


Оценка степени взаимодействия твердой и жидкой фаз в неконсолидированных водонасыщенных песчаных морских осадках при распространении сдвиговой волны

В. А. Лисютин , О. Р. Ластовенко

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
 vlisiutin@mail.ru

Поступила в редакцию 6.06.2020 г., после доработки – 16.09.2020 г.

Цель. Рассматривается распространение сдвиговой волны в песчаных морских осадках. Акустическими характеристиками сдвиговой волны являются фазовая скорость и коэффициент затухания. Известно, что в сухих песчаных осадках коэффициент затухания прямо пропорционален частоте. В водонасыщенных средах отмечаются отклонения от этого закона, откуда следует, что существует два физических механизма потерь – межгранулярное и вязкое трение. Целью работы является развитие двухфазной модели распространения сдвиговой волны в неконсолидированных морских осадках и выявление диссипативных эффектов, вызванных относительным движением флюида в пространстве пор.

Методы и результаты. Межгранулярное трение моделируется с помощью прумпфера – элемента, сочетающего консервативные свойства пружины и диссипативные свойства демпфера. Записывается уравнение движения, в котором часть жидкости считается связанной с твердой фазой среды, а часть жидкости считается подвижной. Уравнения состояния и уравнение движения при гармоническом смещении дают новое двухфазное дисперсионное уравнение (теория *Grain Shearing + Effective Density*, или сокращенно *GS + EDs*). Результаты теории *GS + EDs* сопоставляются с данными измерений скорости и затухания волны, взятыми из открытых источников. Показывается, что механизмы взаимодействия между гранулами и между гранулами и флюидом при распространении компрессионной и сдвиговой волны различаются. Анализируется характер изменения параметров межгранулярного трения при насыщении порового пространства флюидом.

Выводы. Проявление диссипативных эффектов от насыщения пор флюидом зависит от плотности упаковки гранул. В случае плотной упаковки условия для относительного движения жидкости отсутствуют и песчаные осадки проявляют свойство постоянной добротности. В случае неплотной упаковки вязкие потери вносят существенный вклад и частотная зависимость затухания нелинейна. Эффективные размеры пор для компрессионной и сдвиговой волны не совпадают.

Ключевые слова: неконсолидированные морские осадки, межгранулярное трение, вязкие потери, дисперсия, сдвиговая волна, коэффициент затухания, дисперсионное уравнение

Благодарности: исследование выполнено в рамках внутреннего гранта СевГУ «Развитие теоретических моделей для физических методов исследования шельфа Черного моря», проект № 41/06-31.

Для цитирования: Лисютин В. А., Ластовенко О. Р. Оценка степени взаимодействия твердой и жидкой фаз в неконсолидированных водонасыщенных песчаных морских осадках при распространении сдвиговой волны // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 1. С. 98–112. doi:10.22449/0233-7584-2021-1-98-112

Assessing the Power of Intensity Interaction between the Solid and Fluid Phases in the Unconsolidated Water-Saturated Sandy Marine Sediments at Shear Wave Propagation

V. A. Lisyutin ✉, O. R. Lastovenko

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
✉vlisiutin@mail.ru

Purpose. Propagation of a shear wave in sandy marine sediments is considered. The acoustic properties of a shear wave are the phase velocity and the attenuation coefficient. It is known that in dry sandy sediments, the attenuation coefficient is directly proportional to frequency. In the saturated mediums, there are the deviations from this law that implies existence of two physical mechanisms of losses – the intergranular friction and viscous loss. The study is aimed at developing a two-phase theoretical model of the shear wave propagation in the unconsolidated marine sediments, and at identifying the dissipative effects caused by the fluid relative movement in the pore space.

Methods and Results. The intergranular friction is modeled using a springpot, which represents an element combining conservative properties of a spring and dissipative ones of a dashpot. The equation of motion is applied, where a part of fluid is assumed to be associated with the media solid phase and another part is considered to be mobile. For a harmonic displacement, the equations of state and the equation of motion yield a new two-phase dispersion relation (the theory of *Grain Shearing + Effective Density*, or *GS + EDs*, for short). The results of the *GS + EDs* theory are compared with the data of the velocity and attenuation measurements taken from the open sources. It is shown that during propagation of the compressional and shear waves, the mechanisms of interaction between the granules, and between the granules and fluid are not similar. Character of the changes in the grain-to-grain friction parameters when the pore space is saturated with fluid, is analyzed.

Conclusion. Manifestation of the dissipative effects resulting from the pore saturation with fluid depends on the density of the granules packing. In case of a dense packing, there are no conditions for the fluid relative movement, and the sandy sediments exhibit the property of a constant *Q*-factor. If the packing is loose, the viscous losses make a significant contribution, and the attenuation frequency dependence is nonlinear. The effective pore sizes for the compression and shear waves do not coincide.

Keywords: unconsolidated marine sediments, intergranular friction, viscous losses, dispersion, shear wave, attenuation coefficient, dispersion relation

Acknowledgements: The investigation was carried out within the framework of the Sevastopol State University internal grant "Development of theoretical models for physical methods of research of the Black Sea shelf", project No. 41/06-31.

For citation: Lisyutin, V.A. and Lastovenko, O.R., 2021. Assessing the Power of Intensity Interaction between the Solid and Fluid Phases in the Unconsolidated Water-Saturated Sandy Marine Sediments at Shear Wave Propagation. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(1), pp. 90-103. doi:10.22449/1573-160X-2021-1-90-103

Введение. В горных породах, грунтах, морских осадках могут распространяться не только продольные, но и поперечные (сдвиговые) волны [1, 2]. В консолидированных средах типа ракушечников, песчаников связь между частичками твердой фазы при сдвиговой деформации возникает из-за существования упругого скелета, в неконсолидированных морских осадках типа песка, ила, глины – вследствие сил межгранулярного (внутреннего) трения.

Результаты измерений в сухих горных породах, песках показывают линейную частотную зависимость коэффициента затухания (дБ/м) сдвиговой волны: $\alpha_s = \alpha_{s0} f^\delta$, где $\delta \approx 1$ – показатель затухания [3–5]. С другой стороны, Р. Д. Столл [6], Б. Брунсон [7], М. Кимура [8, 9], Н. Чотирос [10, 11] обра-

ют внимание на отклонения показателя δ от единицы в водонасыщенных средах.

Линейная зависимость коэффициента затухания объясняется внутренним трением между частичками твердой фазы морских осадков, отклонения от линейности и существенная дисперсия скорости сдвиговой волны в окрестности переходной частоты – вязкими потерями при относительном движении поровой жидкости.

Показатель δ в степенном законе затухания отражает характер взаимодействия между твердой и жидкой фазами среды. Если $\delta = 1$, фазы не взаимодействуют – это двухкомпонентная среда. Если $1 < \delta < 2$, что соответствует частотам ниже переходной, жидкая фаза проскальзывает, в порах – течение Пуазейля, доминируют вязкие силы. Если $0,5 < \delta < 1$, что соответствует частотам выше переходной, жидкость проскальзывает, профиль относительной скорости плоский – доминируют инерционные силы.

В работах [12, 13] представлена теория *Grain Shearing + Effective Compressibility (GSEC)*, в которой рассматривается распространение продольной волны в морских осадках. Модель *GSEC* учитывает межгранулярное (*GS*) трение и вязкие потери. Чтобы подключить вязкие потери в формуле для фазовой скорости звука, равновесный модуль объемной упругости среды заменен на эффективный (двухфазный) модуль, зависящий от частоты, что дает дисперсию компрессионно-вязкого (*EC*) типа, влияющую только на продольную волну. Массовое свойство среды – плотность принимается постоянной.

В работе [14] представлена модель *GS + EDensity*, в которой в формуле для фазовой скорости звука сжимаемость среды предполагается постоянной, но равновесная плотность заменена на эффективную комплексную, что дает дисперсию инерционно-вязкого типа, влияющую на оба типа волн – продольную и поперечную.

Обе модели показывают одинаковый результат вычислений. В реальной среде могут проявляться оба типа дисперсии в разной степени.

Изменение массовых свойств среды можно оценить, анализируя результаты измерений частотных зависимостей затухания сдвиговой волны. Степень взаимодействия твердой и жидкой фаз в водонасыщенных неконсолидированных осадках при сдвиге является дискуссионным вопросом. Существуют две противоположные точки зрения. Р. Д. Столл [6], Б. Брунсон [7], М. Кимура [8, 9], Н. Чотирос [10, 11] утверждают, что в морских осадках затухание сдвиговой волны изменяется с частотой ($\omega = 2\pi f$) по нелинейному закону, а Э. Гамильтон [5], М. Букингом [15, 16] полагают, что коэффициент затухания $\alpha_s \sim \omega^1$.

Отвечая на этот вопрос, можно выявить и источники дисперсии продольной волны – изменение сжимаемости среды [12, 13], или изменение эффективной плотности среды [14], или и то и другое (в этом случае и их пропорцию). Представляемая статья является продолжением исследований [12–14].

Дисперсионное уравнение для сдвиговой волны. Распространение сдвиговой волны в неконсолидированных морских осадках возможно только вследствие сил межгранулярного трения. С другой стороны, трение будет вызывать также и потери энергии.

Рассмотрим сдвиговую волну вида $u_{yg} = \exp(i\omega t - ik_s x)$, распространяющуюся вдоль оси OX в пористой флюидонасыщенной среде. Поперечное смещение частичек твердой фазы обозначим u_{yg} , волновое число – k_s .

Взаимодействие между гранулами будем моделировать связью через посредство прумпфера (англ. – *springpot*) – элемента, сочетающего консервативные свойства пружины и диссипативные свойства демпфера [17]. Уравнение состояния прумпфера предполагает вязко-упруго-пластичный характер деформации и имеет вид

$$\sigma(t) = \mu \tau^m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m}, \quad (1)$$

где σ – касательное механическое напряжение; μ , τ – константы, отражающие баланс между накоплением и диссипацией энергии; m – порядок дробной производной, определяющий величину показателя затухания δ , $0 < m < 1$;

$\varepsilon = \frac{\partial u_{yg}}{\partial x}$ – сдвиговая деформация ($\frac{\partial u_{yg}}{\partial x}$ – компонента дивергенции). Если $m = 1$, то прумпфер трансформируется в демпфер и колебательный процесс будет затухающим и неволновым; если $m \rightarrow 0$, тогда прумпфер – это пружина и колебания будут незатухающими.

Поровое пространство реальной среды имеет сложную структуру, состоящую из участков переменного поперечного сечения. Мелкие гранулы могут закупоривать проходы в порах, образуя изолированные полости. Жидкость, запертая в таких полостях, будет колебаться вместе с гранулами.

Пусть P – статическая пористость среды, соответствующая объему жидкости, который вмещают все поры; ρ_f, ρ_g – плотности жидкости и твердой фазы соответственно. Подвижную относительно гранул долю жидкости будем характеризовать эффективной (перколяционной [12]) пористостью ϕ . Таким образом, массовая доля жидкости, равная $(P - \phi)\rho_f$, колеблется вместе с долей твердой фазы, равной $(1 - P)\rho_g$, и только доля жидкости $\phi\rho_f$ увлекается гранулами в результате инерционно-вязкого взаимодействия и колеблется отдельно с меньшей амплитудой. Запишем уравнение движения в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((1 - P)\rho_g u_{yg} + (P - \phi)\rho_f u_{yg} + \phi\rho_f U_{yf} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (2)$$

где U_{yf} – смещение частичек жидкости.

Применив $\partial/\partial x$ к (1), сравнивая с (2), получаем

$$\rho_m \ddot{u}_{yg} - \phi\rho_f (\ddot{u}_{yg} - \dot{U}_{yf}) = \mu \tau^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^2 u_{yg}}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где $\rho_m = P\rho_f + (1 - P)\rho_g$ – равновесная плотность среды.

Определяя комплексную фазовую скорость формулой $\tilde{c}_s = \omega/k_s$, подставляя в (3) гармоническую зависимость, получаем уравнение для фазовой скорости

$$\tilde{c}_s = \sqrt{\frac{\gamma_s (i\omega t_0)^m}{\rho_m - \varphi \rho_f (1 - U_{av})}}, \quad (4)$$

где $\gamma_s = (\tau/t_0)^m \mu$ – модуль сдвиговой межгранулярной жесткости, Па; $t_0 = 1$ с – формальная константа, восстанавливающая правильную физическую размерность; U_{av} – средняя по поперечному сечению поры амплитуда колебаний жидкости.

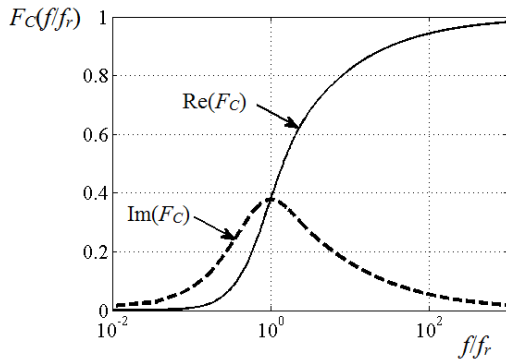
Рассматривая среду с порами в виде цилиндрических труб радиусом a , ось которых ориентирована вдоль вектора \mathbf{u} смещения твердой фазы, решая уравнение Навье – Стокса [18], можно вычислить величину $(1 - U_{av})$:

$$1 - U_{av} = 1 - \frac{2J_1(i^{3/2}w)}{i^{3/2}wJ_0(i^{3/2}w)} = F_C(w), \quad (5)$$

здесь J_0, J_1 – функции Бесселя;

$$w = \sqrt{\frac{a^2 \rho_f}{\eta} 2\pi f}, \quad (6)$$

где η – динамическая вязкость жидкости, Па·с. Заметим, что выражения для функции частотной коррекции F_C и ее аргумента в работах [12, с. 91; 13, с. 423; 14, с. 43], совпадают с формулами (5) и (6). График функции коррекции в зависимости от частоты f , нормированной на переходную частоту $f_r = \sqrt{\eta/a^2 \rho_f}$, приведен на рис. 1.



Р и с. 1. Функция частотной коррекции в зависимости от нормированной частоты

F i g. 1. Frequency correction function depending on the normalized frequency

Подставляя (5) в (4), получаем дисперсионное уравнение для сдвиговой волны в виде

$$\tilde{c}_s = \sqrt{\frac{\gamma_s (i\omega t_0)^m}{\rho_{seff}}}, \quad (7)$$

где

$$\rho_{seff} = \rho_m - T_s^{-1} \varphi \rho_f F_C(w) \quad (8)$$

– сдвиговая эффективная плотность; T_s – коэффициент, имеющий смысл извилистости пор [6, 13].

Вещественная фазовая скорость c_s и коэффициент затухания α_s могут быть получены из комплексной скорости: $c_s = (\text{Re}(\tilde{c}_s^{-1}))^{-1}$; $\alpha_s = -\omega \text{Im}(\tilde{c}_s^{-1})$, Нп/м.

Вещественная часть второго слагаемого эффективной плотности (8) характеризует инерционное взаимодействие фаз и управляет дисперсией фазовой скорости, мнимая часть характеризует вязкие потери и управляет затуханием. Эффективная плотность имеет простое физическое истолкование. На низких частотах $\text{Re}(F_C) \rightarrow 0$, $\text{Im}(F_C) \rightarrow 0$, $\rho_{\text{seff}} \approx \rho_m$, почти вся жидкость увлекается колеблющимися гранулами, а вязкие силы пренебрежимо малы. В окрестности переходной частоты часть жидкости увлекается, часть проскальзывает, вязкие силы максимальны. На высоких частотах гранулы и запертая в порах жидкость колеблются вместе, поперечно-подвижная часть жидкости – проскальзывает. Вязкие силы сосредоточены в тонком пограничном слое вокруг контура сквозных пор.

Если положить $\varphi = 0$, то дисперсионное уравнение (7) совпадает с соответствующим уравнением *GS*-теории, разработанной М. Букингом [16, с. 2812]. Модель межгранулярного взаимодействия в виде прумпфера эквивалентна явлению деформационного упрочнения – возрастанию сопротивления демпфера с увеличением деформации [15, 16].

Представленную модель будем называть далее *GSEDS*, отмечая применение ее к распространению сдвиговой волны.

Сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными. Потери энергии при распространении упругих волн в средах принято характеризовать коэффициентом затухания α (дБ/м) = $8,69 \cdot \alpha$ (Нп/м). При вычислениях акустических полей чаще используется тангенс потерь β_s , входящий в формулу для волнового числа $k_s = \frac{\omega}{c_s}(1 - i\beta_s)$, $\beta_s = \frac{\alpha_s c_s}{\omega}$. В геофизике чаще используется добротность $Q_s = 1/(2\beta_s)$.

Чтобы вычислить тангенс потерь или добротность, необходимо располагать результатами измерений и скорости, и коэффициента затухания на одинаковых частотах. Если измерялось только затухание на разных частотах, то его отклонения от линейной зависимости нагляднее всего проявляются в отличии приведенного коэффициента затухания α_{s0} (дБ/(м·кГц)) от постоянной величины или показателя затухания δ от единицы.

Входными параметрами *GSEDS*-модели, характеризующими микротрение, являются модуль сдвиговой жесткости γ_s , Па, и показатель деформационного упрочнения m . Эти два параметра определяются инверсией экспериментальных данных. Если движением жидкости пренебречь, то показатели затухания δ и деформационного упрочнения связаны соотношением $\delta = 1 - m/2$.

Входные параметры, характеризующие поровое пространство и движение жидкости, следующие: a – размер пор; φ – эффективная пористость. Определить эти параметры можно, сопоставляя модельную зависимость $\alpha_{s0}(f)$ с измеренной.

Априорную оценку размера пор при распространении продольной волны можно получить, используя измерения частотной зависимости проницаемости среды, составленной из одинаковых стеклянных шариков [13]:

$$a = d_e/7,35 = 0,136d_e, \quad (9)$$

где d_e – диаметр шариков, составляющих эквивалентную среду, проницаемость которой равна измеренной проницаемости реальной среды. Вычислить соответствующий измеренной проницаемости размер шариков можно, обра-

щая формулу Козени – Кармана $\kappa_0 = \frac{1}{180} \frac{P^3}{(1-P)^2} d^2$, где κ_0 – статическая

проницаемость среды, m^2 . Учитывая, что пористость среды из шариков P_0 при случайной упаковке равна $\sim 0,37$, зная проницаемость реальной среды, можно вычислить эквивалентный диаметр шариков:

$$d_e = 39 \sqrt{\kappa_0} . \quad (10)$$

Отметим, что использованные ниже результаты лабораторных измерений не позволяют восстановить зависимость микропараметров трения от глубины, возникающую вследствие наличия вертикальных градиентов физических свойств осадков (пористости, проницаемости), а также геостатического давления. В рамках однофазной теории межгранулярного трения этот вопрос исследуется М. Букингом в работе [19].

Рассмотрим вместе результаты экспериментов Б. Брунсона [7, 15, 20], Д. Белла [10, 15, 21], М. Кимуры [8, 9] и SAX99 (*Sediment Acoustics Experiment* 1999) [22, 23] (рис. 2, таблица).

Б. Брунсон [7] измерял коэффициент затухания $\alpha_{s0}(f)$ в водонасыщенном угловатом песке и стеклянных шариках в диапазоне частот от 1 до 20 кГц, а скорость сдвиговой волны $c_s(f)$ – на одной частоте. Гранулированная среда заключалась в вертикальный акриловый цилиндр длиной около 0,5 м, и сверху прикладывалось давление 12 кПа, соответствующее глубине 1,35 м. Б. Брунсон и Р. Джонсон [20] выполняли аналогичные измерения с кварцевым песком в диапазоне частот 0,45...7 кГц при вертикальном давлении 3,5 кПа (глубина $\sim 0,4$ м) (рис. 2, *a, b*; таблица). На рис. 2, *a, b* экспериментальными точками (синие ромбы) показаны также результаты инверсии скорости и затухания сдвиговой волны, полученные *in situ* в ходе измерений дисперсионно-диссипативных свойств поверхностной волны на низких частотах 20, 25, 35 Гц [15]. Эти три точки (синие ромбы) расположились почти на вертикальной оси. На этом же рисунке результаты измерений, полученные в морском эксперименте SAX99 ($c_s = 120$ м/с, $\alpha_s = 30$ дБ, $f = 1$ кГц) [22, 23]. В локации SAX99 – чистый песок с гранулами размером 0,29...0,56 мм.

В экспериментах Д. Белла измерялась скорость волны $c_s(f_0)$ на одной частоте и ее затухание $\alpha_s(f)$ в диапазоне частот 0,6 ... 20 кГц в песке и мелких стеклянных шариках, водонасыщенных и сухих (рис. 2, *a, b*; таблица). Измерения проводились в малом (16 × 20 × 30 см) и большом (46 × 56 × 70 см, объем 150 л) ящиках. Датчики были заглублены в среду на 20 см, что соответствует давлению 1,8 кПа [21].

М. Кимура [8, 9] измерял скорость и затухание сдвиговой волны на различных частотах в сортированном песке (рис. 2, *c – f*; таблица). Использовалась измерительная установка настольного типа, образцы песка упаковывались в полиэтиленовые цилиндры диаметром 43 мм и высотой до 200 мм. Внешняя нагрузка вызывала давление 17,3 кПа, что соответствует глубине 1,75 м. Измерения выполнялись в сеянном песке с одним размером гранул при разных температурах и с разным размером гранул, но при одной температуре.

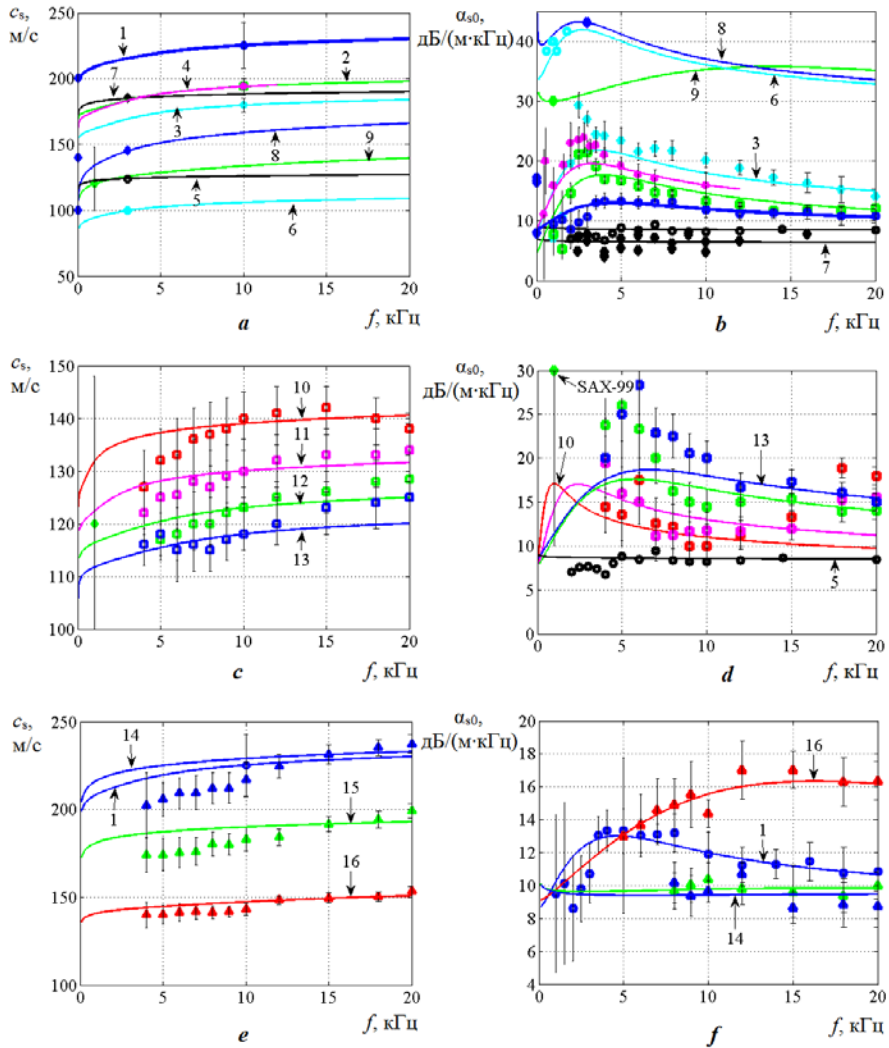


Рис. 2. Частотные зависимости фазовой скорости c_s (*a, c, e*) и коэффициента затухания α_{s0} (*b, d, f*) сдвиговой волны: *a, b* – по данным измерений Б. Брунсона, Р. Джонсона [7, 20] (зеленые квадраты – в угловатом сеянном песке; голубые звезды – в несееяном песке по данным из работы [7]; розовые звезды – в несееяном песке по данным из работы [20]; голубые кружки – в стеклянных шариках) и Д. Белла [21] (черные ромбы – в сухом песке; синие – в водонасыщенном; черные кружки – в сухих стеклянных шариках; голубые – в водонасыщенных); *c, d* – по данным измерений М. Кимуры в сортированном песке с различным размером гранул при температуре 20°С и Д. Белла в сухих стеклянных шариках; *e, f* – по данным измерений М. Кимуры в сортированном песке при разных температурах. Экспериментальные точки обозначены символами, расчетные графики – цифрами (см. таблицу)

Fig. 2. Frequency dependences of the phase velocity c_s (*a, c, e*) and the attenuation coefficient α_{s0} (*b, d, f*) of the shear wave: *a, b* – in the measurements of B. Brunson and R. Johnson [7, 20] (green squares – in angular sieved sand; blue stars – in non-sieved sand based on the data from [7]; pink stars – in non-sieved sand based on the data from [20]; blue circles – in glass beads) and D. Bell [21] (black rhombuses – in dry sand; blue rhombuses – in water-saturated sand; black circles – in dry glass beads; blue circles – in water-saturated beads); *c, d* – in the measurements of M. Kimura in the sorted sand with different granule sizes at temperature 20°C and D. Bell in dry glass beads; *e, f* – in the measurements of M. Kimura in sorted sand at various temperature. The experimental points are indicated by symbols, the calculation graphs – by numerals (see the table)

В результатах измерений, выполненных в разное время с помощью разных установок, на высоких частотах (12 кГц) отмечается изменение затухания от 9 (дБ/(м·кГц)) для крупных до 17 дБ/(м·кГц) для мелких гранул (рис. 2). Исключение составляют результаты измерений, проведенных Д. Беллом и группой исследователей SAX99 при самом низком внешнем давлении. Значительная разница наблюдается в скоростях сдвиговой волны. Наилучшее, образцовое соответствие между экспериментальными точками, теоретической зависимостью $\alpha_{s0}(f)$ и восстановленными параметрами пространства пор показывают результаты экспериментов Б. Брунсона в среде из стеклянных шариков (синие кружки, график 1 на рис. 2, *a, b*; таблица).

Входные физические параметры и параметры межгранулярного трения и порового пространства, восстановленные по данным разных экспериментов
The input physical parameters and the intergranular friction and pore space parameters reconstructed based on the data of different experiments

Параметр / Parameter	Б. Брунсон и Джонсон [7, 20] / B. Brunson and R. Johnson [7, 20]				Д. Белл [21] / D. Bell [21]			SAX99	
	Стеклянные шарики [7] / Glass beads [7]	Песок / Sand			Шарики / Beads		Песок / Sand		
		сеяный [7] / sieved / [7]	несеяный [7] / non-sieved [7]	несеяный [20] / non-sieved [20]	сухие / dry	водонасыщенные / water-saturated	сухой / dry		водонасыщенный / water-saturated
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_s , мм / d_s , mm	0,385	0,385	0,372	0,35	0,177		0,354		0,379
d_e , мм / d_e , mm	0,416	0,372	0,332	0,4 *	–	0,16	–	0,24	0,176 [13]
P	0,355	0,432	0,432	0,395	–	0,365 ± 0,008	–	0,386 ± 0,014	0,372 [13]
η	принималась равной $1 \cdot 10^{-3}$ Па·с / accepted equal to $1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s								
ρ_m , кг/м ³ / ρ_m , kg/m ³	1968	1937	1937	1998	1550 ± 2	1920	1600	1990	2069
$\kappa_0 \cdot 10^{-11}$, м ² / $\kappa_0 \cdot 10^{-11}$, м ²	11,43	9,08	7,25	10,5 **	–	1,7	–	3,79	2,02
T	1,65 ***	1 *** (1,92 [7])	1 *** (2,52 [7])	1 ***	1,65	1,65	–	1,3 ***	1,35
$\langle \alpha_{s0} \rangle$, дБ/(м·кГц) / $\langle \alpha_{s0} \rangle$, dB/m·kHz	11,48 ± 1,50	14,4 ± 4,3	19,6 ± 5,7	19,5 ± 3,7	8,1	33 ± 6	6,0 ± 1,4	43	30 ± 10
α_{p0} , дБ/(м·кГц) / α_{p0} , dB/m·kHz	–	–	–	–	109	0,23	23	0,23	0,4 [13]
$\gamma_s \cdot 10^6$, Па / $\gamma_s \cdot 10^6$, Pa	60,5	51,0	39,0	45,2	18,4	9,43	41,5	13,6	14,8
$\gamma \cdot 10^6$, Па / $\gamma \cdot 10^6$, Pa	190 [13]	–	–	–	1,24	164,2	15,5	61,9	23,6 [13]
m	0,039	0,018	0,0284	0,033	0,025	0,067	0,0284	0,11	0,08
n	0,06 [13]	–	–	–	0,25	0,092	0,12	0,13	0,192 [13]
ϕ_s ; ϕ_p	0,355; 0,3 [13]	0,432	0,432	0,395	0,365; 0	0,365; 0,23 [13]	0,386	0,386; 0,23 [13]	0,372; 0,23
d/a_s	29	23	20	23	9		14		23
d/a_p	7,35 [13]	–	–	–	–	–	–	–	7,35 [13]

* Значение рассчитано по формуле $d_e = 23 \cdot a_s$, $a_s = 17,4$ мкм по рис. 2, *b* (максимум на графике $\alpha_{s0}(f)$) и формуле для переходной частоты f_r / The value is calculated by formula $d_e = 23 \cdot a_s$, $a_s = 17.4$ μm and Fig. 2, *b* (the maximum value is on graph $\alpha_{s0}(f)$), and by the formula for transition frequency f_r .

** Не измерялось инструментально, а рассчитано по инвертированной формуле (10) с подстановкой $d_e = d$ / It was not measured instrumentally, but was calculated by the inverted formula (10) with substitution $d_e = d$.

*** Коэффициент извилистости определен по наилучшему соответствию графика $\alpha_{s0}(f)$ с экспериментальными точками / The tortuosity coefficient was determined from the best correspondence of graph $\alpha_{s0}(f)$ to the experimental points.

Параметр / Parameter	М. Кимура / M. Kimura						
	При температуре 20 °С [9] / At temperature 20 °C [9]				При разн. температуре [8] / At different temperature [8]		
					5 °С	20 °С	35 °С
	10	11	12	13	14	15	16
d , мм / d , mm	0,917	0,545	0,324	0,193	0,113		
d_e , мм / d_e , mm	0,637	0,471	0,303	0,172	0,099		
P	0,389	0,383	0,380	0,378	0,368		
$\eta \cdot 10^{-3}$, Па·с / $\eta \cdot 10^{-3}$, Pa·s	1				1,52	1,002	0,723
ρ_m , кг/м ³ / ρ_m , kg/m ³	2011	2021	2026	2029	2050	2048	2046
$\kappa_0 \cdot 10^{-11}$, м ² / $\kappa_0 \cdot 10^{-11}$, m ²	26,7	14,6	6,06	1,94	0,6423		
T [8, 9]	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58		
$\langle \alpha_{s0} \rangle$ дБ/м/кГц и / $\langle \alpha_{s0} \rangle$ dB/m/kHz	12,7 ± 2,5	13,7 ± 2,7	17,9 ± 4,5	20,4 ± 4,0	9,46 ± 0,8	9,85 ± 0,33	15,3 ± 1,4
α_{r0} , дБ/м/кГц и / α_{r0} , dB/m/kHz	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data
$\gamma_s \cdot 10^6$, Па / $\gamma_s \cdot 10^6$, Pa	27,5	25,1	23,0	20,1	62,8	47,1	31,6
$\gamma \cdot 10^6$, Па / $\gamma \cdot 10^6$, Pa	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data
m	0,0217	0,0197	0,020	0,0212	0,048	0,041	0,029
n	н/о	н/о	н/о	н/о	н/о	н/о	н/о
φ_s ; φ_p	0,389	0,383	0,380	0,378	0,05	0,05	0,368
d_e/a_s	20	23	23	14	15		
d_e/a_p	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data	н/о / no data		

Примечание. Номер графы и цвет цифры, обозначающей номер, соответствует номеру и цвету графика на рис. 2, 3. Обозначения: d – средний размер гранул, определенный методом ситового анализа; d_e – эквивалентный размер гранул, определенный по измеренной статической проницаемости среды; P – статическая пористость; η – динамическая вязкость поровой жидкости; ρ_m – равновесная плотность насыщенной среды; κ_0 – статическая проницаемость среды; T – коэффициент извилистости; $\langle \alpha_{s0} \rangle$ – измеренный средний по частоте коэффициент затухания; α_{s0} – измеренный коэффициент затухания; γ_s – сдвиговой коэффициент межгранулярной жесткости; γ – компрессионный коэффициент межгранулярной жесткости; m – сдвиговой показатель деформационного упрочнения; n – компрессионный показатель деформационного упрочнения; φ_s , φ_p – сдвиговая и компрессионная эффективная пористости; a_s , a_p – размер пор при распространении сдвиговой и компрессионной волн; н/о – не определялось (no data)

Note. The column number and the color of a numeral denoting the number correspond to the number and color of the graph in Fig. 2 and 3. Legend: d is the average grain size determined by the sieve analysis; d_e is the equivalent grain size determined from the measured steady-state permeability of the medium; P is the static porosity; η is the pore fluid dynamic viscosity; ρ_m is the equilibrium density of a saturated medium; κ_0 is the steady-state medium permeability; T is the tortuosity coefficient; $\langle \alpha_{s0} \rangle$ is the measured frequency-average attenuation coefficient; α_{s0} is the measured attenuation coefficient; γ_s is the shear rigidity coefficient; γ is the compressional rigidity coefficient; m is the shear strain hardening exponent; n is the compressional strain hardening exponent; φ_s , φ_p are the shear and compressional effective porosities; a_s , a_p are the pore sizes during propagation of the shear and compressional waves; n/o means “no data”.

В сухих средах эксперименты выявляют постоянный низкий и слабо зависящий от размера и формы гранул удельный коэффициент затухания α_{s0} (дБ/(м·кГц), т. е. линейную частотную зависимость $\alpha_s = \alpha_{s0} \cdot f^1$. Скорость поперечной волны оказывается выше, чем в насыщенной среде, и зависит от размера

МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 37 № 1 2021 107

и формы гранул (черные кружки и ромбы, графики 5, 7 на рис. 2, *a, b*). Такое соотношение между скоростью и затуханием подтверждает существование между ними однозначной консервативно-диссипативной связи: больше скорость – меньше затухание. Насыщение среды флюидом уменьшает скорость сдвиговой волны и увеличивает затухание (синий ромб и голубые кружки, графики 6, 8 на рис. 2, *a, b*). Коэффициент затухания становится зависящим от частоты.

В экспериментах Д. Белла измерялись также скорость и затухание продольной волны, что позволяет сопоставить друг с другом компрессионные (n – компрессионный показатель деформационного упрочнения, γ – компрессионный модуль межгранулярной жесткости [12, 13]) и сдвиговые характеристики микротрения. Если у сдвиговой волны при насыщении среды жидкостью уменьшается скорость и увеличивается затухание, то у продольной, наоборот – в водонасыщенной среде скорость звука c_p много больше (c_{psat} / c_{pdry} составляют 1740/220 м/с в песке и 1810/150 м/с в шариках), а затухание – много меньше, чем в сухой. Сдвиговая (γ_s) межгранулярная жесткость значительно больше компрессионной (γ) ($\gamma_{sdry} > \gamma_{dry}$) в сухой среде и много меньше – в насыщенной ($\gamma_{ssat} \ll \gamma_{sat}$). Последнее объясняется добавкой упругости флюида, заключенного в щелях между гранулами. В сухих средах компрессионный (n) показатель деформационного упрочнения оказывается много больше сдвигового (m): $n_{dry} \gg m_{dry}$; в насыщенных – $n_{sat} > m_{sat}$, но эти величины сопоставимы. Вспоминая, что степень деформационного упрочнения характеризует нелинейность среды, допуская даже неточность измерений Д. Белла (в отношении продольной волны), можно заключить, что сухая среда оказывается мягкой и существенно нелинейной при компрессии, но жесткой и линейной при сдвиге. Насыщение среды флюидом уменьшает сдвиговое микротрение, но увеличивает сдвиговую нелинейность и многократно увеличивает компрессионную жесткость. Воздействие насыщения на компрессионную нелинейность (переход $n_{dry} \rightarrow n_{sat}$) значительно сложнее. Если вязкость флюида невелика (вода), компрессионная нелинейность уменьшается; если флюид – вязкое масло (см. описание эксперимента со стеклянными шариками в масле [12, 13]), нелинейность становится предельно высокой.

Обратим внимание на влияние формы гранул. Когда гранулы в сухом состоянии, коэффициент затухания от формы гранул почти не зависит (см. графики 5, 7 на рис. 2, *b*). Как видно из рис. 2, *a, c* и таблицы, сдвиговая межгранулярная жесткость определяет скорость волны. Сравнивая результаты измерений Б. Брунсона в сеяном и несеяном песке при одинаковой скорости (см. графики 2, 4 на рис. 2, *a*), можно видеть, что в несеяных угловатых песках обнаруживается бо́льшая степень деформационного упрочнения, т. е. бо́льшая нелинейность.

В рис. 2, *a, b* включены результаты измерений, полученные в морских экспериментах *in situ*. Результат SAX99 подтверждает качество измерений Б. Брунсона и Д. Белла и применимость GSEDS-модели к реальным морским осадкам. Действительно, экспериментальные точки, соответствующие измерениям SAX99 (график 9 на рис. 2, *a, b*), располагаются между графиками, проведенными по результатам измерений Б. Брунсона и Д. Белла. Это соответствует глубине погружения датчиков SAX99 в дно (30 см). Измерения на самых низких частотах подтверждают и «линейную», и «нелинейную» точку зрения, а главное, подтверждают применимость GSEDS-модели и в области самых низких частот.

Рассмотрим теперь результаты экспериментов М. Кимуры [8, 9] с сортированным песком с разнообразным размером гранул (рис. 2, *c, d*). Параметры согласования ориентированы на частоту 12 кГц и подобраны так, чтобы максимально вписаться в доверительные интервалы. Как видно из таблицы, величина показателя деформационного упрочнения почти постоянна, скорость сдвиговой волны определяется возрастающей пропорционально размеру песчинок межгранулярной жесткостью. Зависимость коэффициента затухания от размера гранул в области высоких частот определяется изменением формы кривой $\alpha_{s0}(f)$ при смещении переходной частоты вверх, т. е. влиянием флюида. Заметим, что для крупного песка (см. график 10 на рис. 2, *d*) на высоких частотах теоретическое затухание приближается к своему нижнему «сухому» пределу (график 5 на рис. 2, *b*). Последнее противоречит выводам, сделанным в работе [24], где отмечалось увеличение затухания сдвиговой волны при укрупнении гранул (частота измерений 100 кГц). Изменение соотношения затухание \leftrightarrow размер гранул и негативная дисперсия на высоких частотах видны и на рис. 2, *c, d*, однако длина волны здесь уже становится сопоставима с диаметром частиц, поэтому включается дополнительный механизм потерь – рассеяние.

Сопоставление графиков на рис. 2, *b, d*, кажется, убеждает в том, что в водонасыщенных песках частотная зависимость затухания $\alpha_s(f)$ нелинейна, а добротность среды и показатель δ в степенном законе затухания непостоянны, что и утверждают Р. Д. Столл, М. Кимура и Н. Чотирос.

Однако снова сомневаться в справедливости такого вывода заставляют эксперименты М. Кимуры с самым мелким песком при различных температурах (рис. 2, *e, f*; таблица). Примечательно, что в этом эксперименте значение пористости – самое низкое из всех, встречавшихся в работах М. Кимуры. Как видно, при двух низких температурах коэффициент затухания от частоты не зависит, добротность постоянна (графики 14, 15 на рис. 2, *e, f*). При нагревании, возможно вследствие теплового расширения песка или размягчения и изменения формы полиэтиленовых цилиндров, в которые был песок упакован, структура пор или (и) свойства контактов между гранулами изменяются, коэффициент затухания возрастает, добротность отклоняется от постоянной. Обратим также внимание на то, что скорость сдвиговой волны в холодной среде в этом эксперименте – наибольшая, а в горячей – приближается к скоростям, зарегистрированным при больших пористостях среды (рис. 2, *c*).

Обсуждение и выводы. Сухие неконсолидированные среды типа песков подтверждают свойство постоянной добротности. Удельный коэффициент затухания при распространении сдвиговой волны слабо зависит от формы гранул и приближается к нижнему пределу $\alpha_{s0dry} \approx 7$ дБ/(м·кГц). Этот предел отражает, возможно, физическую природу сдвигового микротрения и деформационного упрочнения. Скорость распространения сдвиговой волны, наоборот, сильно зависит от уплотнения среды (пористости, координационного числа) и от формы гранул. Возможно, угловатые поверхности, сцепляясь друг с другом при сдвиге, могут образовать подобие поперечного консервативного упругого скелета, каркаса, посредством которого передается деформация, что и определяет высокую скорость сдвиговой волны. На диссипативные свойства микротрения наличие или отсутствие каркаса не влияет. С другой стороны, сформировавшийся каркас перекрывает поперечное сечение пор и препятствует глобальному движению флюида.

Насыщение среды жидкостью приводит к диссипативным эффектам – уменьшению скорости сдвиговой волны и увеличению затухания. В хорошо уплотненных средах, где образовался скелет, затухание незначительно увеличивается сверх нижнего предела α_{s0dry} , что подтверждает отсутствие вязких потерь (графики 14, 15 на рис. 2, e, f). В рыхлых, слабо уплотненных средах вязкие потери проявляются даже на высоких (20 кГц) частотах и увеличивают коэффициент затухания пропорционально неуплотненности среды.

Механизмы взаимодействия между гранулами и между гранулами и подвижной фазой среды при компрессии и при сдвиге принципиально различаются.

Сухая среда при компрессии показывает более низкую, чем при сдвиге, межгранулярную жесткость, существенно зависящую от шероховатости гранул. Насыщение пор маловязкой жидкостью (вода) уменьшает нелинейность среды при компрессии (подобно дополнительному линейному демпферу), насыщение вязкой жидкостью (масло) – предельно увеличивает. Характер воздействия сатурации на степень компрессионной нелинейности (деформационного упрочнения) среды зависит от шероховатости гранул. Если межгранулярные контакты остроугольны (песок Белла), основной вклад дает контактная нелинейность, если округлы (шарики Белла), контактная нелинейность замещается нелинейностью флюидной пленки.

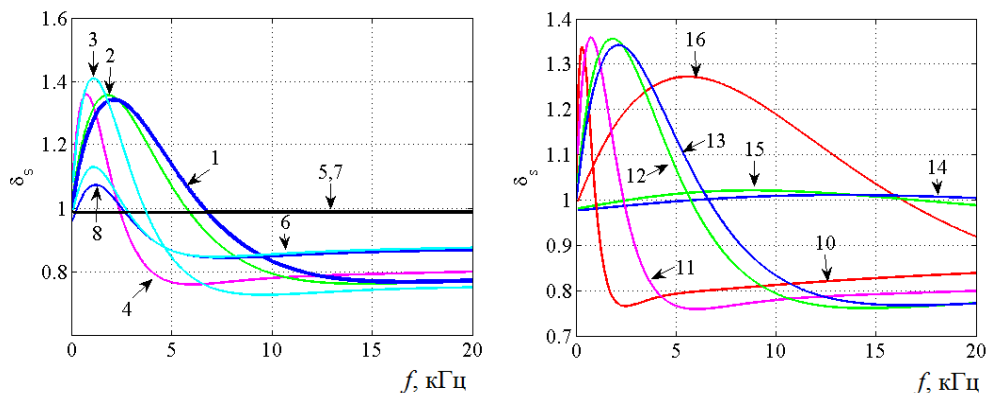
Насыщение пор водой уменьшает сдвиговую межгранулярную жесткость (подобно смазке), но увеличивает сдвиговую нелинейность среды в целом.

В настоящей работе поры представлялись в виде цилиндрических труб, как в работах [12, 13]. Одинаковая для компрессии и для сдвига модель пор обусловила и одинаковую функцию коррекции (5). Если форма пор действительно одинакова, то свойства порового пространства при компрессии и при сдвиге различны. Для компрессионной волны устойчиво подтверждается оценка эффективного размера пор (9) $a_p = d_e/7,35$. Для сдвиговой волны оценка другая: $a_s = d_e/23$ для грубых песков и $a_s = d_e/15$ для мелких (см. таблицу, где представлены значения отношения d_e/a_s и d_e/a_p). Примечательно, что и сдвиговая эффективная пористость практически во всех случаях совпадает со статической пористостью (P).

На главный поставленный в статье вопрос: «Как – линейно или нелинейно – зависит от частоты коэффициент затухания сдвиговой волны ($\alpha_s = \alpha_{s0} \cdot f^\delta$)?» – лучше всего ответить с помощью рис. 3, на котором приведены частотные зависимости показателя δ , восстановленные для всех рассмотренных выше экспериментов, если записать степенной закон затухания в виде $\alpha_s = C(f) \cdot f^\delta$, $C(f) \neq \alpha_{s0}$. Показатель вычислен по формуле $\delta_s = \frac{\partial \alpha_s / \partial f}{\alpha_{s0}}$.

Если для компрессионной волны показатель δ_p меняется в пределах от 0,7 до 1,7 [13], то для сдвиговой – в меньших пределах, от 0,75 до 1,4. Таким образом, можно сделать вывод, что воздействие относительного движения флюида на акустические свойства сдвиговой волны в песчаных осадках следует рассматривать как *пограничное* явление. В уплотненных, слежавшихся осадках вязкие потери проявляться **не будут**. В осадках самого верхнего слоя морского дна, возмущенных волнением на поверхности, приливными течениями, судоходством, вязкие потери **будут** вносить заметный вклад, увеличивая затухание на 20 дБ/(м·кГц) в окрестности частоты около 5 кГц и на

10 дБ/(м·кГц) на высоких для сдвиговых волн частотах 20 кГц. Соответственно будет снижаться и скорость сдвиговой волны.



Р и с. 3. Частотная зависимость показателя δ_s в степенном законе затухания: слева – графики 1–7; справа – 10–16 (расчетные графики обозначены цифрами так же, как в рис. 2)

F i g. 3. Frequency dependence of the exponent δ_s in the power law of attenuation: on the left – graphs 1–7; on the right – graphs 10–16 (the calculation graphs are indicated by the numbers just as in Fig. 2)

В конечном итоге песчаные морские осадки при распространении сдвиговой волны показывают более низкую степень деформационного упрочнения (нелинейности), чем при распространении компрессионной волны, т. е. проявляют свойства среды, приближающейся к упругой, в которой взаимодействие между гранулами описывается законом Гука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jackson D. R., Richardson M. D.* High-Frequency Seafloor Acoustics. New York : Springer, 2007. 616 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36945-7>
2. Shear Waves in Marine Sediments / Ed. by J. M. Hovem, M. R. Richardson, R. D. Stoll. Dordrecht, Netherlands : Springer, 1991. 418 p.). <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3568-9>
3. *Kibblewhite A. C.* Attenuation of sound in marine sediments: A review with emphasis on new low-frequency data // The Journal of the Acoustical Society of America. 1989. Vol. 86, iss. 2. P. 716–738. <https://doi.org/10.1121/1.398195>
4. *Bowles F. A.* Observations on attenuation and shear-wave velocity in fine-grained, marine sediments // The Journal of the Acoustical Society of America. 1997. Vol. 101, iss. 6. P. 3385–3397. <https://doi.org/10.1121/1.419374>
5. *Hamilton E. L.* Geoacoustic modeling of the sea floor // The Journal of the Acoustical Society of America. 1980. Vol. 68, iss. 5. P. 1313–1340. <https://doi.org/10.1121/1.385100>
6. *Stoll R. D.* Sediment Acoustics. New York : Springer, 1989. 153 p.
7. *Brunson B. A.* Shear wave attenuation in unconsolidated laboratory sediments : Ph. D. thesis. Corvallis, OR : Oregon State University, 1983. 253 p. URL: <https://ir.library.oregonstate.edu/downloads/9306t181w> (date of assess: 19.06.2020).
8. *Kimura M.* Shear wave speed dispersion and attenuation in granular marine sediments // The Journal of the Acoustical Society of America. 2013. Vol. 134, iss. 1. P. 144–155. <https://doi.org/10.1121/1.4809679>
9. *Kimura M.* Grain-size dependence of shear wave speed dispersion and attenuation in granular marine sediments // The Journal of the Acoustical Society of America. 2014. Vol. 136, iss. 1. P. EL53–EL59. <https://doi.org/10.1121/1.4885478>

10. *Chotiros N. P., Isakson M. J.* Shear wave attenuation and micro-fluidics in water-saturated sand and glass beads // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2014. Vol. 135, iss. 6. P. 3264–3279. <https://doi.org/10.1121/1.4874955>
11. *Chotiros N. P.* Acoustics of the Seabed as a Poroelastic Medium. Cham : Springer, 2017. 99 p. doi:10.1007/978-3-319-14277-7
12. *Лисютин В. А.* Обобщенная реологическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним трением и эффективной сжимаемостью // *Морской гидрофизический журнал*. 2019. Т. 35, № 1. С. 85–100. doi:10.22449/0233-7584-2019-1-85-100
13. *Лисютин В. А. Ластовенко О. П.* Оценка влияния внутреннего и вязкого трения на дисперсию и затухание звука в неконсолидированных морских осадках // *Акустический журнал*. 2020. Т. 66, № 4. С. 420–436. doi:10.31857/S0320791920040061
14. *Лисютин В. А.* Простая акустическая модель неконсолидированных морских осадков с внутренним и вязким трением // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2018. Т. 15, № 3. С. 39–51. <https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-39-51>
15. *Buckingham M. J.* Analysis of shear-wave attenuation in unconsolidated sands and glass beads // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2014. Vol. 136, iss. 5. P. 2478–2488. <https://doi.org/10.1121/1.4896468>
16. *Buckingham M. J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. Vol. 108, iss. 6. P. 2796–2815. <https://doi.org/10.1121/1.1322018>
17. *Pandey V., Holm S.* Connecting the grain-shearing mechanism of wave propagation in marine sediments to fractional order wave equations // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2016. Vol. 140, iss. 6. P. 4225–4236. <https://doi.org/10.1121/1.4971289>
18. *Bedford A., Costley R. D., Stern M.* On the drag and virtual mass coefficients in Biot's equations // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1984. Vol. 76, iss. 6. P. 1804–1809. <https://doi.org/10.1121/1.391577>
19. *Buckingham M. J.* Wave speed and attenuation profiles in a stratified marine sediment: Geoaoustic modeling of seabed layering using the viscous grain shearing theory // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2020. Vol. 148, iss. 2. P. 962–974. <https://doi.org/10.1121/10.0001778>
20. *Brunson B. A., Johnson R. K.* Laboratory measurements of shear wave attenuation in saturated sand // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980. Vol. 68, iss. 5. P. 1371–1375. <https://doi.org/10.1121/1.385104>
21. *Bell D. W.* Shear wave propagation in unconsolidated fluid saturated porous media. Austin : The University of Texas at Austin, 1979. (Technical Report ; No. ARL-TR-79-31).
22. *Buckingham M. J.* On pore-fluid viscosity and the wave properties of saturated granular materials including marine sediments // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 122, iss. 3. P. 1486–1501. <https://doi.org/10.1121/1.2759167>
23. Comparison of sound speed and attenuation measured in a sandy sediment to predictions based on the Biot theory of porous media / K. L. Williams [et al.] // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2002. Vol. 27, no. 3. P. 413–428. doi:10.1109/JOE.2002.1040928
24. *Prasad M., Meissner R.* Attenuation mechanisms in sands; Laboratory versus theoretical (Biot) data // *Geophysics*. 1992. Vol. 57, no. 5. P. 710–719. <https://doi.org/10.1190/1.1443284>

Об авторах:

Лисютин Виктор Александрович, доцент кафедры физики, СевГУ (99053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33), кандидат физико-математических наук, доцент, vlisiutin@mail.ru

Ластовенко Ольга Ростиславовна, доцент кафедры высшей математики, СевГУ (99053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33), кандидат физико-математических наук, доцент.