

Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии

А. А. Слепышев*, А. В. Носова

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

**E-mail: slep55@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2018 г., после доработки – 21.06.2019 г.

Цель. Исследуется механизм формирования вертикальной тонкой структуры за счет вертикального переноса массы внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии. Изучается влияние критических слоев на дисперсионные кривые внутренних волн.

Методы и результаты. В приближении Буссинеска рассматриваются свободные инерционно-гравитационные внутренние волны в вертикально-неоднородном потоке при учете горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии. Уравнение для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн содержит малый параметр (в безразмерных переменных), пропорциональный значению горизонтальной турбулентной вязкости. Решение этого уравнения ищется в виде асимптотического ряда по этому параметру. В нулевом приближении однородная краевая задача второго порядка, определяющая вертикальную структуру моды, решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности для реальных профилей частоты Брента – Вайселя и скорости течения. При фиксированной частоте волны волновое число находится методом пристрелки. В первом порядке по указанному параметру полуоднородная краевая задача также решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Находится единственное решение, ортогональное решению соответствующей однородной краевой задачи. Из условия разрешимости этой краевой задачи определяется декремент затухания волны. Дисперсионные кривые первых двух мод испытывают обрезание в низкочастотной области (вторая мода на более высокой частоте), которое обусловлено влиянием критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Показано, что вертикальный волновой поток массы отличен от нуля и приводит к неосциллирующей на временном масштабе волны поправке к средней плотности – к тонкой структуре, генерируемой внутренней волной, которая имеет необратимый характер.

Выводы. При учете горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии вертикальный волновой поток массы отличен от нуля и приводит к генерации вертикальной тонкой структуры. Волновой поток массы превышает турбулентный. Вертикальные масштабы генерируемой вертикальной тонкой структуры соответствуют реально наблюдаемым.

Ключевые слова: внутренние волны, волновой поток массы, тонкая структура, критические слои.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0003 «Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования».

Для цитирования: Слепышев А. А., Носова А. В. Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Морской гидрофизический журнал. 2020. Т. 36, № 1. С. 5–19. doi:10.22449/0233-7584-2020-1-5-19

Generation of Vertical Fine Structure by the Internal Waves with the Regard for Turbulent Viscosity and Diffusion

A. A. Slepyshev*, A. V. Nosova

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia

**e-mail: slep55@mail.ru*

Purpose. The aim is to study the mechanism of formation of a vertical fine structure due to the mass vertical transfer by the internal waves taking into account turbulent viscosity and diffusion as well as to investigate influence of the critical layers on the dispersion curves of internal waves.

Methods and Results. In the Boussinesq approximation, the free inertia-gravity internal waves in a vertically inhomogeneous flow are considered with the regard for the horizontal turbulent viscosity and diffusion. The equation for the amplitude of vertical velocity of the internal waves contains a small parameter (in the dimensionless variables) proportional to the value of the horizontal turbulent viscosity. The solution of this equation is realized in a form of the asymptotic series of this parameter. In the zero approximation, the second-order homogeneous boundary value problem conditioning the vertical structure mode, is solved numerically by the implicit third-order accuracy Adams scheme for real profiles of the Brent-Väisälä frequency and the current velocity. At the fixed wave frequency, the wave number is determined by the shooting method. In the first order with respect to the indicated parameter, the semi-homogeneous boundary value problem is also solved numerically according to the implicit Adams scheme of the third order of accuracy. A unique solution is found which is orthogonal to the solution of the corresponding homogeneous boundary value problem. The condition of this boundary value problem solvability yields the wave attenuation decrement. The dispersion curves of the first two modes are cut off in the low-frequency region (the second mode is at a higher frequency), that is due to influence of the critical layers, where the wave frequency with the Doppler shift is inertial. It is shown that the mass vertical wave flux differs from zero and leads to correction (not oscillating on the wave time scale) of the average density, i. e. the internal wave generated fine structure that is of an irreversible character.

Conclusions. When the horizontal turbulent viscosity and diffusion are taken into consideration, the mass vertical wave flux differs from zero and leads to generation of the vertical fine structure. The mass wave flux exceeds the turbulent one. The vertical scales of the generated vertical fine structure correspond to the actually observed ones.

Keywords: internal waves, wave flux of mass, fine structure, critical layers.

Acknowledgments: the investigation was carried out within the framework of the state task on theme No. 0827-2018-0003 “Fundamental studies of oceanic processes conditioning state and evolution of marine environment being affected by natural and anthropogenic factors, based on observation and modeling methods”.

For citation: Slepyshev, A.A. and Nosova, A.V., 2020. Generation of Vertical Fine Structure by the Internal Waves with the Regard for Turbulent Viscosity and Diffusion. *Physical Oceanography*, [e-journal] 27(1), pp. 3-17. doi:10.22449/1573-160X-2020-1-3-17

Вертикальная тонкая структура гидрофизических полей была открыта во второй половине двадцатого столетия после создания и дальнейшего совершенствования высокоразрешающей зондирующей аппаратуры [1–4]. Было обнаружено, что вертикальные профили температуры, солености очень изрезаны по вертикали (без инверсий плотности) и представляют собой «слоеный пирог»¹. Причина такой переслоенности была не ясна. По одним представлениям, такую переслоенность создает мелкомасштабная турбулентность, кото-

¹ Пантелеев Н. А., Охотников И. Н., Слепышев А. А. Мелкомасштабная структура и динамика океана. К. : Наукова Думка, 1993. 193 с. ; Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л. : Гидрометеоиздат, 1976. 184 с.

рая генерируется вследствие локальной гидродинамической неустойчивости Кельвина – Гельмгольца и обрушения внутренних волн [5–16]. По другим представлениям, к образованию ступенчатых структур в океане приводит механизм двойной диффузии [17, 18]. Следует отметить роль интрузионного расслоения в районах фронтов и синоптических вихрей [19–21]. Зачастую гидродинамическая неустойчивость и интрузионное расслоение работают совместно, создавая мелкомасштабную переслоенность – микроструктуру в океане [3]. Заслуживает внимания волновой механизм генерации вертикальной тонкой структуры за счет нелинейных эффектов при распространении пакетов внутренних волн (без обрушения). Суть его состоит в том, что при распространении пакета слабонелинейных внутренних волн генерируются средние на масштабе волны течения и неосциллирующая поправка к плотности, которая трактуется как тонкая структура, генерируемая волной [22, 23]. Данная поправка к плотности пропорциональна квадрату текущей амплитуды волны, и после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается; таким образом, тонкая структура, генерируемая волновым пакетом, имеет обратимый характер.

Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [24, 25]. Вертикальные волновые потоки тепла, соли и импульса при этом отличны от нуля [26, 27]. Ниже будет показано, что волновой поток массы $\overline{\rho w}$ (ρ, w – волновые возмущения плотности и вертикальной скорости соответственно) отличен от нуля и приводит к деформации профиля средней плотности – к тонкой структуре, которая генерируется волной и имеет необратимый характер. Поскольку коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии на три-четыре порядка больше соответствующих коэффициентов вертикальной турбулентной вязкости и диффузии, то последними пренебрегают.

Постановка задачи. Рассматриваются свободные внутренние волны в бассейне постоянной глубины с учетом вращения Земли при наличии среднего плоскопараллельного течения с вертикальным сдвигом скорости. Коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии предполагаются постоянными. В линейном приближении находятся амплитуда вертикальной скорости, дисперсионное соотношение и декремент затухания волны. Во втором порядке по амплитуде волны определяются волновой поток массы и неосциллирующая на масштабе волны поправка к плотности – тонкая структура, генерируемая волной. Введем безразмерные переменные [27] (штрихом обозначены размерные физические величины):

$$\begin{aligned}x' &= Hx, & y' &= Hy, & z' &= Hz, & t' &= t / \omega_*, \\u' &= H\omega_* u, & v' &= H\omega_* v, & w' &= H\omega_* w, & U_0' &= H\omega_* U_0, \\ \rho' &= \rho_0'(0)H\omega_*^2 \rho / g, & \rho_0'(z) &= \rho_0'(0)H\omega_*^2 \rho_0(z) / g, \\ P' &= \rho_0'(0)H^2 \omega_*^2 P, & K' &= K\mu, & M' &= M\mu, & f' &= f\omega_*,\end{aligned}$$

где x, y, z – две горизонтальные и вертикальная координаты, ось z направлена вверх; ω_* – характерная частота волны; u, v, w – соответственно две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения; ρ и P – волновые возмущения плотности и давления; ρ_0 – невозмущенная средняя плотность воды; H – глубина моря; K, M – коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии; μ – характерное значение горизонтальной турбулентной вязкости; $U_0(z)$ – скорость среднего течения; f – параметр Кориолиса.

Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в приближении Буссинеска имеет вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon K \Delta_h u, \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon K \Delta_h v, \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \varepsilon K \Delta_h w - \rho, \quad (3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz} + \varepsilon M \Delta_h \rho, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon = \mu / \omega_* H^2$ – малый параметр, пропорциональный значению горизонтальной турбулентной вязкости; Δ_h – горизонтальный оператор Лапласа,

$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; действие оператора D/Dt раскрывается по формуле

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Граничные условия на поверхности моря ($z=0$) – условие твердой крышки, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных², и отсутствие тангенциальных напряжений [25]:

$$w(0) = 0,$$

$$K \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0. \quad (6)$$

Граничные условия на дне – условие непротекания и отсутствие тангенциальных напряжений (условие гладкого скольжения [25]):

² Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. С. 30.

$$w = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = -1. \quad (7)$$

Тангенциальные напряжения у дна нулевые, так как коэффициентами вертикального обмена пренебрегается.

Линейное приближение. Решения линейного приближения ищем в виде

$$u_1 = u_{10}(z)A \exp(i\theta) + \text{с.с.}, \quad v_1 = v_{10}(z)A \exp(i\theta) + \text{с.с.}, \quad w_1 = w_{10}(z)A \exp(i\theta) + \text{с.с.}, \\ P_1 = P_{10}(z)A \exp(i\theta) + \text{с.с.}, \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)A \exp(i\theta) + \text{с.с.}, \quad (8)$$

где с. с. – комплексно сопряженные слагаемые; A – амплитудный множитель; θ – фаза волны; $\partial\theta/\partial x = k$, $\partial\theta/\partial t = -\omega$; k – горизонтальное волновое число; ω – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x .

После подстановки (8) в систему (1)–(5) следует связь амплитудных функций u_{10} , v_{10} , ρ_{10} , P_{10} с w_{10} :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0, \quad (9)$$

$$P_{10} = \frac{i}{k} \left[\frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} - \frac{if^2}{k(i\Omega - \varepsilon k^2 K)} \frac{dw_{10}}{dz} + i\varepsilon k K \frac{dw_{10}}{dz} \right], \\ \rho_{10} = \frac{w_{10}}{i\Omega - \varepsilon k^2 M} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad v_{10} = \frac{if}{k(i\Omega - \varepsilon k^2 K)} \frac{dw_{10}}{dz}. \quad (10)$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению

$$(\Omega + i\varepsilon k^2 K) \left[\Omega^2 + 2i\Omega k^2 K \varepsilon - f^2 - \varepsilon^2 k^4 K^2 \right] \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} - kf^2 \frac{dU_0}{dz} \frac{dw_{10}}{dz} + \\ + k \left[\left(\frac{d^2 U_0}{dz^2} - k\Omega - i\varepsilon k^3 K \right) (\Omega + i\varepsilon k^2 K)^2 + kN^2 \frac{(\Omega + i\varepsilon k^2 K)^2}{(\Omega + i\varepsilon k^2 M)} \right] w_{10} = 0, \quad (11)$$

где $N^2 = -d\rho_0/dz$ – квадрат частоты Брента – Вайсяля.

Граничные условия для w_{10} :

при $z = 0, -1$

$$w_{10} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия (6), (7) выполняются автоматически. Уравнение (11) имеет малый параметр ε . Следуя методу, изложенному в работе [28], решение w_{10} и частоту ω представляют в виде асимптотических рядов по параметру ε :

$$w_{10}(z, \varepsilon) = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + \dots, \quad (13)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots. \quad (14)$$

После подстановки разложений (13), (14) в (11), (12) получаем краевую задачу для w_0 в нулевом приближении по ε :

$$Lw_0 = \frac{d^2 w_0}{dz^2} - \frac{kf^2}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} \frac{dU_0}{dz} \frac{dw_0}{dz} + \left[\frac{d^2 U_0}{dz^2} \Omega_0 + k(N^2 - \Omega_0^2) \right] \frac{kw_0}{(\Omega_0^2 - f^2)} = 0, \quad (15)$$

где L – линейный дифференциальный оператор; $\Omega_0 = \omega_0 - k \cdot U_0$ – частота волны со сдвигом Доплера.

Граничные условия для w_0 следующие:

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(-1) = 0. \quad (16)$$

Краевая задача (15), (16) в случае отсутствия течения при $U_0 = 0$ имеет счетный набор собственных функций – набор мод. При этом каждому значению волнового числа соответствует определенное значение частоты ω_0 , удовлетворяющее неравенству $f < \omega_0 < \max(N)$ и отвечающее данной моде. При $U_0 \neq 0$ дискретного спектра действительных собственных частот может не существовать [29]. Это связано с сингулярностями в уравнении (15), когда $\Omega_0 = 0$ и $\Omega_0 = \pm f$ (рассматриваются гидродинамически устойчивые течения). При наличии сингулярности $\Omega_0 = 0$ существует критический слой, где фазовая скорость волны равна скорости потока [30, 31]. При учете вращения Земли указанная сингулярность смещается на уровень, где $\Omega_0 = f$ [32]. Влияние этой сингулярности на дисперсионные кривые иллюстрируют приводимые ниже расчеты.

Введем обозначение: $a(z) = -\frac{f^2 k}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)} \frac{dU_0}{dz}$,

$b(z) = \frac{k}{(\Omega_0^2 - f^2)} \left[k(N^2 - \Omega_0^2) + \Omega_0 \frac{d^2 U_0}{dz^2} \right]$. Тогда уравнение (15) запишется

в виде

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} + a(z) \frac{dw_0}{dz} + b(z) w_0 = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) приведем к самосопряженному виду, умножив обе части уравнения на функцию $p(z) = \exp\left(\int a(z) dz\right)$:

$$L_s w_0 = \frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{dw_0}{dz} \right) - q(z) w_0 = 0, \quad (18)$$

где $q(z) = -b(z)p(z)$; L_s – линейный самосопряженный дифференциальный оператор.

Следующее приближение w_1 в разложении (13) по параметру ε удовлетворяет уравнению

$$Lw_1 = F_1(z), \quad (19)$$

$$F_1(z) = G \left\{ (\omega_1 + ik^2K) \left[k \left(k(3\Omega_0^2 - 2N^2) - 2\Omega_0 \frac{d^2U_0}{dz^2} \right) w_0 - (3\Omega_0^2 - f^2) \frac{d^2w_0}{dz^2} \right] + \right. \\ \left. + k\Omega_0 (\omega_1 + ik^2M) \left(k\Omega_0 - \frac{d^2U_0}{dz^2} \right) w_0 \right\}, \quad G = \frac{1}{\Omega_0(\Omega_0^2 - f^2)},$$

где G – вспомогательная функция.

Левая часть уравнения (19) приводится к самосопряженному виду путем умножения обеих частей уравнения (19) на функцию $p(z)$:

$$L_s w_1 = \Phi_1(z), \quad (20)$$

где $\Phi_1(z) = p(z)F_1(z)$.

Граничные условия для функции w_1 :

$$w_1(0) = 0, \quad w_1(-1) = 0. \quad (21)$$

Условие разрешимости краевой задачи³ (20), (21):

$$\int_{-1}^0 \Phi_1 w_0 dz = 0. \quad (22)$$

Отсюда находим выражение для ω_1 :

$$\omega_1 = i \frac{c}{d}, \quad (23)$$

$$c = \int_{-1}^0 \left\{ K \left[\frac{d^2w_0}{dz^2} (3\Omega_0^2 - f^2) + kw_0 \left(2\Omega_0 \frac{d^2U_0}{dz^2} + (2N^2 - 3\Omega_0^2)k \right) \right] + \right. \\ \left. + kM\Omega_0 \left(\frac{d^2U_0}{dz^2} - k\Omega_0 \right) \right\} k^2 p w_0 G dz,$$

$$d = \int_{-1}^0 \left[\frac{d^2w_0}{dz^2} (f^2 - 3\Omega_0^2) + kw_0 \left(4k\Omega_0^2 - 3\Omega_0 \frac{d^2U_0}{dz^2} - 2kN^2 \right) \right] p w_0 G dz.$$

Волновой перенос массы. Вертикальный волновой поток массы определяется по формуле

$$\overline{\rho w} = \frac{w_{10} w_{10}^* |A_1|^2}{i\Omega - \varepsilon k^2 M} \frac{d\rho_0}{dz} + \text{c.c.}, \quad (24)$$

где $A_1 = A \exp(i\delta\omega \cdot t)$, $\delta\omega = \omega_1 / i$ – декремент затухания волны, ω_1 – чисто мнимая величина; черта сверху означает осреднение по периоду волны.

³ Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. С. 188.

Вертикальный волновой поток массы приводит к необратимой деформации поля плотности, которая может рассматриваться как вертикальная тонкая структура, генерируемая волной. Уравнение для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности $\bar{\rho}$ имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0.$$

В горизонтально-однородном случае это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

Проинтегрируем уравнение (25) по времени:

$$\Delta \bar{\rho} = - \int_0^t \left(\frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} \right) dt'. \quad (26)$$

Подставляя вертикальный волновой поток массы $\bar{\rho} w$ (24) в интеграл (26), получим после интегрирования

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{1}{2\delta\omega} \frac{\partial \bar{\rho} w^0}{\partial z} \cdot (1 - e^{2\delta\omega t}), \quad (27)$$

где $\bar{\rho} w^0 = \frac{w_{10} w_{10}^* |A|^2}{i\Omega - \varepsilon k^2 M} \frac{d\rho_0}{dz} + \text{c.c.}$, $A = A_1$ при $t = 0$.

Переходя в выражении (27) к пределу при $t \rightarrow \infty$ с учетом того, что $\delta\omega < 0$, находим $\Delta \bar{\rho}$:

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{\partial \bar{\rho} w^0}{\partial z} \cdot \frac{1}{2\delta\omega}. \quad (28)$$

Величина $\Delta \bar{\rho}$, зависящая от вертикальной координаты, представляет собой неосциллирующую на временном масштабе волны поправку к средней плотности – вертикальную тонкую структуру, генерируемую волной. В работах [22, 23] определялась неосциллирующая поправка к плотности, пропорциональная квадрату текущей амплитуды волны; после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается и тонкая структура имеет обратимый характер. Поправка (28) пропорциональна квадрату максимальной амплитуды волны и представляет собой необратимую тонкую структуру, генерируемую волной.

Результаты расчетов. Расчет вертикальной тонкой структуры, генерируемой внутренней волной, сделаем для 14-минутных внутренних волн низшей моды, наблюдавшихся у входа в Гибралтарский пролив со стороны Средиземного моря [33]. Амплитуда этих волн составила 16 м. Вертикальные профили частоты Брента – Вьясяля и скорости течения показаны на рис. 1.

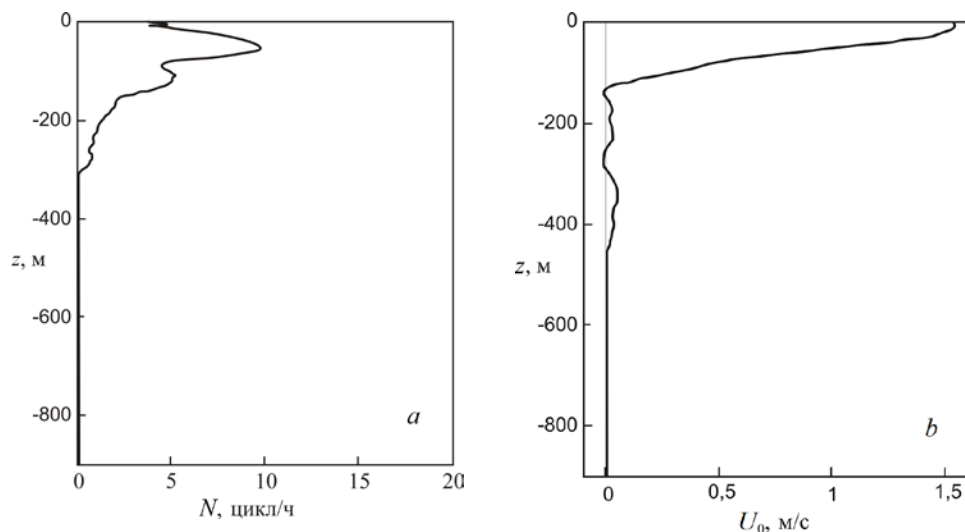


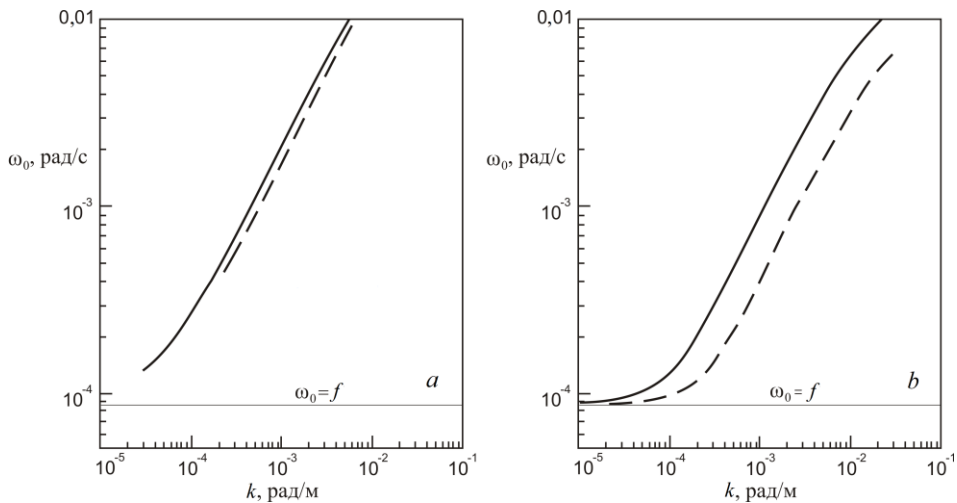
Рис. 1. Вертикальные профили: частоты Брента – Вяйсяля (а); скорости течения (b)
Fig. 1. Vertical profiles of: the Brent – Väisälä frequency (a); the current velocity (b)

Краевая задача (16), (18) решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Дисперсионные кривые первых двух мод представлены на рис. 2, а, без учета течения – на рис. 2, б. В низкочастотной области в окрестности инерционной частоты наблюдается существенное различие в поведении дисперсионных кривых. При учете течения происходит обрезание дисперсионных кривых в низкочастотной области (рис. 2, а) из-за влияния критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. Минимальная частота у первой моды составляет $1,326 \cdot 10^{-4}$ рад/с, у второй моды – $4,363 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Для сравнения укажем, что инерционная частота равна $8,582 \cdot 10^{-5}$ рад/с. При отсутствии течения (рис 2, б) никакого обрезания в низкочастотной области не происходит и дисперсионные кривые при малых волновых числах плавно приближаются к инерционной частоте. Волновое число 14-минутных внутренних волн низшей моды составляет $3,76 \cdot 10^{-3}$ рад/м. Нормирующий множитель A_1 найдем по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений. Для этого выразим вертикальное смещение ζ , используя соотношение $d\zeta/dt = w$:

$$\zeta = \frac{i w_0}{\Omega_0} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

Отсюда следует

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_0 / \Omega_0|}. \quad (29)$$



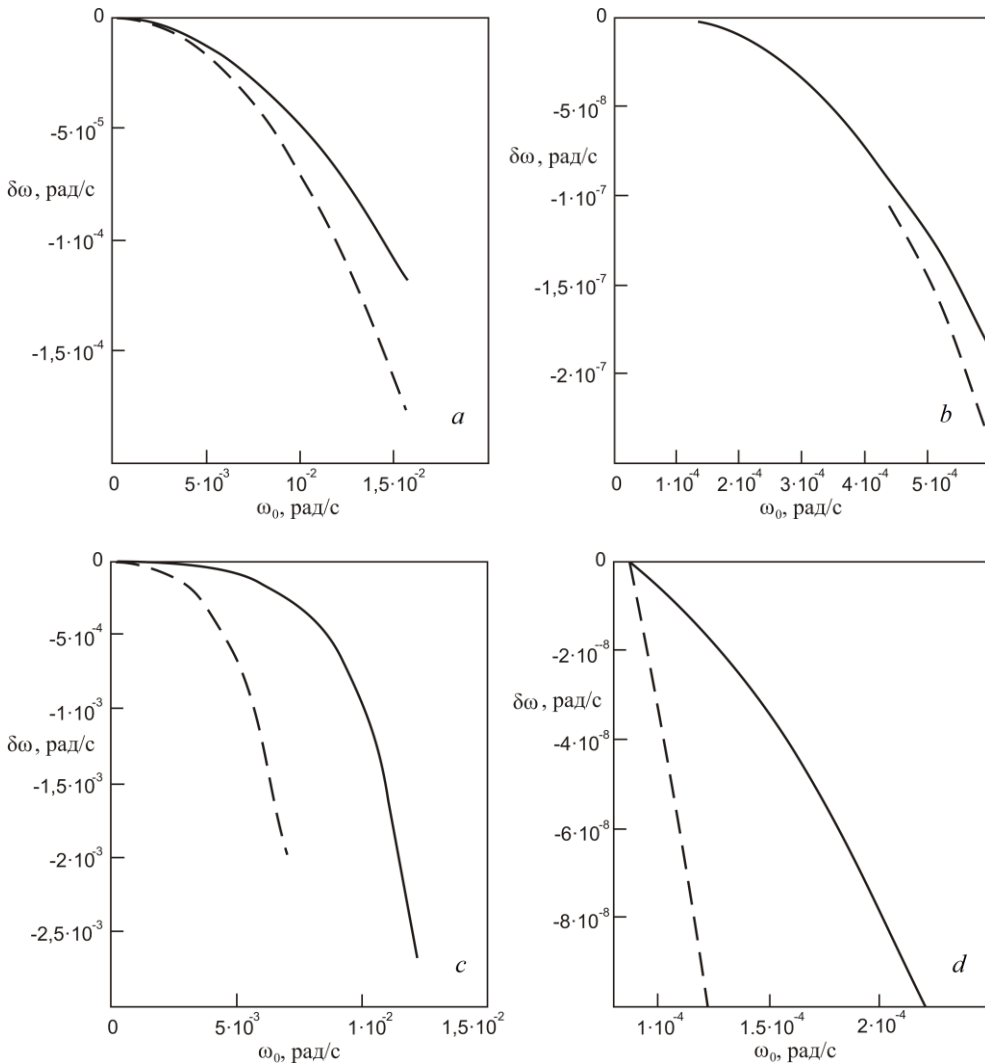
Р и с. 2. Дисперсионные кривые первых двух мод внутренних волн: *a* – при наличии течения; *b* – при отсутствии течения (первая мода – сплошная линия, вторая – штриховая)
F i g. 2. Dispersion curves of the first two modes of internal waves: *a* – at presence of the current; *b* – when the current is absent (the first mode – solid line, the second one – hatch line)

Типичное значение коэффициента турбулентной диффузии M на рассматриваемых масштабах ⁴ составляет $1 \text{ м}^2/\text{с}$. Полуоднородная краевая задача (20), (21) решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности при $K = 2M$. Находится единственное решение, ортогональное нетривиальному решению w_0 соответствующей однородной краевой задачи (15), (16). Поправка к частоте ω_1 находится из условия разрешимости (22) этой краевой задачи и определяется по формуле (23). Величина ω_1 чисто мнимая, поэтому $\delta\omega = \omega_1 / i$ – декремент затухания волны. На рис. 3, *a* показана зависимость декремента затухания волны от частоты. У второй моды декремент по модулю больше, чем у первой. Особенности поведения декремента в низкочастотной области показаны на рис. 3, *b*. Обращает на себя внимание обрезание декремента в окрестности инерционной частоты по причине влияния критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной. При отсутствии течения декремент затухания волны по модулю больше, как минимум, на порядок (рис. 3, *c*), причем в низкочастотной области никакого обрезания не происходит (рис. 3, *d*).

Вертикальные волновые потоки массы (24) для 14-минутных внутренних волн первой моды показаны на рис. 4 как при наличии течения, так и при его отсутствии. При наличии течения волновой поток массы меньше. На рис. 5 сравниваются волновой (при наличии течения) и турбулентный вертикальные потоки массы. Турбулентный поток массы определяется по формуле $\overline{\rho'w'} = -M_z \frac{d\rho_0}{dz}$, для коэффициента вертикальной диффузии справедлива оценка $M_z = 8,4N_c^{-1} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, N_c соответствует частоте Брента – Вейселя в цикл/ч [34].

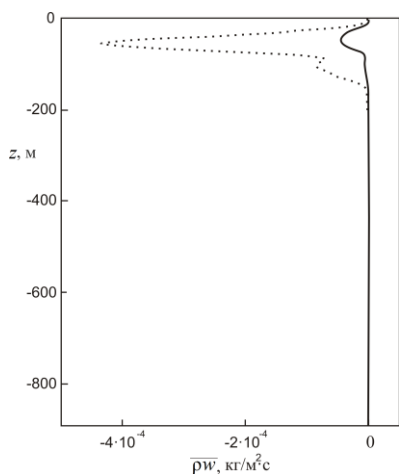
⁴ Боуден К. Физическая океанография прибрежных вод. М. : Мир, 1988. С. 285.

Волновой поток массы по модулю превосходит турбулентный. Вертикальный профиль средней плотности ρ_0 представлен на рис. 6, *a*. Неосциллирующая на временном масштабе волны поправка к плотности $\overline{\Delta\rho}$ (28) представлена на рис. 6, *b* как при наличии течения, так и при его отсутствии. На рис. 6, *c* эти же зависимости представлены в пикноклине. Неосциллирующая на временном масштабе волны поправка к плотности в верхнем 40-метровом слое при наличии течения по величине больше. Инверсий в вертикальном распределении плотности при этом не возникает. Характерный масштаб вертикальной тонкой структуры (10–20 м), генерируемой волной, соответствует реально наблюдаемому.

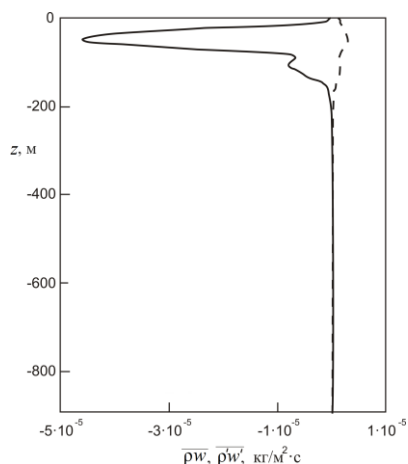


Р и с. 3. Зависимость декремента затухания от частоты волны (*a*); то же – в низкочастотной области (*b*); те же зависимости при отсутствии течения (*c*, *d*)

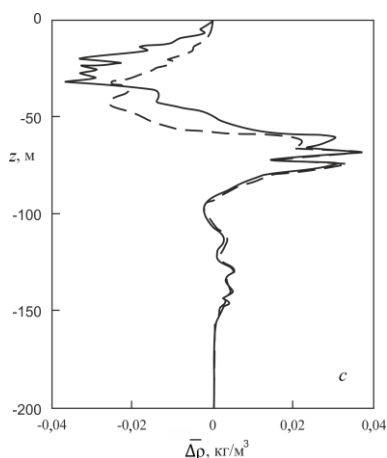
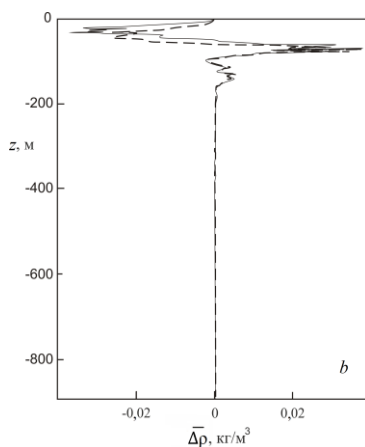
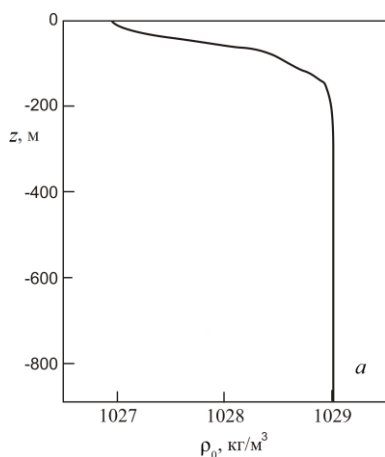
F i g. 3. Dependence of the attenuation decrement on the wave frequency (*a*); the same – in the low-frequency area (*b*); the same dependencies – when the current is absent (*c*, *d*)



Р и с. 4. Профили вертикального волнового потока массы при наличии течения (сплошная линия) и при его отсутствии (пунктирная)
F i g. 4. Profiles of the mass vertical wave flux at presence of the current (solid line) and when the current is absent (dotted line)



Р и с. 5. Профили волнового (сплошная линия) и турбулентного (штриховая) вертикального потока массы
F i g. 5. Profiles of the wave (solid line) and turbulent (hatch line) vertical flux of the mass



Р и с. 6. Вертикальные профили: *a* – средней плотности; *b* – неосциллирующей поправки к плотности при наличии течения (сплошная линия) и при его отсутствии (штриховая); *c* – то же в верхнем 200-метровом слое
F i g. 6. Vertical profiles: *a* – of average density; *b* – of not oscillating correction of density at presence of the current (solid line) and when the current is absent (dotted line); *c* – the same – in the upper 200 m layer

Выводы

1. Вертикальный волновой поток массы при учете горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии отличен от нуля и по абсолютной величине превышает турбулентный.

2. Указанный вертикальный волновой поток массы приводит к неосциллирующей на временном масштабе волны поправке к плотности – тонкой структуре, генерируемой волной. Эта тонкая структура имеет необратимый характер.

3. Дисперсионные кривые внутренних волн испытывают обрезание в низкочастотной области, которое обусловлено влиянием критических слоев, где частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дыкман В. З. Технические средства для исследования структуры и динамики водных масс // Морской гидрофизический журнал. 2016. № 6. С. 49–62. doi:10.22449/0233-7584-2016-6-49-62
2. Сабинин К. Д., Серебряный А. Н. Применение акустических доплеровских профилометров течений для изучения пространственной структуры морской среды // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 5. С. 639–648.
3. Измерения турбулентности в зоне сильных придонных течений в Датском проливе / В. Т. Пака [и др.] // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432, № 1. С. 110–114.
4. Структурообразование и вертикальный турбулентный обмен в прибрежной зоне Севастопольского региона / А. С. Самодуров [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2015. № 6. С. 3–16. doi:10.22449/0233-7584-2015-6-3-16
5. Keller K. H., Van Atta C. W. An experimental investigation of the vertical temperature structure of homogeneous stratified shear turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 425. P. 1–29. <https://doi.org/10.1017/S002211200002111>
6. Extremely long Kelvin-Helmholtz billow trains in the Romanche Fracture Zone / H. van Haren [et al.] // Geophysical Research Letters. 2014. Vol. 41, iss. 23. P. 8445–8451. <https://doi.org/10.1002/2014GL062421>
7. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans // Annual Review of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 36. P. 281–314. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122121>
8. Holford J. M., Linden P. F. Turbulent mixing in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1999. Vol. 30, iss. 2–4. P. 173–198. doi:10.1016/S0377-0265(99)00025-1
9. Shroyer E. L., Moum J. N., Nash J. D. Energy transformations and dissipation of nonlinear internal waves over New Jersey’s continental shelf // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. Vol. 17, iss. 4. P. 345–360. <https://doi.org/10.5194/npg-17-345-2010>
10. Ostrovskii A. G., Zatsepin A. G. Intense ventilation of the Black Sea pycnocline due to vertical turbulent exchange in the Rim Current area // Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers. 2016. Vol. 116. P. 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.dsr.2016.07.011>
11. Gradient Richardson number measurements in a stratified shear layer / I. P. D. de Silva [et al.] // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1999. Vol. 30, iss. 1. P. 47–63. [https://doi.org/10.1016/S0377-0265\(99\)00015-9](https://doi.org/10.1016/S0377-0265(99)00015-9)
12. Troy C. D., Koseff J. R. The instability and breaking of long internal waves // Journal of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 543. P. 107–136. doi:10.1017/S0022112005006798
13. Clark H. A., Sutherland B. R. Generation, propagation, and breaking of an internal wave beam // Physics of Fluids. 2010. Vol. 22, iss. 7. 076601. doi:10.1063/1.3455432

14. *Подымов О. И., Зацепин А. Г., Островский А. Г.* Вертикальный турбулентный обмен в черноморском пикноклине и его связь с динамикой вод // *Океанология*. 2017. Т. 57, № 4. С. 546–559. <https://doi.org/10.7868/S0030157417040049>
15. *Васильев О. Ф., Воропаева О. Ф., Курбацкий А. Ф.* Турбулентное перемешивание в устойчиво стратифицированных течениях окружающей среды: современное состояние проблемы (обзор) // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2011. Т. 47, № 3. С. 291–307.
16. Интенсификация внутренних волн в зоне сопряжения шельфа и континентального склона как фактор интенсификации вертикального обмена / А. С. Самодуров [и др.] // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 2. С. 12–24.
17. *Журбас В. М., Озмидов Р. В.* О внутреннем строении тонкой ступенчатой структуры главного термоклина океана // *Океанология*. 1983. Т. 23, № 6. С. 938–943.
18. *Фалина А. С., Волков И. И.* Влияние процесса двойной диффузии на общую гидрологическую структуру глубинных вод Черного моря // *Океанология*. 2005. Т. 45, № 1. С. 21–31.
19. *Погребной А. Е., Самодуров А. С.* Эволюция перемешанных слоев в стратифицированной области черноморского антициклонического вихря // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2014. Т. 50, № 6. С. 704–713. doi:10.7868/S0002351514060121
20. Изменчивость фронтальных разделов и особенности мезомасштабной динамики вод Белого моря / Д. А. Романенков [и др.] // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 1. С. 59–72.
21. *Maurer B. D., Bolster D. T., Linden P. F.* Intrusive gravity currents between two stably stratified fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 647. P. 53–69. doi:10.1017/S0022112009993752
22. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости / Ю. Д. Борисенко [и др.] // *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1976. Т. 12, № 3. С. 293–301.
23. *Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З.* К теории образования тонкой структуры гидрофизических полей в океане // *Океанология*. 1976. Т. 16, № 5. С. 750–759.
24. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М. : Мир, 1981. Ч. 2. 363 с.
25. *LeBlond P. H.* On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // *Journal of Fluid Mechanics*. 1966. Vol. 25, iss. 1. P. 121–142. doi:10.1017/S0022112066000089
26. *Слепышев А. А.* Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами в бароклинном течении // *Морской гидрофизический журнал*. 2015. № 1. С. 64–78. doi:10.22449/0233-7584-2015-1-64-78
27. *Слепышев А. А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2016. Т. 52, № 3. С. 342–350. doi:10.7868/S0002351516030111
28. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи математических наук*. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
29. *Banks W. H. H., Drazin P. G., Zaturenska M. B.* On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 75, iss. 1. P. 149–171. doi:10.1017/S0022112076000153
30. *Booker J. B., Bretherton F. P.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 27, iss. 3. P. 513–539. doi:10.1017/S0022112067000515
31. *Caillol P., Grimshaw R. H. J.* Internal solitary waves with a weakly stratified critical layer // *Physics of Fluids*. 2012. Vol. 24, iss. 5. 056602. doi:10.1063/1.4704815
32. *Jones W. L.* Propagation of internal gravity waves in fluids with shear flow and rotation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 30, iss. 3. P. 439–448. doi:10.1017/S0022112067001521

33. *Watson G.* Internal waves in a stratified shear flow: The Strait of Gibraltar // *Journal of Physical Oceanography*. 1994. Vol. 24, no. 2. P. 509–517. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1994\)024<0509:IWIASS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1994)024<0509:IWIASS>2.0.CO;2)
34. Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море / В. А. Иванов [и др.] // *Доповіді НАНУ*. 2008. № 6. С. 108–112.

Об авторах:

Слепышев Александр Алексеевич, ведущий научный сотрудник, отдел турбулентности, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), доктор физико-математических наук, **ResearcherID: V-6948-2017**, **ORCID ID: 0000-0002-9259-7558**, slep55@mail.ru

Носова Анна Владимировна, ведущий инженер-исследователь, отдел турбулентности, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2)