

Сингулярные вихри бета-плоскости: краткий обзор и недавние результаты

Г. М. Резник¹, ✉, С. В. Кравцов^{1, 2}

¹ Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

² Университет штата Висконсин, Милуоки, США

✉ greznikmd@yahoo.com

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.

Цель. Работа представляет собой краткий обзор теории сингулярных вихрей бета-плоскости.

Методы и результаты. Главное внимание уделяется описанию долговременной эволюции отдельного сингулярного вихря: приводятся основные уравнения и интегралы движения, дается описание численной схемы расчета такой эволюции и излагаются некоторые результаты численных экспериментов. Показано, что эволюция вихря проходит два этапа. На начальной (квазилинейной) стадии излучение вихрем волн Россби в ближнюю зону создает в окрестности вихря нестационарный вторичный диполь (бета-круговороты), который приводит вихрь в движение (циклон дрейфует на северо-запад, антициклон – на юго-запад). На следующей (нелинейной) стадии становится важным излучение волн Россби в дальнюю зону и самовоздействие регулярной компоненты движения. Сингулярный циклон (антициклон) постепенно дрейфует внутрь антициклонического (циклонического) бета-круговорота, образуя с ним компактную вихревую пару, продолжающую движение к северо-западу (юго-западу); циклонический (антициклонический) бета-круговорот постепенно ослабевает и теряет связь с сингулярным вихрем. При этом вихрь взаимодействует с излученными им ранее волнами Россби, что приводит к колебаниям скорости его движения. Продолжительность квазилинейной стадии резко увеличивается с ростом амплитуды сингулярного вихря, для вихрей небольшой амплитуды она быстро проходит и сменяется нелинейной стадией. Впервые нелинейная стадия эволюции монополя открыта и описана в наших работах по динамике сингулярных вихрей на бета-плоскости.

Выводы. Развита нами теория сингулярных вихрей бета-плоскости существенно расширяет наши знания об эволюции и динамике геофизических локализованных вихрей, играющих важную роль в крупномасштабной циркуляции океана и атмосферы.

Ключевые слова: обзор теории сингулярных вихрей бета-плоскости, волны Россби.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 05.616.21.0120, уникальный идентификатор RFMEFI61619X0120).

Для цитирования: Резник Г. М., Кравцов С. В. Сингулярные вихри бета-плоскости: краткий обзор и недавние результаты // Морской гидрофизический журнал. 2020. Т. 36, № 6. С. 720–739. doi:10.22449/0233-7584-2020-6-720-739

Singular Vortices on a Beta-Plane: A Brief Review and Recent Results

G. M. Reznik^{1,✉}, S. V. Kravtsov^{1,2}

¹*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*University of Wisconsin, Milwaukee, USA*

✉ greznikmd@yahoo.com

Purpose. This paper briefly reviews the theory of singular vortices (SV) on a beta-plane.

Methods and Results: The primary focus of the paper is on a long-term evolution of an individual SV: the governing equations and integrals of motion are given, the algorithm of numerical implementation of these equations for investigation of such an evolution is described, and the results of some numerical experiments are presented. It is shown that the vortex evolution consists of two stages. At an initial (quasi-linear) stage, the near-field radiation of Rossby waves by the vortex produces, near the vortex, a non-stationary secondary dipole – the beta-gyres – which forces the vortex to move (a cyclone drifts northwestward, an anticyclone – southwestward). At the next (nonlinear) stage, the far-field radiation of Rossby waves and self-interactions within the regular component of the motion become of importance. A singular cyclone (anticyclone) migrates slowly into the anticyclonic (cyclonic) beta-gyre; the SV and the beta-gyre form a compact vortex pair which continues to move northwestward (southwestward). As this process takes place, the cyclonic (anticyclonic) beta-gyre gradually drifts away from and ceases to affect the SV, while the SV starts to interact with the Rossby waves it radiated previously, which results in oscillations of its translation speed. The duration of the quasi-linear stage rapidly increases with an increasing amplitude of the SV; for vortices of small or moderate amplitude, this stage ends rapidly and gives way to the nonlinear stage. The first phenomenological description of the nonlinear stage of a singular monopole's evolution appeared in our recent work on the dynamics of the SV on a beta-plane.

Conclusions: The theory of singular vortices on a beta-plane developed here significantly broadens our understanding of the evolution and dynamics of localized geophysical vortices which play an important role in the large-scale circulation of the ocean and atmosphere.

Keywords: review of the theory of singular vortices on a beta-plane, Rossby waves.

Acknowledgements: The work was carried out at financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 05.616.21.0120, unique identifier RFMEFI61619X0120).

For citation: Reznik, G.M. and Kravtsov, S.V. 2020. Singular Vortices on a Beta-Plane: A Brief Review and Recent Results. *Physical Oceanography*, [e-journal] 27(6), pp. 659-676. doi:10.22449/1573-160X-2020-6-659-676

1. Введение

Открытие океанских синоптических вихрей (см., напр., [1] и библиографию в этой работе) дало мощный импульс к развитию экспериментальных и теоретических исследований вихревых движений во вращающейся жидкости. Океанские и атмосферные синоптические вихри обладают важной способностью к «самодвижению» относительно вращающейся сферической Земли. Например, на невращающейся сфере или на f -плоскости без средних течений любой радиально-симметричный вихрь (далее для краткости – монополь) остается неизменным и неподвижным, однако с учетом β -эффекта он начинает двигаться вдоль некоторой траектории, излучая волны Россби. Механизмы этой эволюции изучались многими авторами аналитически (см., напр., [2–5]), численно (см., напр., [6–10]) и в лабораторных экспериментах (см., напр., [11, 12]). Установлено, что на начальном этапе развития движения в окрестности

вихря генерируются вторичные вихри, так называемые β -круговороты, образующие диполь. Этот диполь «толкает» вихрь вдоль своей оси и, в свою очередь, вращается как целое в направлении, определяемом полярностью вихря. В результате (в Северном полушарии) циклонический (антициклонический) вихрь движется к северо-западу (юго-западу). Оставалось, однако, неясным, работает ли механизм β -круговоротов вплоть до исчезновения вихря или со временем вступают в силу другие эффекты, и если да, то какие и как зависят от параметров вихря. Эти и некоторые другие вопросы рассматриваются в настоящей работе, которая представляет собой краткий обзор основных результатов теории сингулярных вихрей β -плоскости, предложенной в [2].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведены основные уравнения теории, кратко обсуждаются общие свойства системы сингулярных вихрей (СВ), выводятся уравнения и интегралы сохранения для одного СВ. В разделе 3 анализируется эволюция отдельного СВ на начальной стадии и развитие β -круговоротов. Раздел 4 посвящен описанию численного алгоритма расчета систем сингулярных вихрей. В разделе 5 представлены недавние результаты численных экспериментов по долговременной эволюции отдельного СВ. Краткое обсуждение полученных результатов дается в разделе 6.

2. Сингулярные вихри. Постановка задачи

Основные уравнения. Динамика вихрей будет изучаться в рамках 1,5-слойной квазигеострофической (КГ) модели на β -плоскости, которая описывается хорошо известным (см., напр., [1]) уравнением сохранения КГ потенциального вихря:

$$\partial_t(\hat{\Omega} + \beta y) + J(\hat{\psi}, \hat{\Omega} + \beta y) = 0, \quad \hat{\Omega} = \nabla^2 \hat{\psi} - a^2 \hat{\psi}, \quad (1)$$

где $\hat{\psi} = \hat{\psi}(x, y, t)$ – функция тока; $\hat{\Omega}$ – относительная завихренность; $\hat{\Omega} + \beta y$ – потенциальная завихренность; $a = R_d^{-1}$, R_d – масштаб Россби; β – производная параметра Кориолиса по широте; J – якобиан. Функция тока $\hat{\psi}$ здесь является суммой регулярной компоненты ψ и сингулярной компоненты ψ_s , представляющей собой суперпозицию N бесселевых сингулярных вихрей:

$$\hat{\psi} = \psi + \psi_s, \quad \hat{\Omega} = \Omega + \Omega_s, \quad \Omega = \nabla^2 \psi - a^2 \psi, \quad \Omega_s = \nabla^2 \psi_s - a^2 \psi_s, \quad (2)$$

$$\psi_s = \sum_{n=1}^N \psi_s^n, \quad (3a)$$

$$\psi_s^n = -\frac{A_n}{2\pi} K_0[p_n |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)|], \quad (3b)$$

$$\Omega_s = \sum_{n=1}^N [A_n \delta(x - x_n(t)) \delta(y - y_n(t)) + (p_n^2 - a^2) \psi_s^n]. \quad (3b)$$

Здесь δ обозначает дельта-функцию Дирака; K_n, I_n здесь и ниже – модифицированные функции Бесселя n -го порядка; амплитуды вихрей A_n и параметры p_n , определяющие их горизонтальные масштабы, заданы и постоянны (см. [2]); траектории вихрей $\mathbf{r}_n(t)$ определяются в процессе решения.

Подстановка (2) в (1) дает с учетом (3)

$$\partial_t \Omega + J(\psi + \psi_s, \Omega + \beta y) + \sum_{n=1}^N (p_n^2 - a^2) J(\psi + \psi_s^n + \dot{x}_n y - \dot{y}_n x, \psi_s^n) = 0, \quad (4)$$

$$\dot{x}_n = -\partial_y (\psi + \psi_s^n)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n}, \quad \dot{y}_n = \partial_x (\psi + \psi_s^n)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n}, \quad \psi_s^n = \sum_{m \neq n}^N \psi_s^m. \quad (5)$$

Уравнение (4) определяет регулярную компоненту ψ , уравнения (5) – траектории СВ. Если бета-эффект и регулярная компонента отсутствуют ($\beta = \psi = 0$) и $p_n = a$ (СВ превращаются в точечные), то (4) удовлетворяется тождественно, а (5) сводится к хорошо известной гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для координат взаимодействующих вихрей (см., напр., [13]). Если же $\beta \neq 0$ и/или в начальный момент $\psi \neq 0$ и/или в группе из $N > 1$ вихрей масштаб хотя бы одного из них не равен R_d , то регулярная компонента ψ возникает всегда, даже если в начальный момент она отсутствует. Для описания движения в этом случае требуется решать полную континуально-дискретную систему (4), (5). Обобщение уравнений (2) – (5) на случай двухслойной жидкости дано в работах [14, 15].

Солитоны Россби. Если все p_n равны друг другу и $p_n = p \neq a$, то амплитуды и положения СВ могут быть подобраны таким специальным образом, что регулярная компонента обращается в нуль и вихри образуют систему, движущуюся равномерно и без изменения формы вдоль широты со скоростью, лежащей вне диапазона фазовых скоростей волн Россби $(-\beta R_d^2, 0)$. Каждая такая система представляет собой сингулярный солитон Россби, и наоборот, каждый регулярный солитон Россби является суперпозицией бесселевых СВ (36) с $p_n = p \neq a$, сосредоточенных в конечной внутренней области солитона. Более подробно связь между двумерными солитонами Россби и бесселевыми СВ (36) обсуждается в [2]. Сингулярные солитоны Россби во вращающемся баротропном сферическом слое представлены в работе [16]. «Гибридные» солитоны Россби, состоящие из сингулярного монополя и регулярной компоненты, найдены в двухслойной модели [15].

Уравнения и интегралы сохранения для индивидуального СВ. В дальнейшем мы ограничимся случаем одного СВ, когда в (3) – (5) $N = 1$ и сингулярная компонента функции тока ψ_s равна

$$\psi_s = -\frac{A}{2\pi} K_0[p|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|]. \quad (6)$$

Уравнения (3) – (5) тогда принимают следующий вид:

$$\partial_t \Omega + J(\psi_s, \Omega + \beta y) + J(\psi, \Omega + \beta y) + (p^2 - a^2) J(\psi + \dot{x}_0 y - \dot{y}_0 x, \psi_s) = -K \nabla^6 \psi, \quad (7)$$

$$\dot{x}_0 = -\partial_y \psi \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, \quad (8a)$$

$$\dot{y}_0 = \partial_x \psi|_{r=r_0}, \quad (8б)$$

$$\psi|_{r=0} = 0. \quad (8в)$$

Условие (8в) означает, что в начальный момент регулярное поле отсутствует. В дальнейшем основная часть работы связана с численным исследованием СВ, поэтому в правую часть уравнения (7) добавлена вязкость высокого порядка с минимальным коэффициентом вязкости K для обеспечения устойчивости численной схемы, представленной ниже.

При $K=0$ система (6) – (8) имеет несколько интегралов сохранения; при $K \neq 0$ эти интегралы медленно меняются со временем. Интегралы получаются с использованием тождества, справедливого для любой достаточно гладкой функции $F(x, y)$:

$$\iint (\nabla^2 F - p^2 F) \psi_s dx dy = AF(x_0, y_0), \quad (9)$$

здесь интеграл берется по неограниченной плоскости. Умножая (7) на сумму $\psi + \psi_s$ и интегрируя полученное уравнение по всей плоскости с учетом (8) и (9), находим уравнение сохранения энергии

$$\partial_t (E_1 + E_2 + E_3) = D_1 + D_2, \quad (10а)$$

где

$$E_1 = \frac{1}{2} \iint ((\nabla \psi)^2 + a^2 \psi^2) dx dy, \quad (10б)$$

$$E_2 = -\frac{1}{2} (p^2 - a^2) \iint \psi \psi_s dx dy, \quad (10в)$$

$$E_3 = -A \psi|_{r=r_0(t)}. \quad (10г)$$

Здесь E_1 – энергия регулярной компоненты; сумма $E_2 + E_3$ – приток энергии от сингулярного вихря к регулярной компоненте; слагаемые

$$D_1 = -K \iint (\nabla(\nabla^2 \psi))^2 dx dy, \quad (10д)$$

$$D_2 = K \iint \psi_s \nabla^6 \psi dx dy \quad (10е)$$

возникают из-за трения.

Далее, умножая (7) на $\nabla^2 \psi - a^2 \psi$ и снова используя (8) и (9), получаем закон сохранения энтропии в виде

$$\partial_t (S_1 + S_2) = D_3, \quad (11а)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2} \iint [(\nabla^2 \psi)^2 + (p^2 + a^2)(\nabla \psi)^2 + p^2 a^2 \psi^2] dx dy, \quad (11б)$$

$$S_2 = -\beta A y_0, \quad (11в)$$

$$D_3 = -K \iint (\nabla^4 \psi)^2 dx dy + p^2 D_1. \quad (11г)$$

Положительно определенный функционал S_1 является суперпозицией энтропии и энергии регулярной компоненты.

Интегрирование (7) по всей плоскости с учетом (8в) дает сохранение массы:

$$\int \psi dx dy = 0. \quad (12)$$

Сохранение x - и y -компонент импульса получается после умножения (7) на x и y соответственно с последующим интегрированием по плоскости и использованием (9), (12):

$$\int x \psi dx dy = \frac{A}{p^2} (\beta R_d^2 t + x_0), \quad (13a)$$

$$M_1 - M_2 = 0, \quad (13б)$$

$$M_1 = \int y \psi dx dy, \quad (13в)$$

$$M_2 = \frac{A}{p^2} y_0. \quad (13г)$$

Соотношения (13a), (13б) означают, что центр тяжести полной системы вихрь + волны (т. е. поля $\psi + \psi_s$) движется со скоростью $-\beta R_d^2$ вдоль оси x и не смещается по широте. Интегралы (10) – (13) могут быть обобщены на случай любого количества сингулярных вихрей на регулярном течении (см. [2, 14]); в [14] показано, что из сохранения энергии (10) и энтропии (11) следует устойчивость на f -плоскости любой пары взаимодействующих СВ относительно произвольных достаточно малых регулярных возмущений.

Исходное уравнение (1) и, следовательно, (7) при $K = 0$ постулируют лагранжево сохранение потенциального вихря (ПВ) $\Omega + \Omega_s + \beta y$ в жидкой частице. В силу (8a), (8б) СВ связан с фиксированной жидкой частицей и сингулярная часть завихренности Ω_s в этой частице постоянна (хотя и бесконечна). Поэтому в точке СВ сохраняется и регулярная часть завихренности $q = \Omega + \beta y$, т. е. зная положение СВ, можно определить $\Omega|_{r=r_0}$ из соотношения

$$q_0 = \Omega|_{r=r_0} + \beta y_0(t) = \beta y_0(0). \quad (14)$$

Приведенный вывод является, строго говоря, эвристическим, но полезное соотношение (14) можно вывести и более строго из (7), (8). Полученные интегралы сохранения используются ниже для контроля работы численной схемы, позволяющей исследовать долговременную эволюцию индивидуального СВ.

3. Бета-кружовороты и начальная эволюция СВ

Положим $K = 0$ и запишем (7) в движущихся координатах

$$x' = x - x_0(t), \quad y' = y - y_0(t), \quad (15)$$

связанных с вихрем (штрихи опускаем):

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega + J(\psi_s, \Omega) + \beta \partial_x \psi_s + \beta \psi_x + J(\psi + x_0 y - y_0 x, \Omega) + \\ + (p^2 - a^2) J(\psi + x_0 y - y_0 x, \psi_s) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу (8а), (8б) пространственные производные функции тока в движущихся координатах $\psi + x_0 y - y_0 x$ обращаются в нуль в точке сингулярности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$. На начальном этапе эволюции СВ регулярная функция тока и завихренность малы и сосредоточены в основном в окрестности СВ, поэтому четвертый и пятый члены в (16) малы по сравнению со вторым и третьим членами и могут быть отброшены. Результирующее приближенное уравнение записывается как

$$\partial_t (\Omega + \beta y) + J(\psi_s, \Omega + \beta y) + (p^2 - a^2) J(\psi + x_0 y - y_0 x, \psi_s) = 0. \quad (17а)$$

Условия (8) в движущихся координатах, связанных с вихрем, принимают следующий вид:

$$\dot{x}_0 = -\partial_y \psi \Big|_{\mathbf{r}=0}, \quad (17б)$$

$$\dot{y}_0 = \partial_x \psi \Big|_{\mathbf{r}=0}, \quad (17в)$$

$$\psi \Big|_{t=0} = 0. \quad (17г)$$

Решение задачи (17) имеет вид

$$\psi = \varphi_s(r, t) \sin \theta + \varphi_c(r, t) \cos \theta, \quad (18)$$

где r, θ – полярные координаты с центром в точке вихря, и легко находится в случае точечного вихря [2], когда $p = a$:

$$\Omega = \nabla^2 \psi - a^2 \psi = \beta r (\cos bt - 1) \sin \theta - \beta r \sin bt \cos \theta, \quad b = Aa^2 K_1(ar) / 2\pi ar, \quad (19а)$$

$$\varphi_s = \beta I_1(ar) \int_r^\infty r^2 K_1(ar) (1 - \cos bt) dr + \beta K_1(ar) \int_0^r r^2 I_1(ar) (1 - \cos bt) dr, \quad (19б)$$

$$\varphi_c = \beta I_1(ar) \int_r^\infty r^2 K_1(ar) \sin btdr + \beta K_1(ar) \int_0^r r^2 I_1(ar) \sin btdr. \quad (19в)$$

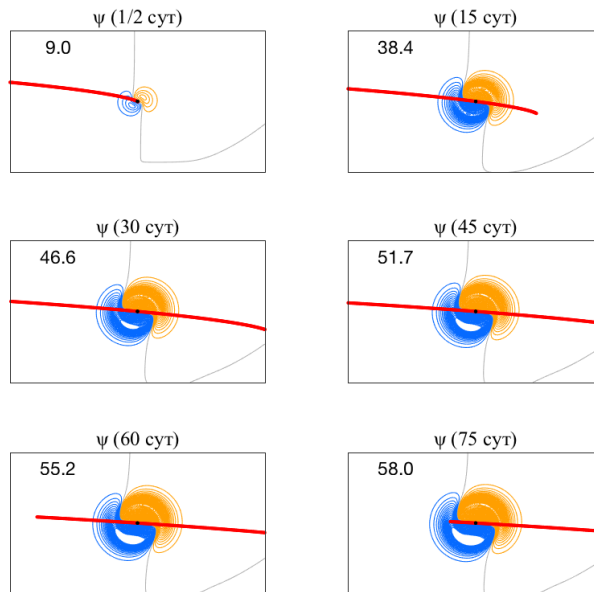
Подставляя (19) в (8а), (8б), находим компоненты скорости вихря:

$$\dot{x}_0 = -\frac{1}{2} \beta R_d^{-1} \int_0^\infty r^2 K_1(ar) (1 - \cos bt) dr, \quad \dot{y}_0 = \frac{1}{2} \beta R_d^{-1} \int_0^\infty r^2 K_1(ar) \sin btdr. \quad (20)$$

Уравнения (18) – (20) описывают развитие бета-круговоротов – вторичной дипольной циркуляции в окрестности СВ, инициирующей движение СВ вдоль оси диполя. Зная скорость СВ, можно вычислить его траекторию (см. ниже). В случае не точечного СВ, когда $p \neq a$, аналитические выражения для амплитуд φ_s, φ_c в (18) неизвестны и они определяются численно [10]. В бездивергентном случае $a = 0$ задача (17) имеет точное аналитическое решение при любом p , найденное в [17].

Эволюция функции тока ψ при $p = a$, согласно (18) – (20), показана на рис. 1, решения для $p \neq a$ качественно такие же. Задача (17) линейна по ψ , а решение ψ , в свою очередь, линейно по параметру β , поэтому мы назвали

режим (17) линейным. Поле ψ здесь представляет собой волны Россби, излученные сингулярным вихрем в ближнюю зону; отсутствие члена $\beta\psi_x$ в уравнении (17a) запрещает распространение волн Россби в дальнюю область.



Р и с. 1. Развитие β -круговоротов в линейной модели (18) – (20) для точечного СВ в системе координат, связанной с СВ (черная точка в центре). Синие линии тока отрицательные, оранжевые – положительные; толстая красная линия – траектория вихря. Амплитуда вихря $A=11A_0$ (см. таблицу); числа в левом верхнем углу – максимальные значения Ψ ; интервал между изолиниями равен 2. Размер рамки 1200×700 с разрешением 25 км

F i g. 1. Development of β -gyres in the linear model (18) – (20) for a point singular vortex in the coordinate system related with the singular vortex (black point in the center). Blue streamlines are negative, orange ones – positive; thick red line is the vortex trajectory. The vortex amplitude $A=11A_0$ (see Table); numbers in the upper left corner are the maximum values of Ψ ; interval between the isolines equals 2. The frame size is 1200×700 with resolution 25 km

В результате в окрестности СВ возникает меняющийся во времени и пространстве симметричный диполь с центром в точке вихря (β -круговороты), который и приводит вихрь в движение. При этом антициклонический (циклонический) β -круговорот всегда находится к северо-востоку (юго-западу) от сингулярного циклона. В самом начале ось диполя направлена почти по меридиану, но с течением времени она поворачивается против часовой стрелки в поле вихря, и в результате вся система движется на северо-запад.

Приближенное уравнение (17a) и, соответственно, решение (18), (19), (20) применимы на ограниченных временах, поскольку пространственные производные завихренности Ω растут пропорционально t , и отброшенные в (16) слагаемые, вообще говоря, оказываются в конце концов одного порядка с оставленными. Для оценки времени применимости приведем уравнение (16) к безразмерному виду, используя в качестве масштаба времени характерное время обращения жидкой частицы вокруг центра вихря $T_v = 2\pi r^{-2} / A$, мас-

штаба длины – масштаб вихря p^{-1} . Характерное значение регулярной функции тока ψ , равное $\Psi = \beta / p \max(p^2, a^2)$, находится из условия, что три первых слагаемых в (16) одинаковы по порядку величины. Соответственно, в силу (17б), (17в) характерная скорость движения вихря равна $U_v = \beta / \max(p^2, a^2)$. Результирующее безразмерное уравнение имеет вид

$$\partial_t \Omega + J(\psi_s, \Omega) + \partial_x \psi_s + (1 - a^2) J(\psi + x_0 y - y_0 x, \psi_s) + \alpha [\psi_x + J(\psi + x_0 y - y_0 x, \Omega)] = 0; \quad (21)$$

условия (17б), (17в), (17г) в безразмерной записи остаются без изменений. Здесь $a = a / p$, $\psi_s = -K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$, для ψ, x_0, y_0, Ω оставлены прежние обозначения, и параметр

$$\alpha = 2\pi\Psi / A = 2\pi\beta / pA \max(p^2, a^2) = T_v / T_w, \quad (22)$$

где $T_w = \max(p^2, a^2) / \beta p$ – так называемый «волновой» масштаб, равный характерному времени, за которое вихрь проходит свой размер p^{-1} . Как уже говорилось, второе слагаемое в квадратных скобках в (21) растет пропорционально времени, т. е. формально уравнение (17а) и решение (18), (19), (20) применимы на временах $at \ll 1$, или, в размерном виде, при $t \ll T_w$. Численные эксперименты с полными уравнениями (7), (8), однако, демонстрируют намного более продолжительную применимость этого решения.

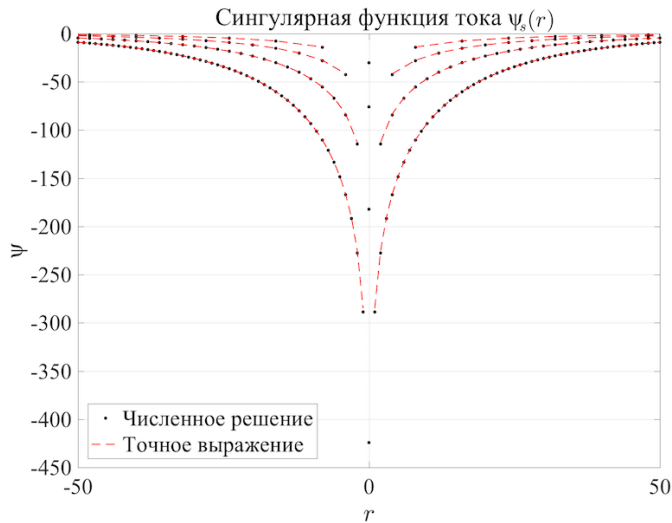
4. Численный алгоритм расчета систем сингулярных вихрей

Очевидная трудность численного интегрирования систем (4), (5) и (7), (8) связана с сингулярностью функции ψ_s . Обойти эту проблему можно двумя способами. Первый состоит в замене в разностном представлении задачи (7), (8) бесселева вихря близким к нему интенсивным регулярным вихрем и проведении расчетов с достаточно малыми шагами по пространству и времени, обеспечивающими устойчивость и сходимость схемы. Качество схемы оценивается с использованием полученных выше интегралов сохранения (10) – (14) и сопоставлением с решением линейной задачи (17), которое близко к полному решению на достаточно малых временах. При выборе «конечно-разностного СВ» естественно исходить из того факта, что сингулярная функция ψ_s в (6) является решением задачи Гельмгольца: $\nabla^2 \psi_s - p^2 \psi_s = A \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, и заменить ψ_s решением ψ_s^* разностного аналога этого уравнения:

$$[\psi_{s_{i,j+1}}^* + \psi_{s_{i,j-1}}^* + \psi_{s_{i+1,j}}^* + \psi_{s_{i-1,j}}^* - (4 + p^2 \Delta^2) \psi_{s_{i,j}}^*] / \Delta^2 = A \delta_{i,i0} \delta_{j,j0} / \Delta^2. \quad (23)$$

Здесь Δ – шаг сетки; $\psi_{s_{i,j}}^*$ – сингулярная функция тока в узле сетки (i, j) ; точка сетки $(i0, j0)$ – центр сингулярного вихря и $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и нулю в противном случае.

На рис. 2 точное выражение (6) для точечного вихря ($p = a$), интерполированное в узлы сетки для $R_d = 600$ км, сравнивается с численным решением уравнения (23) при четырех различных пространственных разрешениях $\Delta = 25, 50, 100, 200$ км. Графики приведены в безразмерной форме с масштабом для функции тока, равным $U\Delta$, где масштаб скорости $U = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Видно, что для всех вариантов разрешения «численная» сингулярная функция тока ψ_s^* совпадает с точным выражением ψ_s во всех узлах сетки, кроме центра вихря, где ψ_s^* конечно.



Р и с. 2. Сравнение профилей «численного» сингулярного вихря ψ_s^* с точным решением ψ_s для точечного вихря

F i g. 2. Comparison of the profiles of the “numerical” singular vortex ψ_s^* with the accurate solution ψ_s for the point vortex

В разностной модели соответствующая сингулярная функция тока ψ_s^* интерполируется кубическими сплайнами на узлы сетки в ближней окрестности (± 50 точек сетки) центра вихря СВ $\mathbf{r}_0(t)$ (не обязательно совпадающего с каким-либо узлом сетки); вне этой области ψ_s^* вычисляется по точной формуле (6). Кроме того, кубические сплайны используются для расчета скорости вихря (\dot{x}_0, \dot{y}_0) через пространственные производные регулярной функции тока ψ в (8а), (8б). Таким образом, зная в момент t положение СВ $\mathbf{r}_0(t)$ и регулярную функцию тока ψ , мы можем рассчитать сингулярную функцию тока ψ_s^* в узлах сетки и скорость СВ (\dot{x}_0, \dot{y}_0) , что позволяет нам найти из (7) регулярную потенциальную завихренность $\nabla^2\psi - a^2\psi$ и, соответственно, регулярную функцию тока ψ и новое положение вихря из (8а), (8б) на следующем шаге по времени.

Для этого уравнение (7) записывается в разностном виде на равномерной сетке в зональном канале шириной L_y , периодическом по x с периодом L_x . Для представления пространственных производных используется схема центральных разностей второго порядка, интегрирование по времени производится по схеме «чехарда». На зональных границах канала ставятся условия непротекания и прилипания ($\psi_x = \psi_y = \psi_{yyy} = 0$), адвективные члены представляются по схеме Аракавы четвертого порядка [18]; выполняются также ограничения на массу и импульс [19]. Ширина канала L_y выбирается достаточно большой – так, чтобы поля функции тока и ее производных оставались по возможности малыми в окрестности зональных границ. Кроме того, продолжительность T каждого расчета выбиралась не большей времени, которое требуется для прохождения самой быстрой волны Россби расстояния L_x : $T \sim L_x / \beta R_d^2$. Как мы увидим, зональная скорость СВ не превосходит предельную скорость волн Россби βR_d^2 , поэтому такое ограничение на T гарантирует, что вихрь не подвергается воздействию волн Россби, излучаемых вихрями в соседних областях. С этими ограничениями используемая модель канала с достаточной точностью описывает эволюцию СВ на безграничной β -плоскости.

Параметры модели, используемые в численных экспериментах Model parameters used in the numerical experiments

Параметр / Parameter	Описание параметра / Parameter description
$L_x = 51200$ км / $L_x = 51200$ km	Длина канала / Channel length
$L_y = 30000$ км / $L_y = 30000$ km	Ширина канала / Channel width
$T = 80$ сут / $T = 80$ days	Продолжительность эксперимента / Experiment duration
$\beta = 2 \cdot 10^{-11}$ м ⁻¹ ·с ⁻¹ / $\beta = 2 \cdot 10^{-11}$ м ⁻¹ ·с ⁻¹	Широтная производная параметра Кориолиса / Latitudinal derivative of the Coriolis parameter
$R_d = 600$ км / $R_d = 600$ km	Радиус деформации Россби / Rossby deformation radius
$A = mA_0$, $A_0 = 2\pi\beta R_d^3$, $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$	Амплитуда вихря / Vortex amplitude
300 км / 300 km	Размер вихря: малый вихрь / Vortex size: small vortex
$L_v =$ 600 км / 600 km	Размер вихря: точечный вихрь / Vortex size: point vortex
1200 км / 1200 km	Размер вихря: большой вихрь / Vortex size: large vortex
$a = R_d^{-1}$	Обратный радиус Россби / Reverse Rossby radius
$p = L_v^{-1}$	Обратный размер сингулярного вихря / Reverse size of a singular vortex
$\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 25$ км / $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 25$ km	Пространственные шаги / Spatial steps
$\Delta t = 30$ с / $\Delta t = 30$ s	Временной шаг / Temporal step
$K = 2 \cdot 10^{13}$ м ⁴ ·с ⁻¹ / $K = 2 \cdot 10^{13}$ м ⁴ ·с ⁻¹	Коэффициент вязкости / Viscosity coefficient

При втором способе разрешения проблемы сингулярных коэффициентов в системах (4), (5) и (7), (8) используется лагранжев интеграл (14). Зная положение вихря в момент t , можно определить значение регулярной завихренности Ω в точке вихря, не решая уравнений (4), (7), и использовать это значение при расчете полей по этим уравнениям. Этот численный алгоритм также был реализован (см. [10] и ниже раздел 5), результаты расчетов по двум разным алгоритмам оказались весьма близки.

Для исследования динамики монополя на бета-плоскости мы проделали ряд численных экспериментов, параметры которых сведены в таблицу. Взятые параметры характерны для вихрей среднеширотной атмосферы, но все результаты просто пересчитываются на случай океана уменьшением пространственных масштабов $L_x, L_y, R_d, L_v, \Delta$ в 10 раз, характерных скоростей – в 100 раз и увеличением временного масштаба в 10 раз.

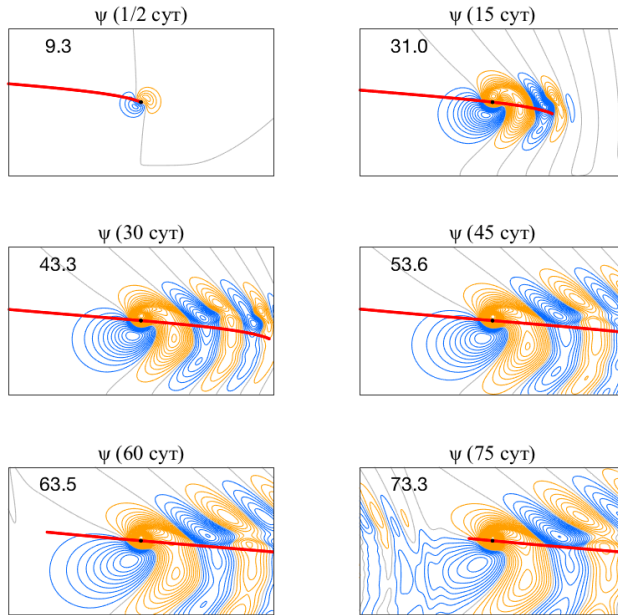
5. Результаты численных экспериментов

Задача (21), (17б), (17в), (17г) зависит от двух безразмерных параметров α и a , полностью определяющих режим движения. Если горизонтальный масштаб вихря $L_v = p^{-1}$ фиксирован, то эволюция определяется только параметром α , т. е. отношением β/A . Здесь мы рассмотрим только точечный вихрь (циклон), для которого $L_v = R_d$ и решение (18) – (20) является точным решением задачи (21), (17б), (17в), (17г) при $\alpha = 0$, т. е. в пределе бесконечно большой амплитуды вихря A ; малый и большой вихри (см. таблицу) ведут себя аналогично (см. также [10]).

Большая амплитуда A . Эволюция вихря, рассчитанная по полным уравнениям (7), (8), в случае большой амплитуды $A = 11A_0$ (см. таблицу) представлена на рис. 3. Как и в линейном режиме, изображенном на рис. 1, сингулярный циклон движется к северо-западу, но поле ψ имеет значительно более сложную структуру. В окрестности вихря снова возникают β -круговороты с растущей со временем амплитудой, но они быстро перестают быть симметричными, причем начиная примерно с $t = 3,5$ сут амплитуда циклонического β -круговорота перестает увеличиваться.

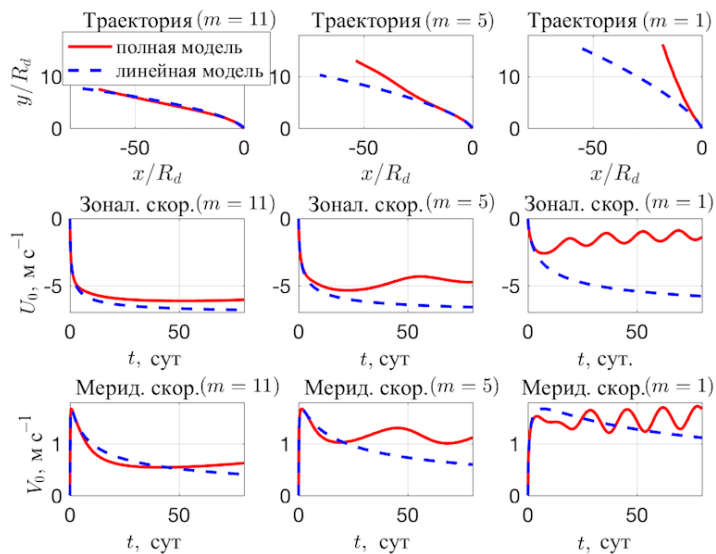
Сингулярный вихрь постепенно смещается внутрь β -круговорота с противоположным знаком (антициклона для циклонического СВ), чего не может быть в «чисто» линейном режиме (см. рис. 1). Дисперсионный член $\beta\psi_x$ в (7) создает излучение волн Россби в дальнюю зону, и к востоку от вихря возникает волновой хвост (качественное описание этого процесса можно найти, напр., в [10] и [20]). Тем не менее амплитуда хвоста остается небольшой, по крайней мере, на расчетных временах (здесь до $t = 80$ сут).

Важно, что эти изменения не сопровождаются потерей связи вихря с циклоническим β -круговоротом, как на нелинейной стадии (см. [10] и ниже), и результирующие скорости и траектория вихря близки к рассчитанным по линейной модели (17) (см. рис. 4). Мы назвали режим эволюции при больших амплитудах A (или, что то же, при небольших β) квазилинейным.



Р и с. 3. Эволюция регулярной функции тока ψ , рассчитанная по полной системе уравнений. Тонкие серые линии тока – нулевые, остальные обозначения и параметры – как на рис. 1

F i g. 3. Evolution of a regular stream function ψ calculated using the complete system of equations. Thin gray streamlines are zero; the other designations and parameters are as in Fig. 1



Р и с. 4. Траектории и скорости точечного вихря при различных значениях A . Левая колонка: $A=11A_0$; центральная: $A=5A_0$; правая: $A=A_0$

F i g. 4. Trajectories and velocities of the point vortex at various values of A . Left column: $A=11A_0$; central column: $A=5A_0$; right column: $A=A_0$

Малая амплитуда A . С уменьшением амплитуды вихря A (и/или с ростом β) эволюция вихря усложняется: сравнительно короткая квазилинейная стадия сменяется нелинейной, когда в (7) становятся важными дисперсионное слагаемое $\beta\psi_x$ и самовоздействие регулярной компоненты $J(\psi, Q)$. Типичный пример такой эволюции приводится на рис. 5 в случае $A = A_0$. Сначала, примерно до $t = 10$ сут, эволюция несильно отклоняется от квазилинейного режима на рис. 1, 3: регулярное поле состоит в основном из диполя в окрестности вихря и следующих за ним волн, не оказывающих существенного влияния на движение вихря. К такому же выводу приводят графики скоростей на рис. 4 для $A = A_0$: примерно до $t = 10$ скорости близки к «линейным». Вместе с тем амплитуда антициклонического β -круговорота и интенсивность волнового поля при $A = A_0$ растут (в относительных единицах) значительно быстрее, чем при большой амплитуде $A = 11A_0$. Этот рост сопровождается более быстрым и глубоким проникновением СВ внутрь антициклонического β -круговорота. При этом амплитуда циклонического β -круговорота после периода начальной релаксации практически не растет, оставаясь примерно на одном и том же уровне, значительно меньшем амплитуды антициклонического β -круговорота на достаточно больших временах.

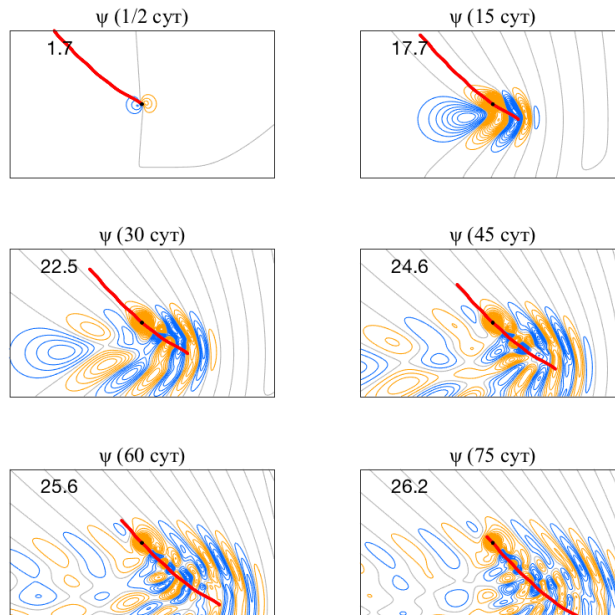


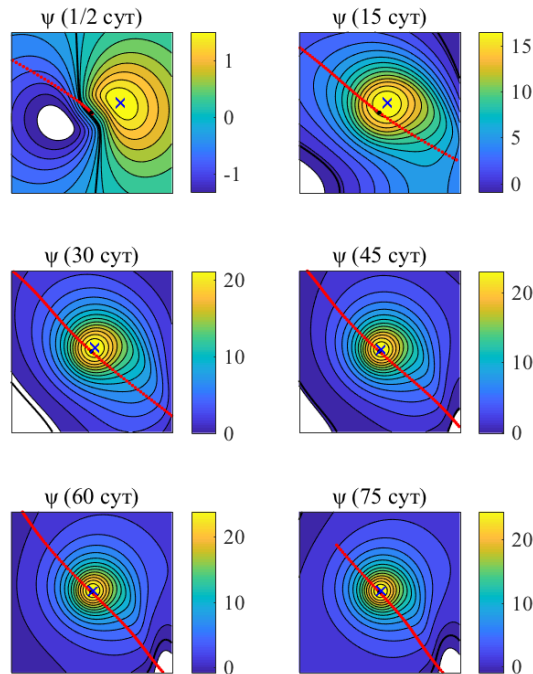
Рис. 5. То же, что на рис. 3, при $A = A_0$. Интервал между контурами равен 0,5

Fig. 5. The same as in Fig. 3 at $A = A_0$. Interval between the contours is 0.5

После $t = 10$ сут характер эволюции кардинально меняется. Обе компоненты скорости вихря перестают монотонно меняться со временем и вместо этого начинают осциллировать около некоторых средних уровней (рис. 4). Средний уровень зональной скорости постепенно уменьшается по модулю,

т. е. дрейф вихря к западу с течением времени постепенно замедляется. Меридиональная же скорость вихря после резкого роста, а затем падения на линейной стадии снова быстро увеличивается, осциллируя около значения $1,5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ (рис. 4). Соответственно, вихрь довольно быстро движется по меридиану к северу. Таким образом, при $t > 10$ сут решение уже сильно отклоняется от линейного режима (17) – (20), почему мы и назвали эту стадию нелинейной.

Поле функции тока при $t > 10$ сут также существенно меняется по сравнению с квазилинейным режимом (ср. рис. 1, 3 и 5). Вихрь продолжает продвигаться внутрь антициклонического β -круговорота и в конце концов оказывается в непосредственной близости от центра последнего (см. рис. 6). Круговорот и вихрь «внутри» него составляют вихревую пару, дрейфующую на северо-запад. По мере сближения вихря с центром круговорота амплитуда последнего быстро растет; одновременно круговорот становится более компактным, приобретая почти круговую форму. В то же время амплитуда циклонического круговорота, начиная с некоторого момента, перестает расти и оказывается намного меньшей амплитуды антициклонического круговорота. Со временем циклонический круговорот «расплывается» и в конце концов теряет непосредственную связь с сингулярным вихрем (см. рис. 5).



Р и с. 6. Дрейф сингулярного циклона к центру антициклонического β -круговорота. Точка – центр сингулярного циклона; крестик – центр β -круговорота; красная кривая – траектория вихря; $p = a$, $A = A_0$. Размер рамки 50×50 , т. е. примерно 2×2 радиуса Россби

F i g. 6. Drift of the singular cyclone towards the center of the anticyclonic β -gyre. Point is the center of the singular cyclone; cross – the center of the β -gyre; red curve – the vortex trajectory; $p = a$, $A = A_0$. The frame size is 50×50 , i. e. approximately 2×2 Rossby radii

Еще одно характерное отличие нелинейного режима от квазилинейного состоит в том, что волны Россби, излученные вихрем, перестают «послушно» за ним следовать (как, например, на рис. 3 и 5 при $t=15$ сут) и начинают с ним взаимодействовать (рис. 5, $t=30$ сут и дальше). Именно этим взаимодействием объясняется появление колебаний на графиках скорости на рис. 4; простой анализ этого и других нелинейных режимов показывает, что число максимумов на графике зональной скорости вихря всегда совпадает с количеством гребней волн Россби, которые вихрь пересекает.

Важный вывод, который можно сделать из рис. 4, заключается в том, что линейный режим неплохо описывает движение вихря, особенно его траекторию, на временах, значительно превышающих формальное время применимости линейных уравнений (17). В разделе 3 мы показали, что это время не превышает волновой масштаб $T_w = \max(p^2, a^2)/\beta p$, равный для точечного вихря $1/\beta R_d$. Для наших параметров $T_w = 1/\beta R_d \approx 1$ сут, и из рис. 4 следует, что действительное время применимости намного превышает T_w , но сильно зависит от амплитуды вихря A : чем больше A , тем дольше работает линейная теория. При большой амплитуде $A=11A_0$ скорости вихря близки к линейным и траектории в линейной и полной теории практически совпадают на всем времени счета. При средней амплитуде $A=5A_0$ расхождение в скоростях увеличивается, но траектория остается близкой к линейной, по крайней мере, до $t=36$ сут (точки на графиках траекторий разделяют 3 сут). Даже в случае вихря малой амплитуды $A=A_0$ траектория близка к линейной, по крайней мере, в течение 15 сут, что больше чем на порядок превышает T_w .

Интегралы движения. Эволюция интегралов движения, полученных в разделе 2, показана на рис. 7 для разных амплитуд вихря. Трение не влияет на интегральный импульс, который хорошо сохраняется во всех случаях. То же справедливо для энергии, слабо подверженной влиянию трения. Видно, что слагаемые E_1 , $-A\psi|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)}$ в (10) одинаковы по порядку величины, в то время как их сумма значительно меньше по модулю каждого из них.

Сравнение этой суммы с интегрированным по времени диссипативным членом $D_1 + D_2$ приводит к выводу, что именно диссипация ответственна за возможное «несохранение» энергии, как это следует из уравнения (10а).

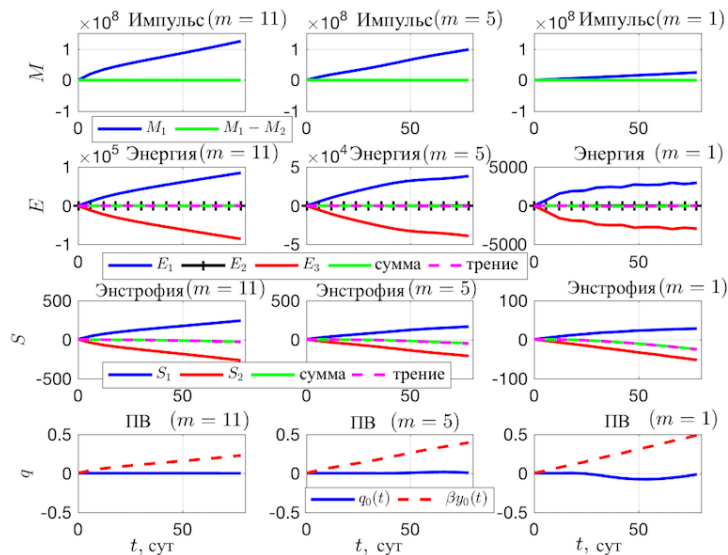
Наиболее сильно трение влияет на энстрофию $S_1 - \beta A y_0$, которая ощутимо убывает со временем во всех случаях. Согласно (11а), кривая убывания суммы $S_1 - \beta A y_0$ должна совпадать с интегрированным по времени диссипативным членом D_3 , что и наблюдается во всех случаях.

Некоторые качественные особенности поведения сингулярного монополя могут быть интерпретированы в терминах интегралов сохранения. Например, в отсутствие трения (т. е. при $D_3 = 0$) из (11а) следует, что рост регулярной энстрофии S_1 (который имеет место во всех случаях; см. рис. 7) должен приводить к монотонному смещению сингулярного циклона ($A > 0$) к северу,

поскольку этот рост должен компенсироваться увеличением величины $-S_2 = \beta A y_0$ в (11a). Аналогично «слияние» циклона с антициклоническим β -круговоротом может быть выведено из сохранения энергии. Например, из (10a) следует, что для точечного вихря в отсутствие трения

$$\partial_t \psi|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)} = \partial_t E_1 / A > 0, \quad (24)$$

поскольку энергия регулярной компоненты E_1 монотонно растет, как это видно из рис. 7. Поэтому величина $\psi|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)}$ увеличивается со временем, т. е. сингулярный вихрь дрейфует от оси диполя β -круговоротов (на которой $\psi = 0$) в область положительных значений ψ – в антициклонический β -круговорот. То же справедливо и для больших и малых вихрей, поскольку в обоих случаях сумма $E_1 + E_2$ увеличивается с ростом t (здесь не показано).



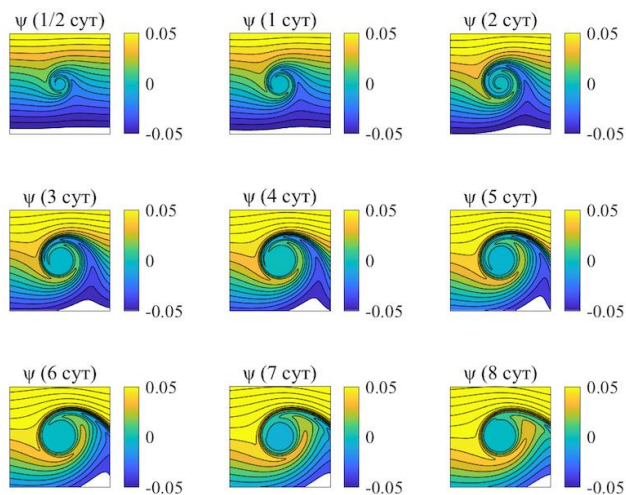
Р и с. 7. Интегралы движения для разных амплитуд СВ. Верхний ряд – зональный импульс, второй ряд сверху – энергия, третий ряд сверху – энтропия, нижний ряд – потенциальный вихрь (ПВ)

F i g. 7. Integrals of motion for different singular vortex amplitudes. The top row is the zonal impulse, the second row from the top is energy, the third row from the top is enstrophy, the bottom row is the potential vortex

Сохранение интегральных импульса, энергии и энтропии свидетельствует о том, что применяемая численная схема приближает исходную задачу с достаточной степенью точности. Лагранжева же характеристика – потенциальная завихренность q регулярного поля в точке вихря (см. (14)) – хорошо сохраняется для вихря большой амплитуды с $m = 11$, хуже – для $m = 5$ и неважно – для $m = 1$. В принципе это понятно, поскольку соотношение (14) строго получается только для «истинно» сингулярного вихря с δ -образной завихренностью. Используемый нами «разностный» сингулярный вихрь, оче-

видно, отличается от «истинного», и это отличие усиливается с убыванием m . Тем не менее остается важный вопрос: как влияет плохая «сохраняемость» q на траекторию и скорости вихря.

Для проверки мы рассчитали эволюцию вихря, используя альтернативную численную схему, упомянутую выше в разделе 4. В этой схеме сохранение потенциального вихря (14) выполняется точно, и проблема заключается в том, что в отсутствие вязкости в ближней окрестности вихря имеет место сильная изменчивость ПВ [2], которая не позволяет вычислить ПВ с требуемой точностью в узлах сетки, близких к вихрю. В то же время даже минимальная вязкость приводит к практически мгновенной гомогенизации ПВ в ближней окрестности СВ (см. рис. 8). Гомогенизация практически не влияет на регулярную компоненту, но позволяет несколько модифицировать численный алгоритм. В модифицированной схеме на каждом шаге по времени регулярная завихренность Ω в точке вихря определяется из (14), а в четырех ближайших узлах – по известной величине гомогенизированной потенциальной завихренности. Очевидно, при таком подходе нет разницы между «точным» сингулярным вихрем (6) и его конечно-разностным аналогом, поскольку точки сингулярности не участвуют в расчете производных. Важно, что численные решения в обоих подходах близки друг к другу, т. е. вариации регулярного ПВ в точке вихря практически не влияют ни на структуру регулярного поля, ни на скорости и траекторию СВ.



Р и с. 8. Эволюция полного потенциального вихря $\nabla^2\psi - a^2\psi + \beta y$ для точечного СВ на начальной стадии. Изолинии ПВ показаны в области 50×50 с центром в точке вихря

F i g. 8. Evolution of the total potential vorticity $\nabla^2\psi - a^2\psi + \beta y$ for the point singular vortex at the initial stage. The potential vorticity isolines are shown in the 50×50 area with the center at the vortex point

6. Обсуждение результатов

Мы представили краткий обзор результатов теории сингулярных вихрей бета-плоскости, предложенной впервые в [2]. Основной акцент сделан на недавних работах по численному моделированию эволюции отдельного сингулярного монополя, взаимодействующего с генерируемым им регулярным течением [10]. Созданы и реализованы два численных алгоритма, позволяющих

рассчитывать такую эволюцию. В первом из этих алгоритмов «теоретический» сингулярный вихрь заменяется эквивалентным «численным» вихрем конечной амплитуды, совместимым с конечно-разностной моделью. Другой алгоритм использует лагранжево сохранение потенциального вихря регулярной компоненты в точке вихря и гомогенизацию ПВ в его окрестности, создаваемую любым сколь угодно малым трением. Оба алгоритма дают практически совпадающие друг с другом результаты, демонстрирующие, что предложенная модель, во-первых, аккуратно воспроизводит начальную квазилинейную стадию эволюции СВ (которая для точечного СВ рассчитывается аналитически) и, во-вторых, сохраняет несколько инвариантов движения, полученных из исходных непрерывных уравнений.

Эволюция вихря протекает в два этапа (для определенности будем говорить о циклоне). На первой (квазилинейной) стадии движение СВ к северо-западу создается вторичным диполем в окрестности СВ (так называемые β -круговороты), создаваемым излучением волн Россби в ближнюю зону. При этом зональная скорость вихря быстро уменьшается от нуля до некоторого отрицательного минимального значения; меридиональная скорость сначала быстро растет, а потом так же быстро падает до своего минимума (положительно-го). Продолжительность квазилинейной стадии сильно зависит от амплитуды СВ: увеличение (уменьшение) амплитуды удлиняет (укорачивает) эту стадию и углубляет (увеличивает) минимумы скоростей.

Квазилинейная стадия постепенно сменяется нелинейной, когда дипольная структура в ближней области разрушается, циклонический β -круговорот теряет связь с вихрем и постепенно исчезает. Сингулярный вихрь сливается с антициклоническим β -круговоротом, образуя с ним компактную вихревую пару, продолжающую двигаться к северо-западу и взаимодействующую с излученными вихрем волнами Россби. Это взаимодействие приводит к временным осцилляциям компонент скорости вихря, причем в среднем зональная скорость (направленная на запад) убывает, а меридиональная остается на постоянном уровне. С уменьшением амплитуды СВ его зональная скорость в среднем убывает по модулю, а меридиональная – растет; соответственно, траектория отклоняется к полюсу. Нелинейная стадия эволюции СВ на бета-плоскости впервые представлена в нашей работе [10].

В настоящей работе приведены результаты только для точечного вихря с $p = a$; эволюция большого и малого вихрей с $p \neq a$ качественно такая же, но имеются некоторые отличия, описанные в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане // Л. : Гидрометеониздат, 1982. 264 с.
2. Reznik G. M. Dynamics of singular vortices on a beta-plane // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 240. P. 405–432. doi:10.1017/S0022112092000144
3. Reznik G. M., Dewar W. K. An analytical theory of distributed axisymmetric barotropic vortices on the β -plane // Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 269. P. 301–321. <https://doi.org/10.1017/S0022112094001576>
4. Sutyryn G. G., Flierl G. R. Intense Vortex Motion on the Beta Plane: Development of the Beta Gyres // Journal of the Atmospheric Sciences. 1994. Vol. 51, iss. 5. P. 773–790. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1994\)051<0773:IVMOTV>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1994)051<0773:IVMOTV>2.0.CO;2)

5. *Llvellyn Smith S. G.* The motion of a non-isolated vortex on the beta-plane // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. Vol. 346. P. 149–179. <https://doi.org/10.1017/S0022112097006290>
6. Dynamical properties of vortical structures on the beta-plane / G. G. Sutyryn [et al] // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. Vol. 268. P. 103–131 doi:10.1017/S002211209400128X
7. *Lam J. S-L., Dritschel D. G.* On the beta-drift of an initially circular vortex patch // *Journal of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 436. P. 107–129. <https://doi.org/10.1017/S0022112001003974>
8. *Korotaev G. K., Fedotov A. B.* Dynamics of an isolated barotropic eddy on a beta-plane // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. Vol. 264. P. 277–301. <https://doi.org/10.1017/S0022112094000662>
9. *Early J. J., Samelson R. M., Chelton D. B.* The Evolution and Propagation of Quasigeostrophic Ocean Eddies // *Journal of Physical Oceanography*. 2011. Vol. 41, iss. 8. P. 1535–1554. <https://doi.org/10.1175/2011JPO4601.1>
10. *Kravtsov S., Reznik G.* Numerical solutions of the singular vortex problem // *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31. 066602. <https://doi.org/10.1063/1.5099896>
11. *Firing E., Beardsley R. C.* The Behavior of a Barotropic Eddy on a β -Plane // *Journal of Physical Oceanography*. 1976. Vol. 6, iss. 1. P. 57–65. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1976\)006<0057:TBOABE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1976)006<0057:TBOABE>2.0.CO;2)
12. *Carnevale G. F., Kloosterziel R. C., Van Heijst G. J. F.* Propagation of barotropic vortices over topography in a rotating tank // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 233. P. 119–139. <https://doi.org/10.1017/S0022112091000411>
13. *Saffman P. G.* Vortex Dynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 1993. Vol. 256. P. 720–723. <https://doi.org/10.1017/S0022112093212939>
14. *Reznik G. M., Kizner Z.* Two-layer quasigeostrophic singular vortices embedded in a regular flow. Part I: Invariants of motion and stability of vortex pairs // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 584. P. 185–202. <https://doi.org/10.1017/S0022112007006386>
15. *Reznik G., Kizner Z.* Two-layer quasigeostrophic singular vortices embedded in a regular flow. Part 2. Steady and unsteady drift of individual vortices on a beta-plane // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 584. P. 203–223. doi:10.1017/S0022112007006404
16. *Кляцкин К. В., Резник Г. М.* О точечных вихрях на вращающейся сфере // *Океанология*. 1989. Т. 29, № 1. С. 21–27.
17. *Резник Г. М., Кравцов С. В.* Динамика баротропного сингулярного монополя на бета-плоскости // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 1996. Т. 32, № 6. С. 762–769.
18. *Arakawa A.* Computational Design for Long-Term Numerical Integrations of the Equations of Atmospheric Motion // *Journal of Computational Physics*. 1966. Vol. 1. P. 119–143. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(66\)90015-5](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(66)90015-5)
19. *McWilliams J. C.* A note on a consistent quasigeostrophic model in a multiply connected domain // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. Vol. 1, iss. 5. P. 427–441. [https://doi.org/10.1016/0377-0265\(77\)90002-1](https://doi.org/10.1016/0377-0265(77)90002-1)
20. *Резник Г. М.* Динамика локализованных вихрей на бета-плоскости // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2010. Т. 46, № 6. С. 846–860.

Об авторах:

Резник Григорий Михайлович, главный научный сотрудник, ФГБУН ИО РАН (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский пр., д. 36), доктор физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0003-2626-2239**, **ResearcherID: W-3112-2017**, greznikmd@yahoo.com

Кравцов Сергей Вячеславович, профессор университета штата Висконсин в г. Милуоки, США (Department of Mathematical Sciences, University of Wisconsin-Milwaukee, P. O. Box 413, Milwaukee, WI 53201), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0003-3653-9596**, **ResearcherID: ABA-2061-2020**, kravtsov@uwm.edu