpha_p \sim f^2$ .

3) Частота в окрестности релаксационной (максимум  $\beta(f)$ ). Здесь величина дисперсии  $\partial c_p / \partial f$  максимальна, вязкая диссипация больше чем внутреннее трение;

4) Частота выше релаксационной. Этот диапазон – в окрестности второй точки пересечения частотной зависимости внутреннего и вязкого трения на рис. 4. Величина дисперсии фазовой скорости  $\partial c_p / \partial f$  резко уменьшается, частотная зависимость затухания изменяет зависимость от  $\alpha_p \sim f^{0.5}$  к  $\alpha_p \sim f^1$ . Вязкая диссипация становится меньше сил внутреннего трения;

5) Высокие частоты – верхняя граница области интересов акустики даже очень мелкого моря. Здесь слабая дисперсия, затухание  $\alpha_p \sim f^1$ , вязкая диссипация много меньше сил внутреннего трения;

6) Очень высокие частоты, выше 400 кГц – верхняя граница применимости теории  $GS + EC$ . Длина волны становится сравнима с размером гранул, вслед-

Частотная зависимость тангенса потерь, представленная на рис. 4, *с*, может быть использована для априорной оценки потерь в аналогичной среде на различных частотах. Следует отметить хорошее совпадение результатов инверсии, приведенных в работе [10] ( $\beta_p = 0,0072$  на частотах около 150 Гц), с рис. 4.

**Выводы и обсуждение.** Теория Био – Столла успешно применяется океанологами и акустиками уже почти 50 лет, поскольку на низких и средних частотах (до 30 кГц – см. рис. 4) предсказывает акустические характеристики морских осадков правильно. Действительно, Р. Д. Столл для учета внутреннего трения добавляет к вещественным упругостям скелета мнимую часть и подбирает затем соотношение между вещественными и мнимыми частями так, чтобы получить соответствие с экспериментом [12]. Это соотношение оказывается верным на частоте согласования и ниже и только на высоких частотах – ошибочным (см. рис. 3). За время научной эксплуатации теории Био – Столла накоплен большой опыт восстановления входных параметров теории по измеренным акустическим характеристикам дна [5, 11, 13, 14, 22, 23]. Модель  $GS + EC$  включает все входные параметры теории Био – Столла, дает те же компоненты волнового поля и должна стать более адекватной заменой последней.

Уравнения теории  $GS + EC$  выведены путем замены однофазного уравнения состояния (3) на двухфазное (6), согласно которому сжимаемость среды уменьшается с ростом частоты, на что впервые обратила внимание И. А. Чабан в работе [20]. Плотность среды считалась постоянной, инерционное взаимодействие фаз не учитывалось, поэтому теорию  $GS + EC$  следует считать квазидвухфазной. Чтобы теория стала полностью двухфазной, должна быть, как в работе [19], изменена левая часть уравнения (4). Такое преобразование даст вторую компоненту вязкой дисперсии – инерционную. Именно инерционная компонента определяет отклонения затухания от закона  $\alpha \sim \sim \omega^1$ , обнаруженные и для сдвиговой волны [4], хотя и в меньшей степени. Если сдвиговая волна не рассматривается, необходимости в усложнении нет. Если же сдвиговую волну все-таки необходимо принимать во внимание, то дисперсионное уравнение для нее имеет вид [19]:  $\tilde{c}_s = \sqrt{\gamma_s (i\omega t_0)^m / \rho_{eff}}$ ,  $\rho_{eff} = \rho_m - \phi \rho_f F_C(w) / \xi$ , где  $\gamma_s$  – сдвиговая жесткость;  $m$  – сдвиговый показатель стресс-релаксации. Последние два параметра могут быть определены только экспериментально.

Согласно нашим представлениям, механизм вязкой дисперсии в неконсолидированной среде реализуется следующим образом. Способность флюида к истечению из щели между гранулами увеличивают сжимаемость среды на низких частотах. С другой стороны, с ростом частоты проявляется вязкость флюида, препятствующая его выдавливанию из щели в более емкую часть порового пространства, что приводит к возрастанию жесткости среды. Таким образом, морские осадки проявляют не только свойства реопексии [18] (что будет характерно и для сухого песка), но и свойства дилатантных жидкостей.

Представленная модель  $GS + EC$  будет теоретическим фундаментом дальнейших исследований акустических и физических характеристик дна шельфовой части Черного моря, объединенных общим научным вектором «акустическая океанология мелкого моря».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянный Е. И., Гуров К. И.* Исследование органического углерода и карбонатности в донных осадках шельфа южного побережья Крыма // *Морской гидрофизический журнал*. 2016. № 1. С. 62–72. doi:10.22449/0233-7584-2016-1-62-72
2. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* *Fundamentals of Shallow Water Acoustics*. New York : Springer, 2012. 540 p. (Underwater Acoustics / Eds. J. A. Simmen [et al.]) URL: <https://book.org/book/2078679/2fe5e9> (date of access: 20.01.2018).
3. *Jackson D. R., Richardson M. D.* *High-Frequency Seafloor Acoustics*. New York : Springer, 2007. 616 p. (Underwater Acoustics / Eds. J. A. Simmen [et al.]). <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36945-7>
4. *Kibblewhite A. C.* Attenuation of sound in marine sediments: A review with emphasis on new low-frequency data // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1989. Vol. 86, iss. 2. P. 716–738. <https://doi.org/10.1121/1.398195>
5. *Zhou J.-X., Zhang X.-Z., Knobles P. P.* Low-frequency geoacoustic model for the effective properties of sandy seabottoms // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2009. Vol. 125, iss. 5. P. 2847–2866. <https://doi.org/10.1121/1.3089218>
6. *Григорьев В. А., Луньков А. А., Петников В. Г.* Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // *Акустический журнал*. 2015. Т. 61, № 1. С. 90–100. doi:10.7868/S0320791915010025
7. *Wan L., Zhou J.-X., Rogers P. H.* Low-frequency sound speed and attenuation in sandy seabottom from long-range broadband acoustic measurements // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2010. Vol. 128, iss. 2. P. 578–589. <https://doi.org/10.1121/1.3455820>
8. *Белов А. И., Кузнецов Г. Н.* Оценка акустических параметров модели дна в мелком море с использованием априорной геолого-геофизической информации и преобразования Вигнера // *Акустический журнал*. 2014. Т. 60, № 2. С. 190–195. doi:10.7868/S0320791914010055
9. *Белов А. И., Кузнецов Г. Н.* Оценка акустических характеристик поверхностных слоев морского дна с использованием четырехкомпонентных векторно-скалярных приемников // *Акустический журнал*. 2016. Т. 62, № 2. С. 194–202. doi:10.7868/S0320791916020040
10. *Белов А. И., Кузнецов Г. Н.* Пространственное затухание различных составляющих звуковых полей в водном слое и в осадках мелкого моря // *Акустический журнал* 2017. Т. 63, № 6. С. 614–622. doi:10.7868/S0320791917050033
11. *Schock S. G.* A method for estimating the physical and acoustic properties of the sea bed using chirp sonar data // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2004. Vol. 29, no. 4. P. 1200–1217. URL: [http://www.eng.fau.edu/directory/faculty/schock/pdf/A\\_Method\\_for\\_Estimating.pdf](http://www.eng.fau.edu/directory/faculty/schock/pdf/A_Method_for_Estimating.pdf) (date of access: 20.01.2019).
12. *Stoll R. D.* *Sediment Acoustics*. New York : Springer, 1989. 153 p.
13. *Kimura M.* Frame bulk modulus of porous granular marine sediments // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. Vol. 120, iss. 2. P. 699–710. <https://doi.org/10.1121/1.2211427>
14. *Chotiros N. P.* *Acoustics of the Seabed as a Poroelastic Medium*. Cham : Springer, 2017. 99 p. (SpringerBriefs in Oceanography). doi:10.1007/978-3-319-14277-7
15. *Buckingham M. J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. Vol. 108, iss. 6. P. 2796–2815. <https://doi.org/10.1121/1.1322018>
16. *Buckingham M. J.* On pore-fluid viscosity and the wave properties of saturated granular materials including marine sediments // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 122, iss. 3. P. 1486–1501. <https://doi.org/10.1121/1.2759167>
17. *Holm S., Näsholm S. P.* A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011. Vol. 130, iss. 4. P. 2195–2202. <https://doi.org/10.1121/1.3631626>
18. *Pandey V., Holm S.* Connecting the grain-shearing mechanism of wave propagation in marine sediments to fractional order wave equations // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2016. Vol. 140, iss. 6. P. 4225–4236. <https://doi.org/10.1121/1.4971289>

19. *Лисютин В. А.* Простая акустическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним и вязким трением // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2018. Т. 15, № 3. С. 39–51. <https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-39-51>
20. *Чабан И. А.* Затухание звука в грунтах и горных породах // Акустический журнал. 1993. Т. 39, вып. 2. С. 362–369. URL: [http://www.akzh.ru/pdf/1993\\_2\\_362-369.pdf](http://www.akzh.ru/pdf/1993_2_362-369.pdf) (дата обращения: 20.01.2019).
21. *Yamamoto T., Turgut A.* Acoustic wave propagation through porous media with arbitrary pore size distributions // The Journal of the Acoustical Society of America. 1988. Vol. 83, iss. 5. P. 1744–1751. <https://doi.org/10.1121/1.396507>
22. *Hefner B. T., Williams K. L.* Sound speed and attenuation measurements in unconsolidated glass-bead sediments saturated with viscous pore fluids // The Journal of the Acoustical Society of America. 2006. Vol. 120, iss. 5. P. 2538–2549. <https://doi.org/10.1121/1.2354030>
23. Comparison of sound speed and attenuation measured in a sandy sediment to predictions based on the Biot theory of porous media / K. L. Williams [et al.] // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2002. Vol. 27, iss. 3. P. 413–428. doi:10.1109/JOE.2002.1040928

*Об авторе:*

**Лисютин Виктор Александрович**, доцент кафедры физики, СевГУ (99053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33), кандидат физико-математических наук, доцент, [vlisiutin@mail.ru](mailto:vlisiutin@mail.ru)