

Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами на двумерном сдвиговом течении

А. А. Слепышев

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия
✉ slep55@mail.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020 г., после доработки – 13.03.2021 г.

Цель. Исследовать вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами на двумерном течении с вертикальным сдвигом скорости, изучить стоков дрейф частиц жидкости и влияние на него среднего течения – цель данной работы.

Методы и результаты. В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном бассейне постоянной глубины при учете вращения Земли. Две компоненты скорости среднего течения зависят от вертикальной координаты. Уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, поэтому собственная функция и частота волны – комплексные. Соответствующая краевая задача решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Частота волны при фиксированном волновом числе находится методом пристрелки. Получено, что мнимая часть частоты мала и может быть как отрицательной, так и положительной в зависимости от волнового числа и номера моды. Таким образом, возможно как слабое затухание, так и слабое усиление внутренней волны. Вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля и могут превышать соответствующие турбулентные потоки. Скорость стокова дрейфа, поперечная к направлению волны, отлична от нуля и меньше продольной скорости. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа также отлична от нуля и на четыре порядка меньше продольной составляющей. Знаки вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа у волн с частотами 10 и 16 цикл/ч противоположны, так как знаки мнимой части частоты у них разные, а вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа пропорциональна мнимой части частоты волны.

Выводы. Вертикальный волновой поток импульса у инерционно-гравитационных внутренних волн отличен от нуля при наличии течения, у которого компонента скорости, поперечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты. Поперечная к направлению распространения волны компонента скорости стокова дрейфа при этом отлична от нуля и меньше продольной. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа также отлична от нуля и может вносить вклад в формирование вертикальной тонкой структуры.

Ключевые слова: внутренние волны, мнимая поправка к частоте, волновой вертикальный поток импульса, стоков дрейф

Благодарности: автор благодарен Н. О. Анкудинову за проведение численных расчетов при решении краевой задачи. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2019-0003 «Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования».

Для цитирования: *Слепышев А. А.* Вертикальный перенос импульса инерционно-гравитационными внутренними волнами на двумерном сдвиговом течении // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 4. С. 391–404. doi:10.22449/0233-7584-2021-4-391-404

Vertical Transfer of Momentum by Inertia-Gravity Internal Waves on a Two-Dimensional Shear Flow

A. A. Slepyshev

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia

✉ slep55@mail.ru

Purpose. The paper is aimed at investigating the momentum vertical transfer by inertia-gravity internal waves on a two-dimensional flow with a vertical shear of velocity, and also at studying the Stokes drift of liquid particles and the mean current effect on it.

Methods and Results. Free internal waves in an infinite basin of constant depth are considered in the Boussinesq approximation with the regard for the Earth rotation. Two components of the mean current velocity depend on the vertical coordinate. The equation for the vertical velocity amplitude has complex coefficients; therefore the eigenfunction and the wave frequency are complex. The corresponding boundary value problem is solved numerically by the implicit Adams scheme of the third order of accuracy. The wave frequency at a fixed wavenumber was found by the shooting method. It was determined that the frequency imaginary part was small and could be either negative or positive depending on a wave number and a mode number. Thus, both weak attenuation and weak amplification of an internal wave are possible. The vertical wave momentum fluxes are nonzero and can exceed the corresponding turbulent fluxes. The Stokes drift velocity, transverse to the wave direction, is nonzero and less than the longitudinal velocity. The vertical component of the Stokes drift velocity is also nonzero and four orders of magnitude less than the longitudinal component. The signs of the vertical component of the Stokes drift velocity for the waves with the frequencies 10 and 16 cycle/h are opposite, since the signs of their frequency imaginary parts are different; and the vertical component of the Stokes drift velocity is proportional to the wave frequency imaginary part.

Conclusions. The vertical momentum wave flux of inertia-gravity internal waves differs from zero in the presence of the current whose velocity component, transverse to the wave propagation direction, depends on the vertical coordinate. The component of the Stokes drift velocity, transverse to the wave propagation direction, is nonzero and less than the longitudinal one. The vertical component of the Stokes drift velocity is also nonzero and can contribute to formation of the vertical fine structure.

Keywords: internal waves, imaginary correction to frequency, wave momentum flux, Stokes drift

Acknowledgements: the author is grateful to N.O. Ankudinov for numerical calculations in solving the boundary problem. The study was carried out within the framework of the state task on theme No. 0827-2019-0003 “Fundamental investigations of oceanological processes conditioning state and evolution of marine environment being affected by natural and anthropogenic factors, based on the observation and modeling methods”.

For citation: Slepyshev, A.A., 2021. Vertical Transfer of Momentum by Inertia-Gravity Internal Waves on a Two-Dimensional Shear Flow. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(4), pp. 363-375. doi:10.22449/1573-160X-2021-4-363-375

Проблема вертикального обмена сохраняет актуальность в настоящее время, так как именно вертикальный обмен обеспечивает поступление кислорода в глубинные слои моря и вынос органического материала из глубинных слоев. Для функционирования экосистемы это крайне важно. По существующим представлениям вертикальный обмен обеспечивается мелкомасштабной турбулентностью [1–4]. Однако в области пикноклина турбулентность сильно подавлена силами плавучести. С другой стороны, пикноклин является волноводом для внутренних волн и представляется актуальным исследованием вклада внутренних волн в вертикальный обмен. Внутренние волны распространяются преимущественно локализованными в пространстве волновыми пакетами [5]. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних

волн проявляются в генерации средних на масштабе волны течений [6, 7]. Вертикальная компонента скорости этого течения имеет разные знаки на переднем и заднем фронте пакета, и интегрального переноса по вертикали не происходит. После прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается. Исследованию вертикального переноса импульса внутренними волнами посвящен ряд работ [8, 9]. Вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля при учете турбулентной вязкости и диффузии [8]. В этом случае волна затухает [10, 11] и сдвиг фаз между колебаниями вертикальной и горизонтальной скорости отличен от $\pi/2$. У инерционно-гравитационных внутренних волн при наличии поперечной к направлению распространения волны компоненты скорости течения, зависящей от вертикальной координаты, вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля даже при неучете турбулентной вязкости и диффузии. Дело в том, что краевая задача для амплитуды вертикальной скорости фиксированной моды внутренних волн имеет комплексные коэффициенты. Эта задача в [9] решена аналитически при постоянной частоте Брента – Вайсяля и линейном профиле скорости течения. При этом волна распространялась перпендикулярно потоку. Показано, что решение краевой задачи (собственная функция внутренних волн) – комплексное, а частота волны – действительная. При распространении внутренних волн под углом к плоскопараллельному потоку при неучете вращения Земли частота волны – действительная и собственная функция – действительная, так как уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет действительные коэффициенты [12, 13]. Ниже будет показано, что в двумерном стратифицированном течении с учетом вращения Земли частота волны – комплексная, причем мнимая часть частоты может быть как положительной, так и отрицательной, т. е. возможно как слабое затухание, так и слабое усиление волны. Вертикальный волновой поток импульса и вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа при этом отличны от нуля. В работе [9] вертикальный волновой поток импульса не нулевой, но вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа равна нулю, так как частота волны действительная.

Постановка задачи. В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете вращения Земли в безграничном бассейне постоянной глубины на двумерном течении, две горизонтальные компоненты скорости которого $U_0(z), V_0(z)$ зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении численно решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн, находится комплексная частота фиксированной моды внутренних волн при постоянном волновом числе. Во втором порядке по амплитуде волны находятся скорость стокова дрейфа частиц жидкости и вертикальные волновые потоки импульса.

Уравнения гидродинамики для волновых возмущений имеют вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \quad (3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

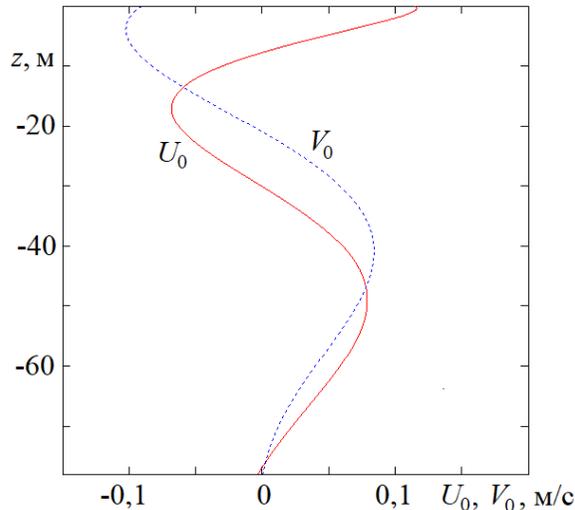
где u, v, w – две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения соответственно; ρ, P – волновые возмущения плотности и давления; $\rho_0(z)$ – профиль средней плотности; x, y, z – две горизонтальные и вертикальная координаты, ось z направлена вертикально вверх; f – параметр Кориолиса; $U_0(z), V_0(z)$ – две компоненты скорости среднего течения; действие

оператора $\frac{D}{Dt}$ раскрывается по формуле

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$. Используя геострофические соотноше-

ния из работы [14], сделаем оценку горизонтальных масштабов изменения средней

плотности: $L_x = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = g / \left(f \max \left| \frac{\partial V_0}{\partial z} \right| \right)$, $L_y = \rho_0 / \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = g / \left(f \max \left| \frac{\partial U_0}{\partial z} \right| \right)$.



Р и с. 1. Вертикальные профили компонент скорости течения U_0, V_0

Fig. 1. Vertical profiles of the current velocity components U_0, V_0

Вертикальные профили компонент скорости течения показаны на рис. 1. Максимальные значения модуля вертикальных градиентов компонент скорости течения U_0, V_0 составляют 0,067 и 0,011 1/с соответственно. Горизон-

тальные масштабы изменения плотности равны $L_x = 8,283 \cdot 10^6$ м, $L_y = 1,398 \cdot 10^6$ м соответственно, и они много больше длины волны, поэтому горизонтальным изменением плотности пренебрегаем.

Граничное условие на поверхности моря $z = 0$ – условие «твердой крышки», которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [15]:

$$w(0) = 0. \quad (6)$$

Граничное условие на дне – условие непротекания:

$$w(-H) = 0, \quad (7)$$

где H – глубина моря.

Линейное приближение. Решения линейного приближения ищем в следующем виде:

$$u_1 = u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad v_1 = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad w_1 = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad (8)$$

$$P_1 = P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.},$$

где с.с. – комплексно сопряженные слагаемые; A – амплитудный множитель; θ – фаза волны ($\partial\theta/\partial x = k$, $\partial\theta/\partial t = -\omega$, k – горизонтальное волновое число, ω – частота волны). Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x .

После подстановки (8) в систему (1) – (5) следует связь амплитудных функций u_{10} , v_{10} , ρ_{10} , P_{10} с w_{10} :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0, \quad (9)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[\frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega} \left(i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right], \quad (10)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\Omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - i w_{10} \frac{dV_0}{dz} \right). \quad (11)$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + k \left[\frac{if \frac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2 \frac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] \frac{dw_{10}}{dz} +$$

$$+ k w_{10} \left[\frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega \frac{d^2 U_0}{dz^2} + if \frac{d^2 V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{ifk \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] = 0, \quad (12)$$

где $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$ – квадрат частоты Брента – Вэйсяля.

Граничные условия для w_{10} :

$$\text{при } z = 0 \quad w_{10} = 0, \quad (13)$$

$$\text{при } z = -H \quad w_{10} = 0. \quad (14)$$

Краевая задача (12) – (14) решалась аналитически в работе [9] при постоянной частоте Брента – Вэйсяля и линейном профиле скорости плоскопараллельного среднего течения. Волна распространялась перпендикулярно потоку. Было получено, что собственная функция – решение этой краевой задачи – комплексная, а частота волны – действительная. Ниже в ходе численных расчетов будет показано, что в двумерном течении частота волны комплексная.

В работе [16] уравнение (12) решалось методом возмущений путем разложения решения в ряд по малому параметру $\varepsilon = V_0^* / (H\omega_*)$, где V_0^* – характерное значение скорости течения, ω_* – характерная частота волны. Однако этот параметр не всегда мал и применимость метода ограничена. Поэтому в настоящей работе применена неявная схема Адамса третьего порядка точности для численного решения уравнения (12) при реальных профилях частоты Брента – Вэйсяля и скорости течения.

Краевая задача (12) – (14) решена аналитически в работах [12, 13, 17] для плоскопараллельного потока с линейным профилем скорости течения при $f = 0$, $N = \text{const}$ в случае, когда волна распространяется под произвольным углом к потоку. Получено дисперсионное уравнение, содержащее модифицированные функции Бесселя. В работе [17] оставлено только три первых члена в разложении функций Бесселя в ряд, поэтому мнимая часть фазовой скорости больше нуля даже при числе Ричарсона $\text{Ri} = \frac{N^2}{\left(\frac{dU}{dz}\right)^2} > \frac{1}{4}$, что противоре-

чит критерию Майлса [18, 19] гидродинамической устойчивости плоскопараллельного потока. Однако в работах [12, 13] то же дисперсионное уравнение решалось численным и асимптотическим методом и никакого противоречия критерию гидродинамической устойчивости Майлса не выявлено. В работе [20] для произвольного плоскопараллельного потока с непрерывным профилем скорости течения при $N = \text{const}$ никакого противоречия критерию Майлса также не было выявлено.

Представляет интерес сопоставить численное решение краевой задачи (12) – (14) по неявной схеме Адамса третьего порядка точности с аналитическим решением [9] для плоскопараллельного потока с линейным профилем скорости течения при $N = \text{const}$, когда волна распространяется перпендикулярно потоку. Для 15-минутных внутренних волн первой моды с частотой $\omega = 0,00698132$ рад/с численный расчет дает значение волнового числа $k = 0,0418831513$ рад/м. Если это значение подставить в формулу для частоты

ты аналитического решения (20) из работы [9], то получится значение частоты $\omega = 0,00698133$ рад/с. Отличие частоты от численного решения составляет $10^{-4}\%$. Аналогичный расчет для второй моды дает расхождение численного и аналитического решения для частоты в $3 \cdot 10^{-4}\%$.

Сопоставим численное решение краевой задачи (12) – (14) по неявной схеме Адамса третьего порядка точности с аналитическим решением из работы [12] для плоскопараллельного потока с линейным профилем скорости течения при $f = 0$, $N = \text{const}$, когда волна распространяется под произвольным углом к потоку. Для этого используем вторую модель скорости течения из работы [12], когда указанная скорость равна нулю у дна. Частота волны ω в [12] (нормированная на частоту Брента – Вяйсяля) бралась равной 0,54 в безразмерных переменных. Пусть μ , ν – проекции безразмерного волнового вектора (нормированного на π/H) на направления вдоль и поперек потока. Тогда для $\nu = 0,5$ численное решение краевой задачи (4) в [12] по неявной схеме Адамса третьего порядка точности дает для первой моды значение $\mu = 0,1742$, что соответствует как численному, так и асимптотическому решению дисперсионного уравнения (5) в работе [12].

Нелинейные эффекты. Скорость стокова дрейфа частиц жидкости определяется по формуле из работы [21]:

$$\vec{u}_s = \int_0^t (\bar{u} d\tau \nabla) \bar{u}, \quad (15)$$

где \bar{u} – поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает осреднение по периоду волны. Горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа, направленная вдоль волнового вектора, с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, имеет вид

$$u_s = \frac{A_1 A_1^*}{k} \left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dz} \left(w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) + \text{c.c.} \right], \quad (16)$$

где $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$, $\delta\omega = \text{Im}(\omega)$ – мнимая часть частоты волны.

Поперечная к направлению распространения волны горизонтальная компонента скорости стокова дрейфа определяется по формуле

$$v_s = A_1 A_1^* \left[\frac{1}{\omega \Omega^* k} \frac{dw_{10}}{dz} \left(if \frac{dw_{10}^*}{dz} - k \frac{dV_0}{dz} w_{10}^* \right) + \text{c.c.} \right] - A_1 A_1^* \left\{ \frac{w_{10}^*}{\omega^* \Omega^2} \left[\Omega \left(\frac{dw_{10}}{dz} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + w_{10} \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right) + k \frac{dU_0}{dz} \left(w_{10} \frac{dV_0}{dz} + \frac{if}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right] + \text{c.c.} \right\}. \quad (17)$$

При наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости V_0 зависит от вертикальной координаты, величина v_s отлична от нуля. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа пропорциональна мнимой части частоты и определяется по формуле

$$w_s = iA_1 A_1^* \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*). \quad (18)$$

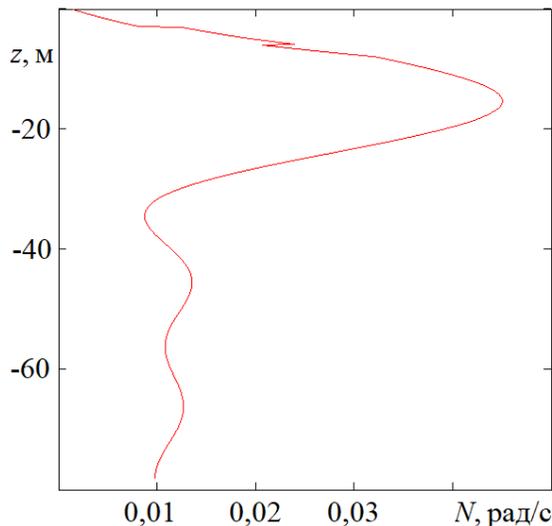
Вертикальные волновые потоки импульса \overline{uw} , \overline{vw} находим, учитывая (8), (9), (11):

$$\overline{uw} = \frac{i}{k} |A_1|^2 \left(w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (19)$$

$$\overline{vw} = |A_1|^2 \left[\frac{i w_{10} w_{10}^*}{\Omega \Omega^*} (\Omega - \Omega^*) \frac{dV_0}{dz} + \frac{f}{\Omega \Omega^* k} \left(\Omega^* w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} + \Omega w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) \right]. \quad (20)$$

Вертикальный волновой поток импульса \overline{vw} в формуле (20) отличен от нуля и при отсутствии течения, поток импульса \overline{uw} в формуле (19) отличен от нуля только при наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости V_0 зависит от вертикальной координаты. При отсутствии вращения Земли при $f = 0$ волновые потоки импульса нулевые.

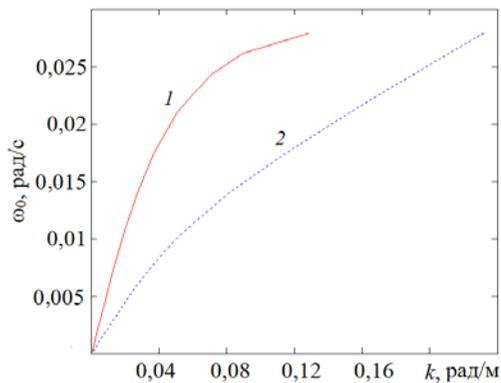
Результаты расчетов. Анализ вертикальных потоков импульса для внутренних волн и скорости стокова дрейфа проведем, используя результаты третьего этапа 44-го рейса НИС «Михаил Ломоносов» в районе северо-западного шельфа Черного моря *. Профили двух компонент скорости среднего течения показаны на рис. 1, частоты Брента – Вайсяля – на рис. 2.



Р и с. 2. Вертикальный профиль частоты Брента – Вайсяля
F i g. 2. Vertical profile of the Brunt – Väisälä frequency

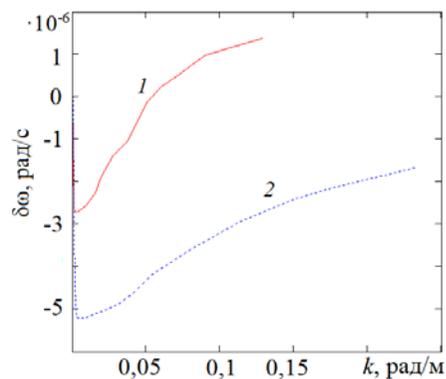
* Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС «Михаил Ломоносов» 7 августа – 15 сентября 1985 г. Севастополь : МГИ АН УССР, 1985. Т. 1. 135 с.

Краевая задача (12) – (14) по определению вертикальной структуры моды решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Частота волны при фиксированном волновом числе находится методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (13), (14). Собственная функция – решение краевой задачи (12) – (14) – комплексная, поэтому вертикальный волновой поток импульса \overline{iw} (18) отличен от нуля. Зависимости действительной и мнимой части частоты волны от волнового числа для первых двух мод показаны на рис. 3, 4. На рис. 3 приведены дисперсионные кривые первых двух мод, $\omega_0 = \text{Re}(\omega)$ – действительная часть частоты.



Р и с. 3. Зависимость действительной части частоты волны от волнового числа для первой 1 и второй 2 мод

F i g. 3. Dependence of the wave frequency real part on the wave number for the first 1 and second 2 modes



Р и с. 4. Зависимость мнимой части частоты волны от волнового числа для первой 1 и второй 2 мод

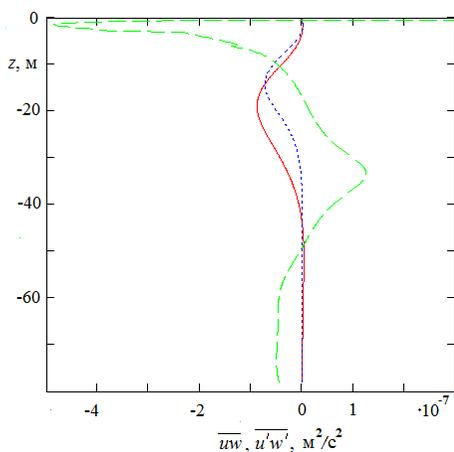
F i g. 4. Dependence of the wave frequency imaginary part on the wave number for the first 1 and second 2 modes

Мнимая часть частоты на рис. 4 у первой моды отрицательна при $k < 0,055$ рад/м и положительна при $k > 0,055$ рад/м. По модулю мнимая часть частоты на три – четыре порядка меньше действительной части частоты. Таким образом, у первой моды в низкочастотной области при $k < 0,055$ рад/м имеет место слабое затухание, а в высокочастотной области при $k > 0,055$ рад/м присутствует слабое усиление волны. У второй моды мнимая часть частоты всегда отрицательная, т. е. волна слабо затухает. В области затухания первой моды декремент затухания у второй моды больше по абсолютной величине.

Представляет интерес исследовать вертикальные потоки импульса и скорость стоковского дрейфа для волн первой моды с разными знаками мнимой части частоты, например, для внутренних волн с частотами 10 и 16 цикл/ч (имеется в виду действительная часть частоты). У волны первой моды с частотой 10 цикл/ч мнимая часть частоты $\delta\omega = -8,378 \cdot 10^{-7}$ рад/с отрицательная. У волны той же моды с частотой 16 цикл/ч мнимая часть частоты $\delta\omega = 1,379 \cdot 10^{-6}$ рад/с положительная. Поэтому далее будем сравнивать вертикальные волновые потоки импульса и скорость стоковского дрейфа именно для этих волн. На рис. 5 показаны профили вертикальных потоков импульса \overline{iw}

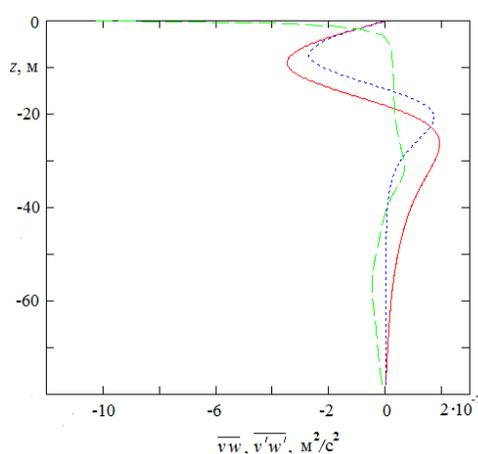
для внутренних волн первой моды с амплитудой 0,5 м и частотами 10 цикл/ч (красная линия) и 16 цикл/ч (синяя линия), а также турбулентный поток $\overline{u'w'}$ (зеленая линия).

Турбулентный поток импульса определяется по формуле $\overline{u'w'} = -K_z \frac{dU_0}{dz}$, коэффициент вертикального турбулентного обмена – по формуле $K_z \cong 0,93 \cdot 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ (N_c соответствует частоте Брента – Вайсяля в цикл/ч) [22, 23]. В целом, за исключением интервала глубин 15–25 м, турбулентный поток преобладает над волновым. Волновой поток импульса у волн с частотой 10 цикл/ч преобладает над потоком у волн с частотой 16 цикл/ч в интервале глубин 15–40 м. В верхнем 15-метровом слое имеется незначительное преобладание потока у волн с частотой 16 цикл/ч. Глубже 40 м волновые потоки сопоставимы по величине.



Р и с. 5. Профили волнового \overline{uw} и турбулентного $\overline{u'w'}$ вертикальных потоков импульса

F i g. 5. Profiles of the wave \overline{uw} and turbulent $\overline{u'w'}$ vertical momentum fluxes



Р и с. 6. Профили волнового \overline{vw} и турбулентного $\overline{v'w'}$ вертикальных потоков импульса

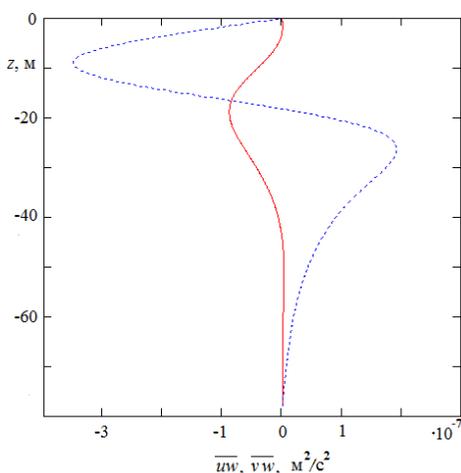
F i g. 6. Profiles of the wave \overline{vw} and turbulent $\overline{v'w'}$ vertical momentum fluxes

На рис. 6 представлены профили вертикальных потоков импульса \overline{vw} для внутренних волн первой моды с частотами 10 цикл/ч (красная линия) и 16 цикл/ч (синяя линия), а также турбулентный поток $\overline{v'w'}$ (зеленая линия).

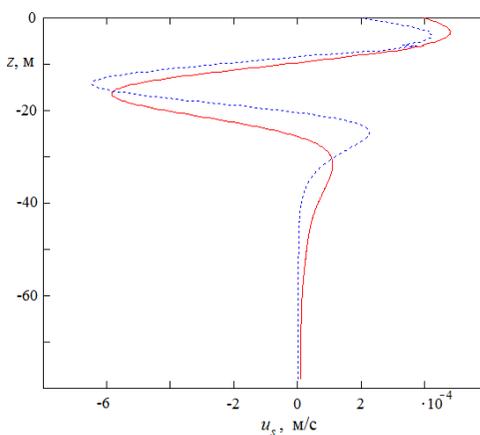
Турбулентный поток импульса определяется по формуле $\overline{v'w'} = -K_z \frac{dV_0}{dz}$. Здесь уже нет доминирования турбулентного потока над волновым. В интервале глубин 2,5–40 м у волн с частотой 10 цикл/ч вертикальный поток импульса \overline{vw} превосходит по модулю турбулентный. У волн с частотой 16 цикл/ч вертикальный поток импульса \overline{vw} меньше, чем у волн с частотой 10 цикл/ч.

Представляет интерес сравнить потоки \overline{uw} , \overline{vw} между собой. На рис. 7 показаны профили этих потоков для волн первой моды с частотой 10 цикл/ч. В целом поток \overline{uw} (красная линия) заметно уступает потоку \overline{vw} (синяя линия).

Проведем сопоставление скорости стокова дрейфа для внутренних волн первой моды с частотой 10 и 16 цикл/ч. Вертикальные профили компоненты скорости стокова дрейфа вдоль направления распространения волны (формула (16)) показаны на рис. 8 для волн с периодом 10 цикл/ч (красная линия) и 16 цикл/ч (синяя линия). Структура профилей продольной компоненты скорости стокова дрейфа очень похожа, только в верхнем 10-метровом слое и глубже 30 м скорость стокова дрейфа у волн с частотой 10 цикл/ч выше.



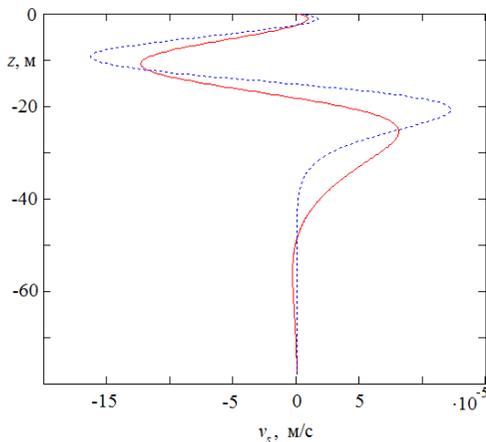
Р и с. 7. Профили волновых \overline{uw} , \overline{vw} вертикальных потоков импульса
F i g. 7. Profiles of the wave \overline{uw} , \overline{vw} vertical momentum fluxes



Р и с. 8. Вертикальные профили продольной составляющей скорости стокова дрейфа
F i g. 8. Vertical profiles of the longitudinal component of the Stokes drift velocity

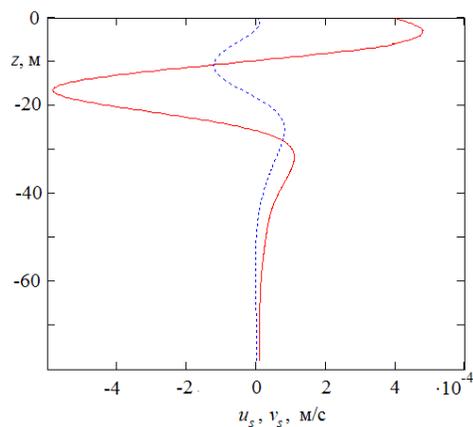
Вертикальные профили поперечной к направлению распространения волны компоненты скорости стокова дрейфа (формула (17)) для волн с частотами 10 цикл/ч (красная линия) и 16 цикл/ч (синяя линия) показаны на рис. 9. Здесь в верхнем 25-метровом слое модули максимального и минимального значения этой компоненты скорости у волн с частотой 16 цикл/ч выше, в то время как глубже 25 м и до глубины 48 м преобладает скорость стокова дрейфа у волн с частотой 10 цикл/ч.

Представляет интерес сравнить скорости стокова дрейфа вдоль и поперек направления распространения волны. На рис. 10 приведены вертикальные профили этих компонент скорости для волн с периодом 10 цикл/ч. Скорость стокова дрейфа u_s вдоль направления распространения волны (красная линия) заметно превышает поперечную скорость v_s (синяя линия).



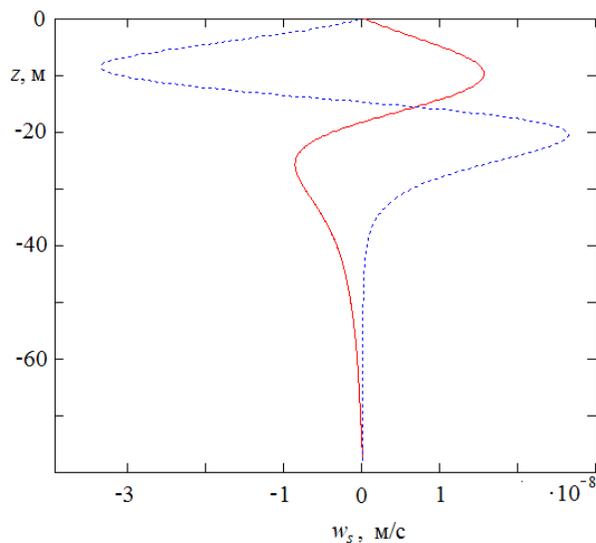
Р и с. 9. Профили поперечной к направлению распространения волны составляющей скорости стока дрейфа

F i g. 9. Profiles of the Stokes drift velocity component transverse to the wave propagation direction



Р и с. 10. Вертикальные профили двух компонент горизонтальной скорости стока дрейфа

F i g. 10. Vertical profiles of two components of the Stokes drift horizontal velocity



Р и с. 11. Профили вертикальной составляющей скорости стока дрейфа

F i g. 11. Profiles of the vertical component of the Stokes drift velocity

Сравним вертикальную составляющую скорости стока дрейфа (формула (18)) у волн с частотами 10 и 16 цикл/ч. На рис. 11 максимальная по модулю проекция скорости преобладает у волн с частотой 16 цикл/ч (синяя линия). Направления вертикальной составляющей этой скорости у волн с частотами 10 и 16 цикл/ч противоположны, так как она пропорциональна мнимой части частоты и отличается по знаку. Величина вертикальной составляющей скорости стока дрейфа очень мала, на четыре порядка меньше скорости вдоль направления распространения волны. Но она может вносить суще-

ственный вклад в вертикальный перенос тепла и соли, а также в генерацию вертикальной тонкой структуры [24].

Выводы

1. Вертикальные потоки импульса uw , vw у внутренних волн на двумерном сдвиговом течении при учете вращения Земли отличны от нуля и могут быть сравнимы или превышать соответствующие турбулентные потоки.

2. Мнимая часть частоты волны отлична от нуля и отрицательна у второй моды – имеет место слабое затухание волны. У первой моды затухание происходит в низкочастотной области при $k < 0,055$ рад/м, при $k > 0,055$ рад/м присутствует слабое усиление волны.

3. Скорость стокова дрейфа вдоль направления распространения волны заметно превышает поперечную скорость.

4. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа у внутренних волн первой моды с частотами 10 и 16 цикл/ч имеет разные знаки, так как она пропорциональна мнимой части частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пантелеев Н. А., Охотников И. Н., Слепышев А. А.* Мелкомасштабная структура и динамика океана. Киев : Наукова думка, 1993. 195 с.
2. Структурообразование и вертикальный турбулентный обмен в прибрежной зоне Севастопольского региона / А. С. Самодуров [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2015. № 6. С. 3–16. doi:10.22449/0233-7584-2015-6-3-16
3. *Wunsch C., Ferrari R.* Vertical Mixing, Energy, and the General Circulation of the Oceans // Annual Review of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 36. P. 281–314. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122121>
4. *Васильев О. Ф., Воропаева О. Ф., Курбацкий А. Ф.* Турбулентное перемешивание в устойчиво стратифицированных течениях окружающей среды: современное состояние проблемы (обзор) // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47, № 3. С. 291–307.
5. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Волны в стратифицированных средах. М. : Наука, 2015. 735 с.
6. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости / Ю. Д. Борисенко [и др.] // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12, № 3. С. 293–301.
7. *Grimshaw R. H. J.* The Modulation of an Internal Gravity Wave Packet, and the Resonance with the Mean Motion // Studies in Applied Mathematics. 1977. Vol. 56, iss. 3. P. 241–266. <https://doi.org/10.1002/sapm1977563241>
8. *Слепышев А. А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52, № 3. С. 342–350. doi:10.7868/S0002351516030111
9. *Слепышев А. А., Лактионова Н. В.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55, № 6. С. 194–200. doi.org/10.31857/S0002-3515556194-200
10. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Москва : Мир, 1981. Ч. 2. 365 с.
11. *LeBlond P. H.* On the damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // Journal of Fluid Mechanics. 1966. Vol. 25, iss. 1. P. 121–142. <https://doi.org/10.1017/S0022112066000089>

12. *Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2020. Vol. 20. ES4004. doi:10.2205/2020ES000732
13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Analytical Approximations of Dispersion Relations for Internal Gravity Waves Equation with Shear Flows // *Symmetry*. 2020. Vol. 12, iss. 11. 1865. <https://doi.org/10.3390/sym12111865>
14. *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Ленинград : Гидрометеиздат, 1973. С. 128.
15. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Ленинград : Гидрометеиздат, 1981. С. 30.
16. *Воротников Д. И., Слепышев А. А.* Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2018. № 1. С. 23–35. <http://dx.doi.org/10.7868/S0568528118010036>
17. *Gavril'eva A. A., Gubarev Yu. G., Lebedev M. P.* The Miles Theorem and the First Boundary Value Problem for the Taylor-Goldstein Equation // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019. Vol. 13. P. 460–471. <https://doi.org/10.1134/S1990478919030074>
18. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 1961. Vol. 10, iss. 4. P. 496–508. doi:10.1017/S0022112061000305
19. *Howard L. N.* Note on a paper of John W. Miles // *Journal of Fluid Mechanics*. 1961. Vol. 10, iss. 4. P. 509–512. doi:10.1017/S0022112061000317
20. *Banks W. H. H., Drazin P. G., Zaturka M. B.* On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 75, iss. 1. P. 149–171. doi:10.1017/S0022112076000153
21. *Longuet-Higgins M. S.* On the transport of mass by time varying-ocean currents // *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*. 1969. Vol. 16, iss. 5. P. 431–447. [https://doi.org/10.1016/0011-7471\(69\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0011-7471(69)90031-X)
22. Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море / В. А. Иванов [и др.] // *Доповіді НАН України*. 2008. № 6. С. 108–112.
23. *Самодуров А. С.* Взаимодополняемость различных подходов для оценки интенсивности вертикального турбулентного обмена в естественных стратифицированных бассейнах // *Морской гидрофизический журнал*. 2016. № 6. С. 37–48. doi:10.22449/0233-7584-2016-6-37-48
24. *Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I.* Vertical Mass Transport by Weakly Nonlinear Inertia-Gravity Internal Waves // *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. PMMEEP 2017 / Eds. V. Karev, D. Klimov, K. Pokazeev*. Cham : Springer Geology. Springer, 2017. P. 99–111. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77788-7_12

Об авторе:

Слепышев Александр Алексеевич, ведущий научный сотрудник, отдел турбулентности, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), доктор физико-математических наук, **ResearcherID: V-6948-2017**, **ORCID ID: 0000-0002-9259-7558**, **Istina-ResearcherID (IRID): 3614585**, slep55@mail.ru