

Вихревой слой на β -плоскости в формулировке Майлса – Рибнера. Полнос на действительной оси

В. Г. Гневывшев¹, Т. В. Белоненко^{2, ✉}

¹ *Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия*

² *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
✉ *bvvlisab@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2021 г., после доработки – 28.05.2021 г.

Цель. Рассмотрена задача о незональном вихревом слое на β -плоскости в постановке Майлса – Рибнера. Известно, что вихревой слой в отсутствие β -эффекта не имеет нейтральных собственных мод, а имеющиеся две моды (варикозная и синусоидальная) являются неустойчивыми. Первоначально обобщение задачи на β -плоскость касалось только зонального случая. В данной работе впервые рассмотрена задача для незонального вихревого слоя. Известно, что в ВКБ-приближении для линейных волновых возмущений (вне зависимости от того, рассматривается зональное или незональное фоновое течение) имеется адиабатический инвариант в виде закона сохранения потока энтропии (завихренности). Для зонального вихревого слоя закон сохранения энтропии также выполняется, и никакого обмена завихренностью между волнами и течением в зональном случае не происходит. Незональный вихревой слой обладает качественно иными свойствами, в частности он не сохраняет энтропию. Как следствие, появляется новый класс решений, которые можно интерпретировать как чистое излучение волн Россби незональным течением. Обобщение задачи о вихревом слое на β -плоскости на незональный случай является основной целью данной работы.

Методы и результаты. Найден новый класс линейных стационарных волновых решений, который можно интерпретировать как чистое излучение волн Россби незональным течением. Показано, что незональное течение может быть направлено в одну сторону, а стационарные волновые возмущения могут двигаться в противоположном (встречном) направлении. Сосуществование таких решений для сдвигового незонального потока и стационарных волновых возмущений объяснено влиянием внешней силы и математически происходит из несамосопряженности линейного оператора для незонального фонового потока.

Выводы. Существует новый класс решений, который можно интерпретировать как чистое излучение волн Россби незональным течением. Такое решение в принципе отсутствует для зонального течения. Именно незональность дает эффект чистого излучения и соответствует классическому определению излучения. Данный подход позволяет устранить противоречивость терминологии, когда неустойчивости ошибочно называются излучением, а излучение – чистым излучением.

Ключевые слова: волны Россби, вихревой слой, незональное течение, задача Майлса – Рибнера

Благодарности: работа поддержана грантом РФФИ № 20-05-00066. Работа В. Г. Гневывшева поддержана также средствами государственного бюджета по госзаданию № 0128-2021-0003.

Для цитирования: *Гневывшев В. Г., Белоненко Т. В.* Вихревой слой на β -плоскости в формулировке Майлса – Рибнера. Полнос на действительной оси // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 5. С. 525–537. doi:10.22449/0233-7584-2021-5-525-537

Vortex Layer on the β -Plane in the Miles – Ribner Formulation. Pole on the Real Axis

V. G. Gnevyshev ¹, T. V. Belonenko ², ✉

¹ Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

² Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

✉ btvlisab@yandex.ru

Purpose. The problem of a non-zonal vortex layer on the β -plane in the Miles – Ribner formulation is considered. It is known that in the absence of the β -effect, the vortex layer has no neutral eigenmodes, and the available two ones (varicose and sinusoidal) are unstable. Initially, generalization of the problem to the β -plane concerned only the zonal case. The problem for a non-zonal vortex layer is examined for the first time in the paper. It is known that in the WKB approximation for the linear wave disturbances (regardless of whether a zonal or non-zonal background flow is considered), there is an adiabatic invariant in the form of the law of the enstrophy flow (vorticity) conservation. For the zonal vortex layer, the enstrophy conservation law also holds, and no vorticity exchange occurs between the waves and the flow in the zonal case. The non-zonal vortex layer has qualitatively different features; particularly, it does not retain enstrophy. Thus, as a result, there appears a new class of solutions which can be interpreted as pure radiation of the Rossby waves by a non-zonal flow. Generalizing the vortex layer problem on the β -plane to the non-zonal case constitutes the basic aim of the present study.

Methods and Results. A new class of linear stationary wave solutions, namely the Rossby waves, is found. It is shown a non-zonal flow can be directed in one way, whereas the stationary wave disturbances can move in the opposite (contrary) direction. The coexistence of such solutions for the shear non-zonal flow and stationary wave disturbances takes place due to the influence of the external force and mathematically comes from a non-self-adjoint character of the linear operator for a non-zonal background flow.

Conclusion. There exists a new class of solutions that can be interpreted as pure radiation of the Rossby waves by a non-zonal flow. There is no such solution for a zonal flow. It is just non-zoning that gives the effect of pure radiation and corresponds to the classical definition of radiation. This approach makes it possible to eliminate inconsistency in terminology, when instabilities are mistakenly called radiation, and radiation – pure radiation.

Keywords: Rossby waves, vortex layer, non-zonal flow, Miles – Ribner problem

Acknowledgments: the work was supported by the RFBR grant No. 20-05-00066. The research by V.G. Gnevyshev was also supported by the IO RAS, ST-ASS-0128-2021-0003.

For citation: Gnevyshev, V.G. and Belonenko, T.V., 2021. Vortex Layer on the β -Plane in the Miles – Ribner Formulation. Pole on the Real Axis. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(5), pp. 486-498. doi:10.22449/1573-160X-2021-5-486-498

Введение

При аналитическом описании взаимодействия крупномасштабных течений и волновых возмущений в линейной постановке применяются два качественно различных подхода. Первый подход опирается на предположение, что волновое поле фонового потока описывается гладкими функциями, при этом используются или модельные задачи, или ВКБ-приближение. В модельных задачах физические поля фонового потока (поле скорости и стратификация) задаются аналитическими выражениями, а решение задачи, как правило, можно свести к специальным функциям [1–5]. При использовании ВКБ-приближения предполагается, что фоновое течение изменяется довольно плавно, волна успевает перестроить свое поле под текущие параметры фонового потока, и, таким

образом, в результате фактически получаем параметрическую зависимость от фоновых потоков [6, 7].

Второй подход сводится к отказу от полной гладкости фоновых полей и переходу к моделям кусочно-непрерывных профилей фонового потока. Наиболее простая постановка такого рода задач – это задача о вихревом слое, когда поле скорости состоит из двух разных констант по разные стороны от вихревого слоя.

Известно, что для волн Россби в рамках ВКБ-приближения (в предположении о плавном изменении скорости фонового течения) существует динамический инвариант в виде закона сохранения потока энтропии вне зависимости от того, зональный или незональный этот фоновый поток [5]. Полученный для зонального потока результат сохраняется и для зонального вихревого слоя при решении задачи в постановке Майлса – Рибнера. Однако если поток незональный, то результаты ВКБ-приближения и результаты для вихревого слоя расходятся. Задача в постановке Майлса – Рибнера теряет свойства симметрии для эрмитовых операторов, и анализ становится крайне трудоемким.

Согласно классическим работам (например, [8–10]), в линейной задаче при исследовании взаимодействия волн и течений первым делом анализируют вихревой слой и его собственные моды. Известно, что в отсутствие β -эффекта вихревой слой не имеет нейтральных собственных мод, а имеющиеся две моды являются неустойчивыми, то есть находятся в комплексной плоскости. Поскольку нейтральные моды отсутствуют, а вихревой слой не может сосуществовать со стационарными волновыми решениями, данную задачу часто просто называют задачей о неустойчивости Кельвина – Гельмгольца.

Обобщение вихревого слоя на β -плоскость сделано в работе [11], в которой получено уравнение с радикалами. Для его решения так же, как и в случае отсутствия β -эффекта, следует один радикал перенести в правую часть и потом обе части возвести в квадрат. Однако при этом получается уже не квадратное уравнение, как в случае отсутствия β -параметра, а кубическое. Оно имеет один действительный и два комплексных корня, которые по сути и есть обобщенные моды Кельвина – Гельмгольца. Принципиально важно, по словам авторов работы [11, с. 85–86], что нейтральный корень – это «искусственно приобретенный» корень, который возник в результате возведения в квадрат исходного дисперсионного соотношения для собственной моды вихревого слоя.

Однако впоследствии Л. Д. Тэлли [12] сделала курьезную ошибку, которая стала многократно повторяться в последующих работах. Л. Д. Тэлли выписывает кубическое уравнение (формула (21) в [12, с. 977]), которое совпадает с соответствующим уравнением (2.6) из статьи [11, с. 85], и на его основе делает следующие ошибочные утверждения: называет это кубическое уравнение дисперсионным соотношением, что неверно (поскольку это квадрат дисперсионного соотношения); утверждает, что у этого дисперсионного соотношения есть три корня: один действительный (нейтральная мода) и два комплексных. Но при этом Л. Д. Тэлли [12] не исключает нейтральную моду, как следовало бы сделать и как сделано в работе [11], а впоследствии и в [13].

К сожалению, В. М. Каменкович и Дж. Педлоски [14], как и многие другие авторы, которые позже цитировали данную работу Л. Д. Тэлли [12], не заметили эту принципиальную ошибку, из-за чего все последующие результаты их

исследований выглядят не совсем корректно. Более того, начиная с работы Л. Д. Тэлли [12], понятия путают и используют некорректно. Если Л. Н. Говард и П. Г. Дразин [11] нейтральные решения называли излучением, а комплексные моды неустойчивостями, то Л. Д. Тэлли [12] называет нейтральные решения не излучением, а введенным ею новым термином «чистое излучение», используя термин «излучение» для одной из неустойчивых мод. Однако фактически это всего лишь мода, локализованная в окрестности вихревого слоя. К сожалению, эта ошибочная терминология закрепилась и перешла во многие последующие работы разных авторов.

Существуют два качественно различных подхода в задачах с разрывным профилем скорости. Наиболее известный из них изложен в монографии [8], в которой решения для вихревого слоя ищут сразу в виде функций, строго затухающих на бесконечности. Авторы показывают, что если β -эффект отсутствует, а поле плотности постоянно, то собственные значения для моды вихревого слоя являются строго комплексными, то есть нейтральные решения отсутствуют.

Однако при этом возникает резонный вопрос: как соотносятся эти результаты, полученные для абсолютно гладких функций фонового потока или в ВКБ-приближении, с результатами, полученными при отказе от полной гладкости фоновых полей. В линейной постановке – как в ВКБ-приближении, так и для вихревого слоя – взаимодействие волн Россби и зональных течений происходит с сохранением адиабатического инварианта, т. е. при выполнении закона сохранения энтропии. А фактически при любой постановке такой задачи какое-либо взаимодействие отсутствует, то есть суммарный поток энтропии не меняется. При этом не имеет значения, преломляется ли плавно волна на переменном зональном течении или добавляется еще и отраженная волна.

Однако совершенно иначе дело обстоит для незональных течений. Известно, что зонально неустойчивые решения при переходе к незональному случаю становятся более неустойчивыми [14]. Более того, утверждения всех теорем об устойчивости зональных течений, включающие оценки сверху, например, теоремы Ховарда о полукруге [15], при переходе к незональному случаю вообще перестают быть верными [16]. В работе [5] показано, что в гладких аналитических функциях в ВКБ-приближении при распространении волны Россби на незональном струйном течении в линейном приближении их взаимодействие происходит в рамках адиабатического инварианта, которым является закон сохранения энтропии. Однако при таком взаимодействии волна фактически сохраняет свою завихренность и никакого обмена завихренностью между волной и течением не происходит. Тогда возникает вопрос: насколько устойчив полученный результат, если отказаться от предположения о плавности изменения фонового потока?

В данной работе мы даем ответ на этот вопрос. Задача о собственных модах для зонального вихревого слоя на β -плоскости рассматривалась еще в работах [11, 17], о чем есть упоминание в монографии [8]. Ключевым моментом, на который следует обратить внимание, является то, что авторы в своих рассуждениях не делают различий между зональным и незональным течением. Они рассматривают «просто течение», хотя в действительности их уравнения выводятся строго для зонального потока.

Забегаая вперед, зафиксируем основной ход наших рассуждений. В своем исследовании мы покажем, что для незонального фонового потока при переносе данной задачи на β -плоскость возникает эффект излучения, причём именно чистого излучения (терминология Л. Д. Тэлли [12]), при котором в коэффициентах преломления и отражения на действительной оси появляется полюс. Отметим, что этот факт ранее не был установлен. Самое простое его объяснение: незональное фоновое течение на самом деле не является решением уравнения завихренности на β -плоскости и, как следствие, оператор, описывающий линейные возмущения на незональном течении, не является эрмитовым.

Термин «чистое излучение» используется здесь потому, что в литературе простой термин «излучение» применяется для неустойчивых мод, когда одна из двух неустойчивых мод просто назначается автором излучающей [12]. Однако мы не строим моду в классическом понимании этого слова, а для анализа используем подход Майлса – Рибнера, который был разработан в газовой динамике в 1960-х гг. для решения задачи взаимодействия звуковых волн с тангенциальным разрывом скорости и впоследствии перенесен на случай зонального вихревого слоя для волн Россби [13, 17, 18].

Одним из наиболее распространенных подходов к объяснению образования вихрей и меандров в океане является механизм баротропно-бароклинной неустойчивости. Этот механизм подразумевает, что в линейной задаче сначала находится самая неустойчивая мода, затем анализируется нелинейная стадия, и в результате получают локализованные вихревые решения типа «кельвиновский кошачий глаз» [8–10]. При таком подходе реализуется следующая ситуация: внешняя сила генерирует только крупномасштабное течение, но не может генерировать волновые возмущения.

В нашей работе мы предлагаем альтернативный вариант сосуществования крупномасштабного потока и волновых образований. Суть его крайне проста: и стационарное сдвиговое течение, и сами волновые образования – это результат действия внешней силы. То есть внешняя сила не только генерирует крупномасштабное фоновое течение, но одновременно также является ответственной за возбуждение и поддержание нейтральных волновых образований.

Цель исследования и постановка задачи

Основной результат, получаемый при обобщении вихревого слоя на β -плоскость, состоит в том, что нейтральные решения при этом не появляются, то есть вихревой слой в строго зональном случае на β -плоскости не имеет нейтральных собственных решений, а полученные две неустойчивые моды являются правопреемниками известных варикозной и синусоидальной мод. В данной работе мы не только даем обобщение задачи о вихревом слое на β -плоскости на незональный случай, но и показываем, что именно незональность дает эффект чистого излучения.

Основное отличие такого подхода состоит в виде граничных условий на бесконечности. При построении моды накладывается условие затухания на бесконечности, при котором решение строго стремится к нулю. В постановке задачи Майлса – Рибнера требуется ограниченность решения на бесконечности, при этом используется условие излучения от вихревого слоя. На наш

взгляд, такой подход физически более понятен, так как при его использовании мода вихревого слоя становится частным случаем этой постановки.

Таким образом, **цель исследования** кратко можно сформулировать следующим образом: получить на β -плоскости обобщение задачи о вихревом слое на неazonальный случай.

Основные уравнения и анализ решений

Рассмотрим линеаризованное уравнение завихренности для функции тока в $\Psi = \Phi(y)e^{ik(x-ct)}$, где k – продольная компонента волнового числа; c – продольная компонента фазовой скорости; Φ – функция тока, ось x направлена вдоль течения, ось y – перпендикулярно течению; t – время. В дальнейшем продольные компоненты (k, c) будут инвариантами задачи. Поперечная компонента волнового числа для падающей волны также будет задаваться и считаться фиксированной. Поперечные компоненты волнового вектора преломленных и отраженных волн будут находиться из дисперсионного соотношения с учетом условия излучения. Групповые скорости прошедшей и отраженной волн направлены от тангенциального разрыва. Амплитуда падающей волны будет считаться равной единице, и все дальнейшие расчеты будут нормированы на эту величину. Амплитуды преломленной и отраженной волн будут находиться из условий сшивки. Переменным параметром будем считать величину скачка ступеньки профиля скорости фонового потока.

Линейное уравнение волн Россби на сдвиговом течении имеет вид [14]

$$\Phi_{yy} + \left(\frac{i\beta_1}{k(\bar{U}-c)} \right) \Phi_y + \left(\frac{\beta_2 - \bar{U}_{yy}}{\bar{U}-c} - k^2 - F^2 \right) \Phi = 0, \quad (1)$$

где $\beta_2 = \beta \cos \theta$, $\beta_1 = \beta \sin \theta$, θ – угол наклона баротропного плоско-параллельного течения к параллели; \bar{U} – скорость потока; F^2 – собственные значения вертикальной задачи. Тогда для случая постоянной стратификации в отсутствие топографии имеем стандартное выражение

$$F^2 \equiv \frac{f^2 (\pi n)^2}{N^2 H^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где N – частота Вэйсяля – Брента; f – частота вращения Земли; H – глубина.

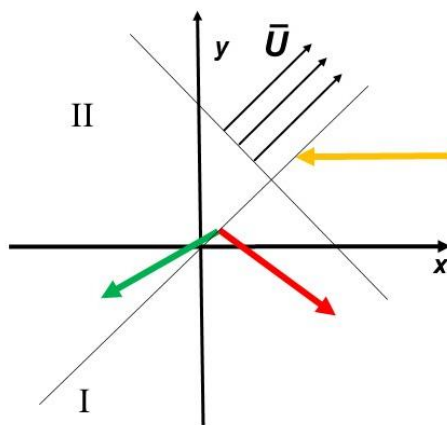
Условия сшивки можно вывести строго математически, следуя формальной процедуре [8]. Условия сшивки имеют вид [14]

$$\begin{cases} \Delta \left(\frac{\Phi}{\bar{U}-c} \right) = 0, \\ \Delta \left(\Phi_y (\bar{U}-c) - \Phi \bar{U}_y + \frac{i\beta_1}{k} \Phi \right) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где Δ – классический скачок значений через вихревой слой.

В постановке Майлса – Рибнера мы сшиваем три функции: падающую волну единичной амплитуды и две волны – отраженную, с коэффициентом от-

ражения R , и прошедшую, с коэффициентом прохождения T . Групповая скорость падающей волны направлена в сторону ступеньки, а отраженная и преломленная волны имеют групповую скорость, направленную от ступеньки (рисунок). Так как фоновое течение считается продольно однородным и стационарным во времени, у нас есть две циклические переменные, которые порождают два инварианта (интеграла движения) – продольное волновое число и частоту волны.



Вихревой слой на незональном потоке. Падающая волна (желтая стрелка), преломленная (зеленая стрелка) и отраженная (красная стрелка)

Vortex layer on the non-zonal flow. Incident (yellow arrow), refracted (green arrow) and reflected (red arrow) waves

Итак, ищем решение (2) в виде

$$\begin{cases} \Phi = \exp(i l_1 y) + R \exp(i l_0 y), \\ \Phi = T \exp(i l_2 y), \end{cases} \quad (3)$$

где l_1, l_0, l_2 – поперечные компоненты волнового числа падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Для самосопряженного оператора, в случае чисто зонального вихревого слоя, компоненты волнового числа l_0, l_1 были связаны соотношением $l_0 = -l_1$. В нашем случае свойства самосопряженности оператора нет и свойства симметрии для эрмитовых операторов пропадают. При этом мы имеем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = -\frac{(\beta_2 k - \beta_1 l)}{k^2 + l^2 + F^2} + k \bar{U}, \quad (4)$$

где ω – частота волн, $\omega = kc$.

Далее дисперсионное соотношение (4) перепишем в следующем виде:

$$l = \frac{\beta_1}{2(\omega - k\bar{U})} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{2(\omega - k\bar{U})}\right)^2 - k^2 - F^2 - \frac{\beta_2 k}{(\omega - k\bar{U})}}. \quad (5)$$

Выбор знака корня определяется направлением групповой скорости в поперечном направлении. Тогда выражения для компонент групповой скорости имеют вид

– в поперечном направлении

$$C_{gr.y} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta_2 k l - \beta_1 (l^2 - k^2 - F^2)}{(k^2 + l^2 + F^2)^2};$$

– в продольном направлении

$$C_{gr.x} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta_2 (k^2 - l^2 - F^2) - 2\beta_1 k l}{(k^2 + l^2 + F^2)^2} + \bar{U}.$$

Подставляя выражения (3) в формулы (2), находим следующие выражения для коэффициентов преломления T и отражения R :

$$\begin{aligned} T &= A / C; \quad R = -B / C; \\ A &= (l_0 - l_1)(\bar{U}_1 - c)(\bar{U}_2 - c); \\ B &= (\bar{U}_1 - c)^2 l_1 - (\bar{U}_2 - c)^2 l_2 + \frac{\beta_1}{k}(\bar{U}_1 - \bar{U}_2); \\ C &= (\bar{U}_1 - c)^2 l_0 - (\bar{U}_2 - c)^2 l_2 + \frac{\beta_1}{k}(\bar{U}_1 - \bar{U}_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Качественный анализ полученных соотношений показывает, что если скачок поля скорости фонового потока $(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \rightarrow 0$, то $R \rightarrow 0$, $T \rightarrow 1$. Отметим, что наличие в решении отраженной волны не умаляет общности подхода, даже когда величина ступеньки равна нулю. Дело в том, что в этом случае коэффициент отражения равен нулю, и тогда отраженная волна исключается автоматически.

Аналитически проверить существование интеграла движения, как это сделано в работе [13], довольно трудно. Однако для численного моделирования на этом пути нет никаких препятствий. Нетрудно убедиться, что на самом деле интеграл не сохраняется. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть случай, когда знаменатель у коэффициентов преломления и отражения обращается в ноль. Математически такая ситуация называется полюсом. Полюса коэффициентов преломления и отражения иногда трактуются как собственные моды вихревого слоя. В физическом смысле это означает, что есть падающая на вихревой слой волна единичной амплитуды и две волны бесконечной амплитуды, распространяющиеся от вихревого слоя в разные стороны. Падающая на вихревой слой бесконечно малая «затравочная» волна вызовет непропорциональный отклик в виде отраженной и преломленной волн. В частности, одно из решений может представлять собой волну, распространяющуюся вверх по течению в противоположном направлении (см. приложение).

Для классического вихревого слоя и вихревого слоя на β -плоскости в зональном случае решений с полюсами на действительной оси нет. Точнее, фор-

мально полюса, разумеется, существуют, но они лежат в комплексной плоскости. В противоположность этому, для незонального случая такое решение с полюсом на действительной оси есть.

В общем случае, в силу отсутствия в задаче симметрий, надо рассмотреть восемь вариантов падения волны на вихревой слой, которое представляет собой одномерное течение типа «ступеньки бесконечной протяженности». В этой работе мы ограничимся анализом только одного случая.

Пусть область вихревого слоя разделена на две части: область I (расположена в нижней части ступеньки) и область II (в верхней части ступеньки). Пусть волна падает снизу вверх (рисунок). Покажем, что в этой ситуации полюс на действительной оси существует.

Пусть обе скорости положительны, при этом $U_2 - U_1 \equiv 2\delta_1 > 0$. Тогда в безразмерной форме получаем уравнения

$$c_1 = \left(c - \frac{U_1 + U_2}{2} \right) / \delta_1, \quad \gamma^2 \equiv k^2 / (k^2 + F^2), \quad U_2 - U_1 \equiv 2\delta_1, \quad s_1 = \beta / (2(k^2 + F^2)\delta_1) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & (c_1 + 1)^2 \left[\frac{s_1 \sin \theta}{c_1 + 1} + \left(\left[\frac{s_1 \sin \theta}{c_1 + 1} \right]^2 - \gamma^2 - 2\gamma^2 \frac{s_1 \cos \theta}{c_1 + 1} \right)^{1/2} \right] - \\ & - (c_1 - 1)^2 \left[\frac{s_1 \sin \theta}{c_1 - 1} - \left(\left[\frac{s_1 \sin \theta}{c_1 - 1} \right]^2 - \gamma^2 - 2\gamma^2 \frac{s_1 \cos \theta}{c_1 - 1} \right)^{1/2} \right] - 4s_1 \sin \theta = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Знаки «плюс» и «минус» перед корнем в разных строчках формулы (8) соответствуют отраженным и преломленным волнам соответственно: плюс в верхней строчке дает отрицательную групповую скорость по оси y (отраженная волна); минус во второй строчке дает положительную групповую скорость (преломленная волна). Нетрудно видеть, что если угол наклона течения равен нулю ($\sin \theta = 0$), т. е. поток зональный, то возводя уравнение (8) в квадрат, получаем в точности кубическое уравнение (5) из работы [17, с. 108]: $c_0^3 + 1,5s_0c_0^2 + c_0 + 0,5s_0 = 0$, которое одновременно является обобщением уравнения (2.6) из работы [11, с. 85], при этом s – безразмерный параметр из работы [18] связан с безразмерным параметром a из работы [11] соотношением $a = 4s$. Физический смысл формулы (8) следующий. Если течение зональное, то, как показано аналитически в работе [17], взаимодействие вихревого слоя с волнами происходит в рамках закона сохранения энтрофии, то есть поток энтрофии падающей волны равен сумме потоков отраженной и преломленной волн. Происходит перераспределение потоков энтрофии между тремя волнами: падающей, отраженной и преломленной, однако суммарная энтрофия не изменяется.

Известно, что для зонального потока следствия закона сохранения энтрофии и закона сохранения энергии совпадают в силу вырожденности зональной задачи [5]. Коэффициенты преломления и отражения не имеют полюсов на действительной оси, знаменатель $C \neq 0$, следовательно, никаких режимов, соответствующих чистому излучению [12], не наблюдается, а полюса лежат

в комплексной плоскости. Это означает, что для строго зонального потока разные подходы дают одинаковый результат: 1) непрерывный профиль скорости фоновых потока и 2) кусочно-гладкий вихревой слой, – то есть выполняются закон сохранения потока энтропии и закон сохранения энергии, а взаимодействие потока и волновых возмущений отсутствует.

Для незонального потока для вихревого слоя закон сохранения энтропии не выполняется. Покажем это на простом примере. Для простоты положим, что падающая волна перемещается снизу из области I, где поле скорости фоновых течения нулевое, в область II. Для дальнейшего анализа для простоты расчетов были выбраны следующие начальные параметры: $\cos \theta = 0,6$; $\sin \theta = 0,8$; $F^2 = 1$; $k = 0,5$; $\beta = 10$; $\omega = 1$. Из дисперсионного соотношения (6) получаем поперечные компоненты волнового числа: $l_1 = 4 - \sqrt{11,75} \approx 0,57$; $l_0 = 4 + \sqrt{11,75} \approx 7,43$. В соответствии с условием излучения выберем минус перед корнем в выражении (6) для поперечной компоненты волнового числа преломленной волны. Тогда при $\bar{U} = 0$ получаем следующий набор параметров:

$$l_2 = 4 - \sqrt{11,75} = 0,5721; \quad C_{gr,y1} = 4,346; \quad C_{gr,y2} = 4,346; \\ C_{gr,y0} = -0,1215; \quad Tr = 1; \quad Ref = 0; \quad C = 7,42.$$

Простая проверка подтверждает, что падающая и отраженная волны имеют значения групповой скорости по поперечной координате, противоположные по знаку.

При постепенном увеличении ступеньки до значения $\bar{U} = 1,856$ знаменатель C остается положительным, $C \rightarrow 0$. Находим $l_2 = 0,3876$; $C_{gr,y2} = 5,673$; $C = 0,0072$; $Tr = 272$; $Ref = 3770$. Отметим, что коэффициенты отражения и прохождения уже выросли на три порядка (!).

При значении $\bar{U} = 1,857$ знаменатель C уже отрицательный: $C < 0$. В этом случае $l_2 = 0,3875$; $C_{gr,y2} = 5,674027$; $C = -0,0082$; $Tr = -228$; $Ref = -3184$. Эффект появляется до того, как в задаче возникает критический слой, из чего следует, что рассматриваемые волны не являются волнами отрицательной энергии. При выбранных параметрах ($\omega = 1$, продольная компонента $k = 0,5$) фазовая скорость в продольном направлении равна 2.

Проведем расчет для тех же параметров по безразмерному уравнению (8): находим $\gamma^2 = 0,2$ при $\bar{U} = 1,856$. Далее получаем $s = 4,3103$, и левая часть (8) принимает положительное значение 0,00373. При $\bar{U} = 1,857$ получаем $s = 4,3080$, и выражение принимает уже отрицательное значение (-0,01148). Следовательно, корень уравнения находится между этими значениями и самое главное – он существует.

Если параметр β уменьшить, то при расчете получается, что полюс появляется при меньшем значении ступеньки. Расчет дает следующие цифры: $\beta = 10$ при $\bar{U} = 1,857$; $\beta = 9$ при $\bar{U} = 1,8331$; $\beta = 7$ при $\bar{U} = 1,7546$.

Если взять баротропный случай $F^2 = 0$, то полюс все равно существует, но уже при меньших значениях скачка скорости.

Если волна падает не с юга, а с севера, то при тех же параметрах, но для перевернутой ступеньки полюс отсутствует, знаменатель в нуль не обращается, что снова демонстрирует отсутствие в задаче свойств симметрии, которое, как нетрудно видеть, обусловлено последним, незональным слагаемым в уравнении (7). Критическое значение величины ступеньки гораздо больше и лежит за критическим слоем:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= -2,935; \quad s = 0,6; \quad p = 1; \quad k = 0,5; \quad b = 10; \quad \omega = 1; \\ C &= -0,0089935; \quad Tr = 1881; \quad Ref = 761; \\ C_{gr.y1} &= -0,0121505; \quad C_{gr.y0} = 0,4346225; \quad C_{gr.y2} = -0,0371691.\end{aligned}$$

Отметим следующее обстоятельство. Для незонального случая эти результаты являются следствием того, что выражение (1) – не эрмитов оператор, в отличие от зонального случая. Возможно, именно этот факт является ключом к пониманию полученных результатов в данной задаче.

Выводы

Мы показали, что для незонального течения при его взаимодействии с волнами Россби существует новый класс решений, который можно интерпретировать как чистое излучение волн Россби незональным течением. Такой подход позволит устранить возникшую путаницу в терминологии, когда неустойчивости называются излучением, а излучение – чистым излучением, при том что авторы, используя термин «излучение», фактически анализировали неустойчивости.

Другими словами, новизна нашей работы состоит в следующем. При анализе незонального случая линейной задачи многие авторы приходили, по сути, к одному и тому же выводу: неустойчивые решения становятся более неустойчивыми и все теоремы и ограничения на неустойчивости для зонального случая перестают быть верными в незональном случае [17]. Мы показали, что в незональном случае существует совершенно новый класс решений, который отсутствует в зональном случае. Мы также показали, что именно незональность дает эффект чистого излучения. Этот класс решений соответствует классическому определению излучения, в отличие от неустойчивых решений, неверно называемых излучением.

Приложение

О незональности вихревого слоя

Уравнение завихренности на β -плоскости в системе координат, повернутой на угол θ к параллели, имеет вид

$$\frac{d_h}{dt} \left[\nabla_h^2 \Psi + \left(\frac{1}{S} \Psi_z \right)_z + \beta (y \cos \theta + x \sin \theta) \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Будем искать решения в виде

$$\Psi(x, y, z, \theta, t) = \Psi_0(y, z, \theta). \quad (\text{A.2})$$

Подставляя выражение (A.2) в формулу (A.1), получаем

$$\frac{\partial \Psi_0(y, z, \theta)}{\partial y} \beta \sin \theta = 0. \quad (\text{A.3})$$

Из уравнения (A.3) следует:

1) если угол θ равен нулю (ось x направлена вдоль параллели – случай зонального течения), уравнение (A.3) выполняется для любой функции $\Psi_0(y, z, \theta)$. Следовательно, любое плоскопараллельное стационарное течение является решением нелинейного уравнения завихренности на β -плоскости. Результат хорошо известен [8];

2) если угол θ не равен нулю (ось x не направлена вдоль параллели – случай незонального течения), то нетривиальных решений не существует.

Следовательно, для существования незонального плоскопараллельного стационарного течения в рамках нелинейного уравнения завихренности на β -плоскости требуется наличие внешней силы, т. е. мы должны в правую часть уравнения (A.3) включить некую внешнюю силу. Следовательно, в исходном линейном уравнении в незональном случае (1) неявно предполагается зависимость $\bar{U} = \bar{U}(F)$. Это означает, что из уравнения (1) следует, что линейные волновые решения зависят от внешней силы, то есть не только само незональное течение, но и волновые решения для незонального случая являются результатом прямого воздействия внешнего фактора.

Таким образом, если вихревой слой чисто зональный, линейный оператор самосопряженный, тогда малые возмущения зависят от профиля крупномасштабного течения и они неустойчивы. А если вихревой слой незональный, то линейный оператор несамосопряженный, и тогда внешняя сила определяет сдвиговое стационарное течение и волновые возмущения.

Влияние внешней силы для незонального случая не ограничивается только действием крупномасштабного потока. При взаимодействии волн с крупномасштабным стационарным потоком по достижении определенного порогового значения появляется новый класс решений, который можно трактовать как излучение течения, а можно и как прямую генерацию волновых возмущений внешней силой. Данный результат объясняет, как могут одновременно существовать незональное струйное течение и волновые образования,двигающиеся в противоположном направлении.

Эта задача даже в простой постановке требует дальнейшего анализа. В частности, необходимо рассмотреть физически более реальные профили поля скорости типа «шляпа» (прямоугольник).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гневыхов В. Г., Шрира В. И. Динамика пакетов волн Россби в окрестности зонального критического слоя с учетом вязкости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 10. С. 1064–1074.
2. Гневыхов В. Г., Шрира В. И. Кинематика волн Россби на неоднородном меридиональном течении // Океанология. 1989. Т. 29, вып. 4. С. 543–548.
3. Гневыхов В. Г., Шрира В. И. Об оценках параметров баротропно-бароклиной неустойчивости зональных потоков на β -плоскости // Доклады АН СССР. 1989. Т. 306, № 2. С. 305–309.

4. *Гневъшев В. Г., Шрира В. И.* Трансформация монохроматических волн Россби в критическом слое на зональном течении // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 8. С. 852–862.
5. *Gnevyshev V. G., Badulin S. I., Belonenko T. V.* Rossby waves on non-zonal currents: structural stability of critical layer effects // Pure and Applied Geophysics. 2020. Vol. 177, iss. 11. P. 5585–5598. <https://doi.org/10.1007/s00024-020-02567-0>
6. Interaction between Rossby waves and a jet flow: basic equations and verification for the Antarctic circumpolar current / V. G. Gnevyshev [et al.] // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2019. Vol. 55, iss. 5. P. 412–422. doi:10.1134/S0001433819050074
7. *Гневъшев В. Г., Белоненко Т. В.* Парадокс Россби и его решение // Гидрометеорология и экология. 2020. № 61. С. 480–493. doi:10.33933/2074-2762-2020-61-480-493
8. *LeBlond P., Mysak L.* Waves in the Ocean. Amsterdam : Elsevier Scientific Publishing Company, 1978. 602 p.
9. *Pedlosky J.* Geophysical fluid dynamics. 2nd ed.. New York : Springer, 1987. 710 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4650-3>
10. *Flierl G. R., Malanotte-Rizzoli P., Zabusky N. J.* Nonlinear waves and coherent vortex structures in barotropic β -plane jets // Journal of Physical Oceanography. 1987. Vol. 17, iss. 9. P. 1408–1438. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1987\)017<1408:NWACVS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1987)017<1408:NWACVS>2.0.CO;2)
11. *Howard L. N., Drazin P. G.* On instability of parallel flow of inviscid fluid in a rotating system with variable Coriolis parameter // Journal of Mathematics and Physics. 1964. Vol. 43, iss. 1–4. P. 83–99. <https://doi.org/10.1002/sapm196443183>
12. *Talley L. D.* Radiating Barotropic Instability // Journal of Physical Oceanography. 1983. Vol. 13, iss. 6. P. 972–987. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1983\)013<0972:RBI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1983)013<0972:RBI>2.0.CO;2)
13. *Степаняню Ю. А., Фабрикант А. Л.* Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // Успехи физических наук. 1989. Т. 159, вып. 9. С. 83–123. doi:10.3367/UFNr.0159.198909c.0083
14. *Kamenkovich I. V., Pedlosky J.* Radiating Instability of Nonzonal Ocean Currents // Journal of Physical Oceanography. 1996. Vol. 26, iss. 4. P. 622–643. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1996\)026<0622:RIONOC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1996)026<0622:RIONOC>2.0.CO;2)
15. *Drazin P. G., Howard L. N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Advances in Applied Mechanics / Ed. by G. G. Chernyi [et al.]. New York : Academic Press, 1966. Vol. 9. P. 1–89. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70006-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70006-1)
16. *Kobayashi S., Sakai S.* Barotropic unstable modes in zonal and meridional channel on the beta-plane // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1993. Vol. 71, iss. 1–4. P. 73–103. doi:10.1080/03091929308203598
17. *Фабрикант А. Л.* Отражение волн Россби от поверхности тангенциального разрыва скорости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23, № 1. С. 106–109.
18. *Gnevyshev V. G., Shriira V. I.* On the evaluation of barotropic-baroclinic instability parameters of zonal flows on a beta-plane // Journal of Fluid Mechanics. 1990. Vol. 221. P. 161–181. <https://doi.org/10.1017/S0022112090003524>

Об авторах:

Гневъшев Владимир Григорьевич, старший научный сотрудник, ФГБУН ИО им. П. П. Ширшова РАН (117997, Россия, Москва, Нахимовский пр., д. 5), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0001-6654-5570**, **ResearcherID: AAZ-6352-2021**, **Scopus Author ID: 6507346231**, avi9783608@gmail.com

Белоненко Татьяна Васильевна, профессор, кафедра океанологии, СПбГУ (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9), доктор географических наук, **ORCID ID:0000-0003-4608-7781**, **ResearcherID: K-2162-2013**, **Scopus Author ID: 6507005889**, btvlisab@yandex.ru