

Научная статья

УДК 532.59
EDN: RRFJTK

DOI: 10.29039/0233-7584-2023-3-289-298

Фазовые сдвиги при встречном взаимодействии волн на мелкой воде

А. А. Родин ^{1, ✉}, Н. А. Родина ², А. Ю. Трусова ³, Е. Н. Пелиновский ^{1, 4}

¹ Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
Нижний Новгород, Россия

² Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

³ Нижегородский государственный лингвистический университет им. Н. А. Добролюбова,
Нижний Новгород, Россия

⁴ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
✉ xmrarro@gmail.com

Поступила в редакцию 02.10.2022; одобрена после рецензирования 20.11.2022;
принята к публикации 09.03.2023.

Аннотация

Цель. Целью данной работы является численное исследование и описание волновых эффектов, возникающих при встречном взаимодействии одиночных импульсов различной полярности в рамках системы уравнений типа Буссинеска с учетом дисперсии в бассейне постоянной глубины.

Методы и результаты. Для моделирования сценариев взаимодействия длинных волновых импульсов применяется программный пакет *CLAWPACK*, в котором используется гибридный метод для численного решения системы уравнений, включающий метод конечных объемов и конечных разностей. Результаты сопоставляются с численными решениями, полученными ранее с помощью бездисперсионной нелинейной системы уравнений мелкой воды.

Выводы. Исследован фазовый сдвиг основной волны при взаимодействии со встречными импульсами различной полярности и показано, что фазовый сдвиг увеличивается с возрастанием амплитуды начальных импульсов. Влияние дисперсии проявляется в трансформации одиночной волны в ундулярный бор. Новизна настоящего исследования состоит в обнаружении и демонстрации таких нелинейных эффектов, как фазовые сдвиги при встречном взаимодействии длинных волн в рамках нелинейной численной модели мелкой воды, в том числе с учетом дисперсии.

Ключевые слова: длинные волны, численный эксперимент, уравнения Буссинеска, взаимодействие волн

Благодарности: представленные результаты получены при поддержке гранта РФФ 22-17-00153.

Для цитирования: Фазовые сдвиги при встречном взаимодействии волн на мелкой воде / А. А. Родин [и др.] // Морской гидрофизический журнал. 2023. Т. 39, № 3. С. 289–298. EDN RRFJTK. doi:10.29039/0233-7584-2023-3-289-298

Phase Shifts in the Counter-Interaction of Shallow Water Waves

A. A. Rodin ^{1, ✉}, N. A. Rodina ², A. Yu. Trusova ³, E. N. Pelinovsky ^{1, 4}

¹ Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia

² National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

³ Linguistics University of Nizhny Novgorod n. a. N. A. Dobrolyubov, Nizhny Novgorod, Russia

⁴ Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

✉ xmrarro@gmail.com

Abstract

Purpose. The work is aimed at numerical studying and describing the wave effects arising from the counter-interaction of different polarity single pulses within the framework of the Boussinesq type equation system with regard to dispersion in a constant depth basin.

Methods and Results. To simulate the scenarios of the long wave pulse interaction, the *CLAWPACK* software package was used. It included the hybrid method for numerical solving the equation system which, in its turn, comprised the method of finite volumes and finite differences. The results were compared to the numerical solutions obtained earlier by using a non-dispersive nonlinear system of shallow water equations.

Conclusions. The fundamental wave phase shift is studied in its interaction with the counter-propagating pulses of different polarity. It is shown that the phase shift increases with the initial pulse amplitude growth. The dispersion influence is manifested in a single wave transformation into an undular bore. The study novelty consists in detecting and demonstrating such nonlinear effects as the phase shifts in the long wave counter-interaction within the framework of the nonlinear shallow water numerical model including the dispersion terms.

Keywords: long waves, numerical experiment, Boussinesq equations, wave interaction

Acknowledgments: The represented results were obtained with the support of the RSF grant 22-17-00153.

For citation: Rodin, A.A., Rodina, N.A., Trusova, A.Yu. and Pelinovsky, E.N., 2023. Phase Shifts in the Counter-Interaction of Shallow Water Waves. *Physical Oceanography*, 30(3), pp. 265-273. doi:10.29039/1573-160X-2023-3-265-273

Введение

Катастрофические волны (цунами, штормовые нагоны) представляют собой длинные волны, поэтому длинноволновые модели широко используются при изучении их распространения. Благодаря использованию законов сохранения, позволяющих учесть ударные фронты, гиперболическая система нелинейных уравнений мелкой воды стала стандартной математической моделью для моделирования распространения и наката длинных волн цунами в прибрежных зонах [1–5].

Теория мелкой воды не учитывает дисперсию волн, которая, тем не менее, оказывается существенной при распространении длинных волн типа цунами на большие расстояния [6–8]. Она учитывается в рамках так называемых уравнений Буссинеска, в частности системы Грина – Надьи [9, 10]. Следует сказать, что уравнения Буссинеска не выводятся точно из исходных уравнений Эйлера. Существует много видов уравнений Буссинеска [11–13], которые применялись для решения конкретных задач в области морской гидротехники и прибрежной океанографии [8, 14, 15].

Встречное взаимодействие волн на мелкой воде изучалось в рамках «чистой» теории мелкой воды [16, 17] и уравнений Буссинеска [18, 19]. Было показано, что по сравнению с линейной теорией нелинейность приводит к большему увеличению высоты волны в момент столкновения, особенно при взаимодействии солитонов почти предельной амплитуды. Эффекты сдвига фаз при взаимодействии нелинейных волн при этом не рассматривались. Данная работа посвящена численному исследованию и описанию волновых эффектов, возникающих при встречном взаимодействии одиночных импульсов различной полярности в рамках системы уравнений типа Буссинеска с учетом дисперсии в бассейне постоянной глубины. Численные расчеты выполнены с помощью вычислительного комплекса *BOUSSCLAW*, решающего уравнения Буссинеска [20].

Математическая модель

В качестве исходных уравнений для анализа встречного взаимодействия волн выбрана система Буссинеска в форме, предложенной в [20]:

$$H_t + (Hu)_x = 0, \quad (1)$$

$$(1 - D)[(Hu)_t] + (Hu^2 + \frac{g}{2}H^2)_x - gHh_x - Bgh^2(h\eta_x)_{xx} = 0. \quad (2)$$

Здесь $H(x, t) = h(x) + \eta(x, t)$ – полная глубина воды; $\eta(x, t)$ – смещение водной поверхности; $h(x)$ – невозмущенная глубина воды; $u(x, t)$ – усредненная по глубине горизонтальная скорость потока; g – гравитационная постоянная. Оператор D для любых $w(x, t)$ определяется с помощью вспомогательной переменной $w(x, t)$ следующим образом:

$$D(w) = \left(B + \frac{1}{2}\right)h^2w_{xx} - \frac{1}{6}h^3\left(\frac{w}{h}\right)_{xx}. \quad (3)$$

Дисперсионный параметр B выбран равным 1/15 [20], при этом значение линейного дисперсионного соотношения, вытекающего из уравнений Буссинеска, лучше соответствует точному соотношению для волн на воде. При $B = 0$ и $D = 0$ система уравнений (1) – (2) переходит в известную нелинейную систему мелкой воды.

Все численные эксперименты проводились с помощью программного обеспечения *CLAWPACK*, точнее – его надстройки *BOUSSCLAW* (www.clawpack.org). В вычислительном пакете *BOUSSCLAW* используется гибридный метод для численного решения системы уравнений (1) – (2), включающий метод конечных объемов и конечных разностей. В частности, используется метод конечных объемов для нелинейной части уравнений и дискретизация конечных разностей с дробными шагами для дополнительных членов, таких как члены дисперсии стандартного и более высокого порядка.

В наших расчетах использовался бассейн постоянной глубины $h = 1$ м длиной 1000 м. Граничными условиями на концах расчетной области являлись условия свободного ухода, формулируемые строго без учета дисперсии. Но фактически численный счет останавливался до момента, когда волна подходила к краю расчетной области. Величина пространственного шага составила

0,16 м, временной шаг подбирался автоматически с учетом критерия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви [21].

В начальный момент времени задавались один или два гауссовых импульса

$$H(x, 0) = h + A \exp[-\beta(x - x_1)^2] + A_2 \exp[-\beta(x - x_2)^2] \quad (4)$$

с длиной у подошвы ~ 120 м ($\beta = 0,002 \text{ м}^{-2}$). Импульсы разделены в пространстве ($x_1 = 150$ м, $x_2 = 350$ м). Амплитуды импульсов A и A_2 предполагаются одинаковыми по модулю, но могут различаться знаками (рис. 1). Это позволяет изучить взаимодействие волн в виде гребня и в виде впадины, при этом нелинейные эффекты для них проявляются по-разному. Скорость течения в начальный момент времени равна нулю, поэтому начальный импульс разделяется на две симметричные волны, бегущие в противоположные стороны и имеющие амплитуды, в два раза меньшие начальной. Начальные амплитуды волн A и A_2 меняются от 0,1 м (слабая нелинейность) до 1 м (сильная нелинейность).

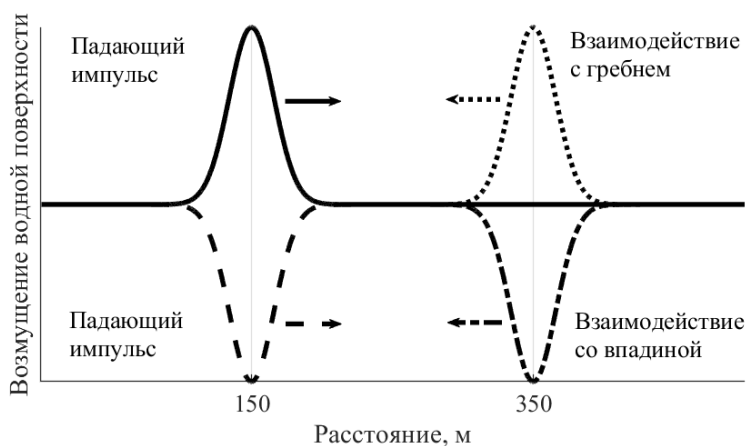


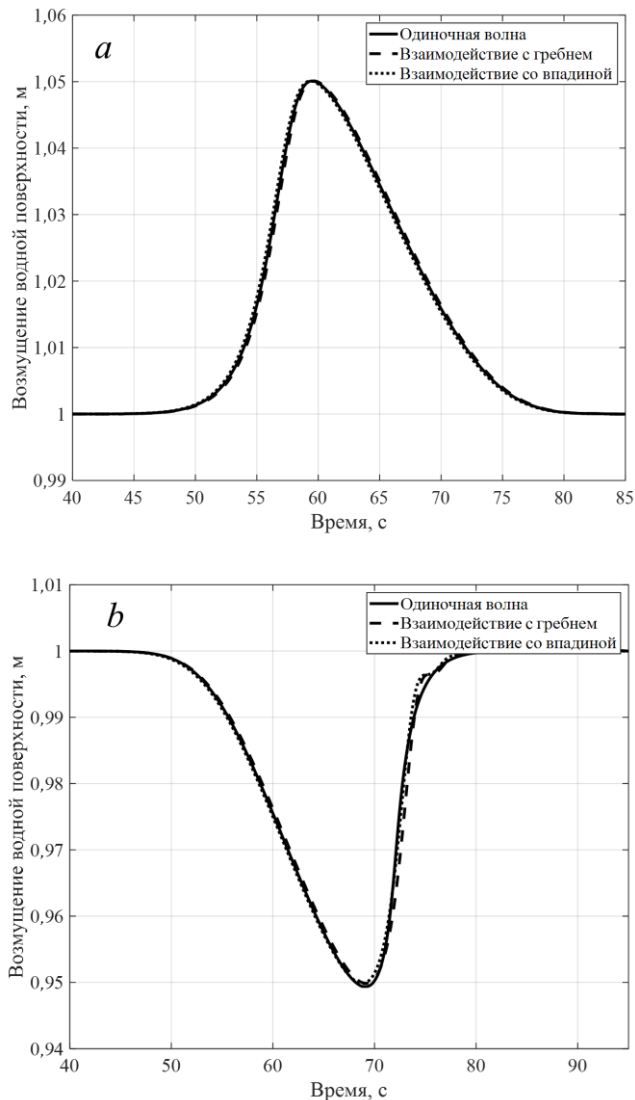
Рис. 1. Начальная форма и расположение импульсов

Fig. 1. Initial form and location of pulses

Взаимодействие волн малой амплитуды

При малой амплитуде волн (0,1 м) каждый импульс распадается на два импульса с половинной амплитудой, как это следует из линейной теории. Нелинейные эффекты являются очень слабыми, однако они за большое время приводят к искажению профиля волны (рис. 2).

Дисперсия почти не сказывается на таких расстояниях, поскольку задана достаточно длинная волна. Фазовые сдвиги достаточно слабые, так что их можно игнорировать. Между тем динамика положительного и отрицательного импульса происходит по-разному уже в пределах малой амплитуды. Как известно [22], нелинейность больше во впадине (где полная глубина меньше), чем на гребне. Поэтому гребень волны деформировался более слабо, чем подошва (рис. 2, а), в которой уже начинают проявляться осцилляции, обусловленные дисперсией.

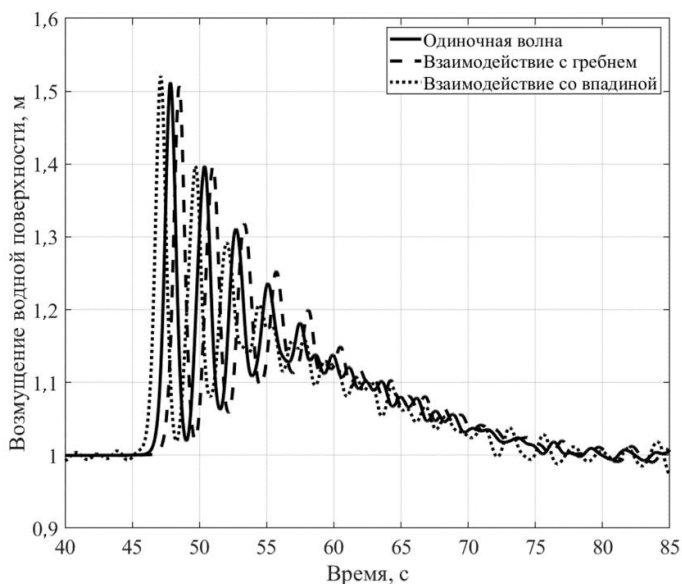


Р и с. 2. Осциллограмма волны в точке $x = 300$ м с начальной амплитудой 0,1 м при положительной (a) и отрицательной (b) полярности
F i g. 2. The wave oscillogram at point $x = 300$ m with the initial amplitude 0.1 m at the positive (a) and negative (b) polarity

Взаимодействие волн умеренной амплитуды

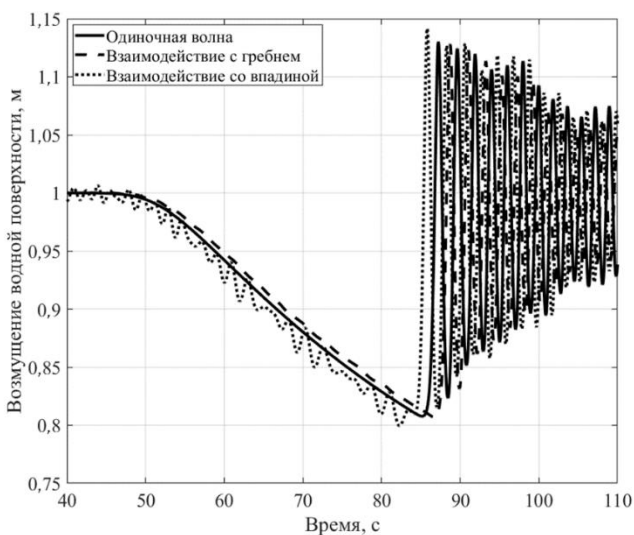
В этом эксперименте амплитуда начальных импульсов составила 0,6 м, т. е. взаимодействие происходило между двумя падающими импульсами с амплитудой, вдвое меньшей начальной. Если не учитывать дисперсию (т. е. работать в рамках нелинейной теории мелкой воды), то нелинейность приведет к образованию ударной волны и ее амплитуда будет уменьшаться. Взаимодействие ударных волн в таком случае происходит неупруго, и становятся заметными фазовые сдвиги, которые «затормаживают» падающий импульс при взаимодействии с гребнем и «ускоряют» его при взаимодействии со впадиной.

Все эти эффекты были изучены нами ранее в рамках бездисперсионной модели [22]. Дисперсионная модель показывает новые эффекты, заключающиеся в появлении больших осцилляций на теле основной волны, когда формируется так называемый ундулярный бор (рис. 3, 4) [23, 24].



Р и с. 3. Осциллограмма волны положительной полярности в точке $x = 300$ м при начальной амплитуде 0,6 м

F i g. 3. The wave oscillogram of the positive polarity at point $x = 300$ m with the initial amplitude 0.6 m



Р и с. 4. Осциллограмма волны отрицательной полярности в точке $x = 300$ м при начальной амплитуде 0,6 м

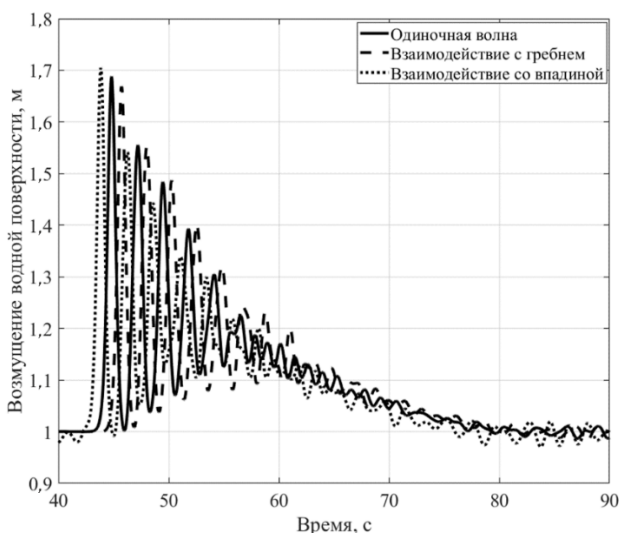
F i g. 4. The wave oscillogram of the negative polarity at point $x = 300$ m with the initial amplitude 0.6 m

На рис. 3 продемонстрированы сценарии взаимодействия падающей волны положительной полярности со встречными волнами. Здесь амплитуды главной волны в точке $x = 300$ м составили чуть более 0,5 м (0,53 м – для сценария взаимодействия со впадиной, 0,52 м – для сценария без взаимодействия, 0,51 м – для сценария с гребнем). Разница в амплитуде здесь вызвана наличием нелинейных осцилляций, остающихся в хвосте встречной волны. Фазовый сдвиг на рис. 3 составляет 0,7 с.

На рис. 4 показаны три сценария взаимодействия падающей волны отрицательной полярности со встречными волнами. Здесь, как и в предыдущем случае, видна небольшая разница в амплитудах и одновременно более отчетливо проявляются осцилляции в хвосте встречной впадины (рис. 4, пунктир до момента времени 80 с). В данном случае фазовый сдвиг между сценариями составляет 1,5 с, а амплитуда впадины во всех трех сценариях равна $\sim 0,19$ м.

Взаимодействие волн большой амплитуды

В этом случае (амплитуда начального импульса равна 0,9 м) нелинейные и дисперсионные эффекты становятся определяющими и заметны уже в начале численного эксперимента. Здесь процесс распада волны на солитоны происходит значительно быстрее (рис. 5, 6).

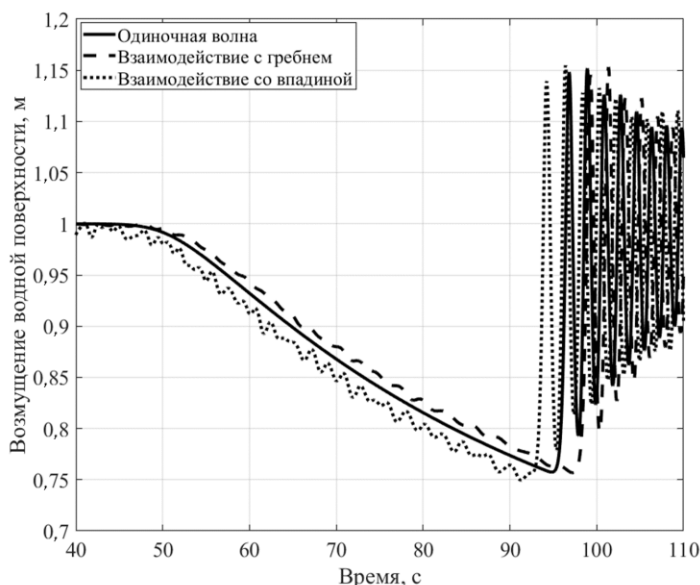


Р и с. 5. Оциллограмма волны положительной полярности в точке $x = 300$ м при начальной амплитуде 0,9 м

F i g. 5. The wave oscillogram positive polarity at point $x = 300$ m with the initial amplitude 0.9 m

Если же говорить о фазовых сдвигах при взаимодействии волн, то они оказываются качественно такими же, как и в ранее рассмотренных сценариях. Отметим, что, как и в предыдущем случае, при отрицательной полярности за импульсом «тянется» дисперсионный хвост, который оказывается впереди фронта головной волны, что и наблюдается в точке $x = 300$ м до прихода падающей волны (рис. 6). Также видны изменения в амплитудах второго и после-

дующих солитонов. В сценарии взаимодействия с гребнем амплитуды солитонов, следующих за главным импульсом, больше, чем в сценарии без взаимодействия (рис. 5), а при взаимодействии со впадиной – наоборот, меньше (рис. 6). Фазовый сдвиг для таких сценариев составил 1 с по сравнению со сценарием без взаимодействия.



Р и с. 6. Оциллограмма волны отрицательной полярности в точке $x = 300$ м при начальной амплитуде 0,9 м

F i g. 6. The wave oscillogram of the negative polarity at point $x = 300$ m with the initial amplitude 0.9 m

При взаимодействии с импульсом падающей волны отрицательной полярности (рис. 6) влияние нелинейного дисперсионного хвоста, следующего за впадиной, отражается на записи мареографа к моменту прихода данной волны (40 с от начала эксперимента). Амплитуды этих импульсов составляют $\sim 0,25$ м, при этом фазовый сдвиг равен 2,2 с.

Заключение

В данной работе рассмотрены шесть различных сценариев распространения и встречного взаимодействия импульсов различной полярности в рамках уравнений типа Буссинеска с учетом дисперсионных эффектов. Результаты приведены для трех различных амплитуд начального импульса: 0,1, 0,6 и 0,9 м.

В первых двух сценариях задается одиночный импульс, который со временем распадается на две симметричные волны, бегущие в противоположных направлениях; в третьем и четвертом сценариях падающий импульс взаимодействует с волной положительной полярности (гребень), бегущей в обратную сторону и образованной в результате распада импульса идентичной формы и амплитуды; в пятом и шестом сценариях выполняется аналогичное взаимодействие с волновой впадиной.

Взаимодействие падающего гребня малой амплитуды с импульсами различной полярности сопровождается малыми фазовыми сдвигами (0,2 с). Взаимодействие падающей волны отрицательной полярности с гребнем и впадиной в этом случае в силу большей нелинейности приводит к появлению дисперсионных эффектов, наблюдаемых в хвосте основной волны. Фазовые сдвиги здесь также малы.

При увеличении амплитуды сильнее проявляются эффекты дисперсии, особенно для падающей волны отрицательной полярности. Фазовые сдвиги также увеличиваются. Так, для падающих волн при амплитуде 0,6 м и положительной полярности фазовый сдвиг составляет 0,7 с по сравнению со сценарием без взаимодействия, а при начальной амплитуде 0,9 м он равен 1 с.

Наиболее сильно нелинейное взаимодействие проявляется для волн отрицательной полярности, поскольку возрастает отношение амплитуды волны к локальной глубине. В сценарии с падающей волной отрицательной полярности при начальной амплитуде импульса 0,5 м фазовые сдвиги составляют 1,5 с по сравнению со сценарием взаимодействия, а при амплитуде 0,9 м они равны 2,2 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Д. Д.* Волны на воде. М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 618 с.
2. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М. : Мир, 1981. 598 с.
3. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 1974. 636 p.
4. *Tinti S., Tonini R.* Analytical evolution of tsunamis induced by near-shore earthquakes on a constant-slope ocean // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 535. P. 33–64. doi:10.1017/S0022112005004532
5. The GeoClaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement / M. J. Berger [et al.] // *Advances in Water Resources*. 2011. Vol. 34, iss. 9. P. 1195–1206. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.02.016>
6. *Пелиновский Е. Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 1996. 273 с.
7. *Пелиновский Е. Н.* Нелинейно-дисперсионная теория волн цунами: взгляд после катастрофического цунами в Индийском океане // *Нелинейные волны* ' 2006. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2007. С. 393–407.
8. Dispersion of tsunamis: does it really matter? / S. Glimsdal [et al.] // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2013. Vol. 13, iss. 6. P. 1507–1526. <https://doi.org/10.5194/nhess-13-1507-2013>
9. *Green A. E., Naghdi P. M.* A Derivation of Equations for Wave Propagation in Water of Variable Depth // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 78. P. 237–246. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112076002425>
10. Донное давление, вызванное прохождением уединенной волны в рамках сильно нелинейной модели Грина–Нагди / Е. Н. Пелиновский [и др.] // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 461, № 4. С. 414–417. doi:10.7868/S0869565215100114
11. *Peregrine D. H.* Calculations of the development of an undular bore // *Journal of Fluid Mechanics*. 1966. Vol. 25, iss. 2. P. 321–330. doi:10.1017/S0022112066001678
12. *Madsen P. A., Bingham H. B., Schaffer H. A.* Boussinesq-type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis // *Proceedings of the Royal Society of London*. 2003. Vol. 459, iss. 2033. P. 1075–1104. <https://doi.org/10.1098/rspa.2002.1067>
13. *Brocchini M.* A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics // *Proceedings of Royal Society A*. 2013. Vol. 469, iss. 2160. 20130496. <https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0496>
14. Non-hydrostatic, Non-linear processes in the Surf Zone / K. Martins [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2020. Vol. 125, iss. 2. e2019JC015521. doi:10.1029/2019JC015521

15. Numerical tsunami model NAMI-DANCE / A. Zaytsev [et al.] // *Science of Tsunami Hazards*. 2019. Vol. 38, iss. 4. P. 151–168.
16. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) // *Nonlinearity*. 2011. Vol. 24, no. 3. R1. doi:10.1088/0951-7715/24/3/R01
17. *Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A.* Nonlinear interaction of large-amplitude unidirectional waves in shallow water // *Estonian Journal of Engineering*. 2011. Vol. 17, iss. 4. P. 289–300. doi:10.3176/eng.2011.4.02
18. *Cooker M. J., Weidman P. D. Bale D. S.* Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. Vol. 342. P. 141–158. doi:10.1017/S002211209700551X
19. *Chambarel J., Kharif C., Touboul J.* Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2009. Vol. 16, iss. 1. P. 111–122. <https://doi.org/10.5194/npg-16-111-2009>
20. A Boussinesq type extension of the GeoClaw model – study of wave breaking phenomena applying dispersive long wave models / J. Kim [et al.] // *Coastal Engineering*. 2017. Vol. 122. P. 75–86. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2017.01.005>
21. *Courant R., Friedrichs K. O.* *Supersonic Flow and Shock Waves*. New-York : Interscience Publishers, Inc., 1948. 464 p.
22. *Пелиновский Е. Н., Родин А. А.* Трансформация сильно нелинейной волны в мелководном бассейне // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48, № 3. С. 383–390.
23. Comparative analysis of bore propagation over long distances using conventional linear and KdV-based nonlinear Fourier transform / M. Brühl [et al.] // *Wave Motion* 2022. Vol. 111. 102905. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2022.102905>
24. Влияние нелинейного взаимодействия на эволюцию волн в мелководном бассейне / А. А. Родин [и др.] // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55, № 4. С. 82–86. doi:10.31857/S0002-351555482-86

Об авторах:

Родин Артем Александрович, ведущий инженер, РНОЦ ТМ, ФГБОУ ВПО Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-6159-6077**, xmrrarro@gmail.com

Родина Наталья Александровна, доцент, Институт экономики и предпринимательства, ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат психологических наук, **ORCID ID: 0000-0002-6046-3942**, na4aikovskaya@mail.ru

Трусова Анна Юрьевна, доцент, Высшая школа лингвистики, педагогики и психологии, ФГБОУ ВПО Нижегородский государственный лингвистический университет им. Н. А. Добролюбова (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 31а), кандидат филологических наук, **ORCID ID: 0000-0002-5619-4962**, autrusova@lunn.ru

Пелиновский Ефим Наумович, главный научный сотрудник, отдел нелинейных геофизических процессов, ФГБНУ Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID ID: 0000-0002-5092-0302**, pelinovsky@gmail.com