

# АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОКЕАНА

Научная статья

УДК 51.37  
EDN: RUBXPZ

DOI: 10.29039/0233-7584-2023-3-299-313

## Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости

В. С. Кочергин<sup>1</sup>, ✉, С. В. Кочергин<sup>1</sup>, С. Н. Скляр<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

<sup>2</sup> *Американский университет в Центральной Азии, Бишкек. Киргизская Республика*  
✉ [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

Поступила в редакцию 04.04.2022; одобрена после рецензирования 09.01.2023;  
принята к публикации 09.03.2023.

### Аннотация

**Цель.** Целью работы является построение эффективного численного метода решения задачи для функции тока и последующего определения компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости в водоеме. Проведен анализ эффективности и проиллюстрирована работа предлагаемых разностных аппроксимаций на классе тестовых задач с известными аналитическими решениями.

**Методы и результаты.** Построение разностной схемы и соответствующего вычислительного алгоритма осуществляется на основе проекционного варианта интегро-интерполяционного метода, позволяющего в рамках единого подхода решать задачу для функции тока и вычислять ее производные с последующим определением горизонтальных компонент полного потока.

**Выводы.** Используемый в работе метод дискретизации позволяет автоматически сохранять наиболее важные свойства исходной дифференциальной модели при переходе к ее дискретному аналогу. В частности, с его помощью удается правильно воспроизвести поведение производных от функции тока, а значит, и поведение горизонтальных компонент полного потока в областях его наибольшей интенсивности.

**Ключевые слова:** ветровые течения, функция тока, компонента полного потока, сингулярно возмущенная задача, аналитическое решение, разностная схема

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей».

**Для цитирования:** *Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н.* Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости // Морской гидрофизический журнал. 2023. Т. 39, № 3. С. 299–313. EDN RUBXPZ. doi:10.29039/0233-7584-2023-3-299-313

## Calculation of the Total Flow Components in the Models of Wind Fluid Motion

V. S. Kochergin <sup>1,✉</sup>, S. V. Kochergin <sup>1</sup>, S. N. Sklyar <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia

<sup>2</sup> American University in Central Asia, Bishkek, Kyrgyz Republic

✉ vskocher@gmail.com

### Abstract

*Purpose.* The object of the work is to construct an effective numerical method to solve the problem for a stream function and to determine subsequently the total flow components in the models of fluid wind motion in a reservoir. Its efficiency was analyzed, and the work of the proposed difference approximations was illustrated using a class of test problems with the known analytical solutions.

*Methods and Results.* The difference scheme and the corresponding computational algorithm were constructed based on the projection variant of the integro-interpolation method, which permitted (within a single approach) to solve the problem for the stream function, to calculate its derivatives, and to determine subsequently the total flow horizontal components.

*Conclusions.* The used discretization method permits to preserve automatically the most important features of the initial differential model at switching to its discrete analog. In particular, its application makes it possible to reproduce correctly the behavior of the stream function derivatives, and hence, the behavior of the total flow horizontal components in the areas of its highest intensity.

**Keywords:** wind currents, stream function, total flow component, singularly perturbed problem, analytical solution, difference scheme

**Acknowledgements:** The study was carried out within the framework of the state assignment on theme FNNN-2021-0005 "Complex interdisciplinary studies of oceanological processes which determine functioning and evolution of the ecosystems of coastal zones of the Black and Azov seas".

**For citation:** Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. and Sklyar, S.N., 2023. Calculation of the Total Flow Components in the Models of Wind Fluid Motion. *Physical Oceanography*, 30(3), pp. 274-287. doi:10.29039/1573-160X-2023-3-274-287

### Введение

При решении многих задач гидротермодинамики используются специальные интегральные функции. В частности, при моделировании динамики жидкости в водоеме <sup>1</sup> обычно применяют интегральную функцию тока или уровенную поверхность. Соответствующие задачи относятся к классу сингулярно возмущенных [1] и могут формировать области с большими градиентами решений – так называемые пограничные <sup>2</sup> или внутренние переходные слои. Известно, что в этих задачах существуют повышенные требования к разностным схемам, осуществляющим их численную реализацию [2]. Дополнительные трудности возникают, когда требуется вычислять производные от решения сингулярно возмущенной краевой задачи, а именно это необходимо делать при определении горизонтальных компонент полного потока.

---

<sup>1</sup> Марчук Г. И., Саркисян А. С. Математическое моделирование циркуляции океана. Москва : Наука, 1988. 302 с.

<sup>2</sup> Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. : Наука, 1973. 272 с.

Все вышесказанное обуславливает актуальность решаемой задачи. Данные проблемы удается решить, если использовать специальные методы дискретизации, позволяющие автоматически сохранять наиболее важные свойства при переходе от исходной дифференциальной модели к ее дискретному аналогу. Реализации одного из таких методов посвящена данная работа. Сравнение численного решения с имеющимся точным аналитическим аналогом позволяет судить о точности используемого алгоритма. Используемый в работе метод дискретизации позволил правильно воспроизвести поведение производных от функции тока, а значит, и горизонтальных компонент полного потока.

### Постановка задачи

Построение вычислительного алгоритма проведем для упрощенной трехмерной стационарной модели ветровых течений жидкости в водоеме. Жидкость предполагается однородной, в модели отсутствуют механизмы адвекции и горизонтальной диффузии. Подобные модели принадлежат к классу моделей Экмановского типа [3] и используются в первом приближении для описания картины течений в водоемах различной природы. Кроме того, если в таких моделях удастся отыскать классы аналитических решений, то их удобно использовать для тестирования численных методов и соответствующих алгоритмов, применяемых при решении общих задач гидродинамики водоемов.

Будем считать, что задача рассматривается в безразмерной постановке. Предположим, что поверхность водоема в плоскости  $xu$  имеет форму прямоугольника:

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q], \quad (1)$$

его глубина  $H > 0$  постоянна, ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  – на север, ось  $z$  – вертикально вниз. В трехмерной области

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\} \quad (2)$$

рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -lv = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ lu = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega}, \quad (3)$$

дополнив ее краевыми условиями

$$\begin{cases} \left\{ z = 0, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\}: & k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, w = 0, \\ \left\{ z = H, (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0 \right\}: & k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, w = 0, \\ \left\{ 0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial \Omega_0 \right\}: & Un_x + Vn_y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В (4) присутствуют горизонтальные компоненты полного потока

$$U(x, y) = \int_0^H u(x, y, z) dz, \quad V(x, y) = \int_0^H v(x, y, z) dz \quad (5)$$

и принимается следующий вариант параметризации придонного трения:

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (6)$$

В соответствии с работами Стоммела [4, 5] предположим

$$l = l_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const} > 0. \quad (7)$$

Компоненты касательного напряжения трения ветра будем задавать формулами

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y), \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \end{cases} \quad (8)$$

в которых приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} r_l = \frac{\pi l}{r}, \quad r_s = \frac{\pi s}{r}, \quad q_m = \frac{\pi m}{q}, \quad q_p = \frac{\pi p}{q}, \\ l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, модель ветра содержит четыре вещественных ( $F_1, F_2, G_1, G_2$ ) и четыре целых ( $l, m, s, p$ ) числовых параметра, выбор которых дает возможность описать достаточно общую ветровую ситуацию. Более того, для описания компонент касательного напряжения трения ветра можно использовать линейную комбинацию выражений (8), а решение задачи находить как линейную комбинацию соответствующих «элементарных» решений. Заметим, что Стоммел использовал модель ветра вида

$$\tau_x = -F \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right), \quad \tau_y = 0, \quad (10)$$

которая получается из выражений (8), (9) при

$$F_1 = -F, \quad F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad l = 0, \quad m = 1.$$

В работах [6, 7] найдены аналитические решения задачи (1) – (7), (10). В [8] получены аналитические выражения для потоков из соотношения (5) в задаче (1) – (9), учитывающей общую ветровую ситуацию. Эти аналитические решения мы и используем в данной работе для тестирования предлагаемых вычислительных алгоритмов. Преобразуем задачу (1) – (9): проинтегрируем каждое уравнение в формуле (3) по переменной  $z$  в пределах от 0 до  $H$ , учитывая при этом краевые условия (4); затем из полученных уравнений исключим градиенты давления, используя операцию перекрестного дифференцирования. В итоге придем к следующей задаче для определения функций  $U(x, y), V(x, y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \beta V = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \\ Un_x + Vn_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Для ее решения введем интегральную функцию тока  $\Psi(x, y)$  по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (12)$$

Подставим (12) в (11) и, обозначив

$$f(x, y) \equiv \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, \quad (13)$$

получим следующую задачу для определения  $\Psi(x, y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = f(x, y), \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0, \\ \Psi = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{array} \right. \quad (14)$$

#### Численный метод решения задачи (12) – (14)

Для его построения используем проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ), который предложен в [9] и исследован в [10]. Эта методика позволяет в рамках единого подхода построить разностную схему для численного решения задачи (14) и получить формулы для аппроксимации производных от этого решения. Последнее необходимо для вычисления  $U$  и  $V$  по формулам (12). Отметим также работы [11–13], в которых решалась подобная задача.

В области  $\Omega_0$  рассмотрим вычислительную сетку

$$\omega_h \equiv \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = (i-1)\Delta x, \quad y_j = (j-1)\Delta y, \right. \\ \left. i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \quad \Delta x = \frac{r}{n-1}, \quad \Delta y = \frac{q}{k-1} \right\}. \quad (15)$$

Пусть сеточная функция  $\{\Psi_{i,j}\}$ , определенная на этой сетке, состоит из приближенных значений для величин  $\{\Psi(x_i, y_j)\}$  – точного решения задачи (14). Методику ПВИИМ применим в рамках последовательной аппроксимации дифференциального уравнения из выражения (14): сначала по переменной  $x$ , затем по переменной  $y$ . Уравнение (14) перепишем в виде

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = f(x, y) - \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \equiv g(x, y). \quad (16)$$

В соответствии с ПВИИМ на произвольной сеточной ячейке  $[x_i, x_{i+1}]$  рассмотрим тестовую функцию  $\lambda(x)$ , уравнение (16) умножим на  $\lambda(x)$  и результат проинтегрируем по ячейке  $[x_i, x_{i+1}]$ , в том числе и по частям (переменную  $y$  при этом воспринимаем как параметр), в результате получим следующее интегро-разностное тождество:

$$\left[ \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x} \lambda + \Psi \left( \beta \lambda - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi \left( \mu \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x, y) \lambda(x) dx. \quad (17)$$

Осуществим выбор тестовых функций  $\lambda^{(0)}(x)$  и  $\lambda^{(1)}(x)$  в тождестве (17), считая, что они являются решениями уравнения

$$\mu \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}),$$

но при этом удовлетворяют различным краевым условиям:

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)}(x_i) &= 1, \quad \lambda^{(0)}(x_{i+1}) = 0, \\ \lambda^{(1)}(x_i) &= 0, \quad \lambda^{(1)}(x_{i+1}) = 1. \end{aligned}$$

Такой выбор позволяет обратить в ноль интеграл в левой части тождества (17). Очевидно, что для  $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$\lambda^{(0)}(x) = \frac{e^{\beta \Delta x / \mu} - e^{\beta(x-x_i)/\mu}}{e^{\beta \Delta x / \mu} - 1}, \quad \lambda^{(1)}(x) = \frac{e^{\beta(x-x_i)/\mu} - 1}{e^{\beta \Delta x / \mu} - 1}. \quad (18)$$

Интеграл в правой части тождества (17) будем аппроксимировать, используя следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x, y) \lambda^{(0)}(x) dx &\approx g(x_i, y) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda^{(0)}(x) dx, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x, y) \lambda^{(1)}(x) dx &\approx g(x_{i+1}, y) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda^{(1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что более точные аппроксимации интегралов в (17) могут привести к более точной разностной схеме, но мы остановимся на вышеуказанных вариантах (формула (19)). Подставим  $\lambda = \lambda^{(0)}$  в тождество (17) и, используя обозначения

$$\begin{aligned} R &= \frac{\beta \Delta x}{2\mu}, \quad \theta = \theta(R) = \operatorname{ctg} R - \frac{1}{R}, \\ D_x^+ \Psi_i &= \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta x}, \quad D_x^- \Psi_i = \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta x}, \end{aligned}$$

а также необходимые вычисления, с учетом формул (18) и (19) перепишем его в виде

$$-\mu \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_i = g(x_i, y) \Delta x \frac{1 + \theta}{2}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (20)$$

После подстановки функции  $\lambda = \lambda^{(1)}$  в тождество (17) получим

$$\mu \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial x} - \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^+ \Psi_i = g(x_{i+1}, y) \Delta x \frac{1 - \theta}{2}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (21)$$

Перейдем к аппроксимации по переменной  $y$ . Учитывая, что функция  $g(x, y)$  в правых частях соотношений (20) и (21) определялась по формулам (16), перепишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} &= f(x_i, y) + \frac{2}{\Delta x(1 + \theta)} \left\{ \mu \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_i \right\} \equiv \\ &\equiv P(y), \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \Psi_{i+1}}{\partial y^2} &= f(x_{i+1}, y) + \frac{2}{\Delta x(1 - \theta)} \left\{ -\mu \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial x} + \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^+ \Psi_i \right\} \equiv \\ &\equiv Q(y), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая ПВИИМ для уравнения (22), перепишем его для произвольной сеточной ячейки  $[y_j, y_{j+1}]$ :

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} = P(y), \quad y \in [y_j, y_{j+1}]. \quad (24)$$

Аналог интегро-разностного тождества (17) для уравнения (24) будет выглядеть следующим образом:

$$\left[ \mu \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \eta - \Psi_i \mu \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{y_j}^{y_{j+1}} + \int_{y_j}^{y_{j+1}} \Psi_i \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} P(y) \eta(y) dy. \quad (25)$$

Тестовые функции  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$  будем считать решениями задач

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0, \quad y \in (y_j, y_{j+1}), \\ \eta^{(0)}(y_j) &= 1, \quad \eta^{(0)}(y_{j+1}) = 0, \\ \eta^{(1)}(y_j) &= 0, \quad \eta^{(1)}(y_{j+1}) = 1. \end{aligned}$$

Легко найти эти функции:

$$\eta^{(0)}(y) = \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y}, \quad \eta^{(1)}(y) = \frac{y - y_j}{\Delta y}. \quad (26)$$

Подставляем тестовые функции (26) в тождество (25) и используем аппроксимации интегралов в правой части выражения (25), подобные аппроксимациям из формул (19):

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} P(y)\eta^{(0)}(y)dy \approx P(y_j) \int_{y_j}^{y_{j+1}} \eta^{(0)}(y)dy,$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} P(y)\eta^{(1)}(y)dy \approx P(y_{j+1}) \int_{y_j}^{y_{j+1}} \eta^{(1)}(y)dy,$$

а также обозначения

$$D_y^+\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta y}, \quad D_y^-\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1}}{\Delta y},$$

в результате получим конечно-разностные соотношения

$$-\mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} + \mu D_y^+\Psi_{i,j} = P(y_j) \frac{\Delta y}{2}, \quad j = \overline{1, k-1}, \quad (27)$$

$$\mu \frac{\partial \Psi_{i,j+1}}{\partial y} - \mu D_y^+\Psi_{i,j} = P(y_{j+1}) \frac{\Delta y}{2}, \quad j = \overline{1, k-1}. \quad (28)$$

Используя формулу (22), из выражений (27) и (28) получим следующие соотношения ( $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1+\theta}{2\Delta y} \left[ \mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} - \mu D_y^+\Psi_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_i, y_j) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ -\mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} + \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+\Psi_{i,j} \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\theta}{2\Delta y} \left[ -\mu \frac{\partial \Psi_{i,j+1}}{\partial y} + \mu D_y^+\Psi_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_i, y_{j+1}) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ -\mu \frac{\partial \Psi_{i,j+1}}{\partial x} + \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+\Psi_{i,j+1} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогичные рассуждения проведем для соотношений (23). В результате получим еще одну группу соотношений ( $i = \overline{1, n-1}$ ;  $j = \overline{1, k-1}$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1-\theta}{2\Delta y} \left[ \mu \frac{\partial \Psi_{i+1,j}}{\partial y} - \mu D_y^+\Psi_{i+1,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_{i+1}, y_j) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \mu \frac{\partial \Psi_{i+1,j}}{\partial x} - \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^+\Psi_{i,j} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$



$$\begin{aligned} & \frac{1-\theta}{2\Delta y} \left[ -\mu \frac{\partial \Psi_{i+1,j+1}}{\partial y} + \mu D_y^+ \Psi_{i+1,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_{i+1}, y_{j+1}) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \mu \frac{\partial \Psi_{i+1,j+1}}{\partial x} - \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^+ \Psi_{i,j+1} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Соотношения (29) – (32), записанные для произвольной сеточной ячейки  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ , дают полную информацию, необходимую для построения аппроксимаций как уравнения, так и всех необходимых производных в задаче (12) – (14). Действительно, в формуле (30) проведем замену индекса  $j$  на  $j - 1$ , это можно сделать во внутренних узлах сетки, затем результат сложим с уравнением (29), в итоге исключим производную  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1+\theta}{2} \left[ -\frac{\mu}{\Delta y} (D_y^+ \Psi_{i,j} - D_y^- \Psi_{i,j}) + f(x_i, y_j) \right] = \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left\{ -\mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} + \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_{i,j} \right\}. \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет получить аппроксимацию производной  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$ , которую можно использовать во внутренних узлах левой вертикальной границы:

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} = [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_{i,j} + \Delta x \frac{1+\theta}{2} \left[ \frac{1}{\Delta y} (D_y^+ \Psi_{i,j} - D_y^- \Psi_{i,j}) - \frac{1}{\mu} f(x_i, y_j) \right]. \quad (33)$$

Аналогично в (31) заменим индекс  $i$  на  $i - 1$ , а в формуле (32) заменим  $i$  на  $i - 1$  и  $j$  на  $j - 1$ . Полученные результаты сложим, что дает нам возможность исключить производную  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y}$ :

$$\frac{1-\theta}{2} \left[ -\frac{\mu}{\Delta y} (D_y^+ \Psi_{i,j} - D_y^- \Psi_{i,j}) + f(x_i, y_j) \right] = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} - \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^- \Psi_{i,j} \right\}.$$

Из последнего выражения получим аппроксимацию производной  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$  для внутренних узлов правой вертикальной границы:

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} = [1 + R(\theta - 1)] D_x^- \Psi_{i,j} + \Delta x \frac{1-\theta}{2} \left[ \frac{1}{\mu} f(x_i, y_j) - \frac{1}{\Delta y} (D_y^+ \Psi_{i,j} - D_y^- \Psi_{i,j}) \right]. \quad (34)$$

Рассмотрим формулы (33) и (34) во внутренних узлах области, первую умножим на  $\frac{1-\theta}{2}$ , вторую – на  $\frac{1+\theta}{2}$ , результаты сложим и получим соотношение

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1-\theta}{2} [1+R(\theta+1)] D_x^+ \Psi_{i,j} + \frac{1+\theta}{2} [1+R(\theta-1)] D_x^- \Psi_{i,j}, \quad (35)$$

которое можно использовать для аппроксимации производной  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$  во внутренних узлах сеточной области. Теперь если формулу (34) вычесть из выражения (35), то мы исключим производную  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$  и получим аппроксимацию уравнения (14) во внутренних узлах сеточной области:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\Delta x} \{ [1+R(\theta+1)] D_x^+ \Psi_{i,j} - [1+R(\theta-1)] D_x^- \Psi_{i,j} \} + \\ & + \frac{\mu}{\Delta y} (D_y^+ \Psi_{i,j} - D_y^- \Psi_{i,j}) = f(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдем к построению аппроксимации для производной  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y}$ . В соотношении (30) заменим индекс  $j$  на  $j-1$ , результат вычтем из (29), в итоге получим аппроксимацию

$$\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} = \frac{1}{2} (D_y^+ \Psi_{i,j} + D_y^- \Psi_{i,j}), \quad (37)$$

которую можно использовать во внутренних узлах сеточной области. Далее в (31) заменим  $i$  на  $i-1$ , результат сложим с формулой (29), тем самым исключим производную  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$  и получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta y} \left[ \mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} - \mu D_y^+ \Psi_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_i, y_j) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \{ \mu [1+R(\theta+1)] D_x^+ \Psi_{i,j} - \mu [1+R(\theta-1)] D_x^- \Psi_{i,j} \}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения найдем формулу для внутренних узлов нижней горизонтальной границы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} & = D_y^+ \Psi_{i,j} + \frac{\Delta y}{2\Delta x} \{ [1+R(\theta+1)] D_x^+ \Psi_{i,j} - [1+R(\theta-1)] D_x^- \Psi_{i,j} \} - \\ & - \frac{\Delta y}{2\mu} f(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (38)$$

Наконец, рассмотрим формулу (30), заменим в ней индекс  $j$  на  $j-1$ , а в соотношении (32) заменим  $i$  на  $i-1$  и  $j$  на  $j-1$ . После сложения результатов получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta y} \cdot \left[ -\mu \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} + \mu D_y^- \Psi_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} f(x_i, y_{j+1}) \right] = \\ & = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \mu [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_{i,j} - \mu [1 + R(\theta - 1)] D_x^- \Psi_{i,j} \right\}. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует формула для внутренних узлов верхней горизонтальной границы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial y} = & D_y^- \Psi_{i,j} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} \left\{ [1 + R(\theta + 1)] D_x^+ \Psi_{i,j} - [1 + R(\theta - 1)] D_x^- \Psi_{i,j} \right\} + \\ & + \frac{\Delta y}{2\mu} f(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (39)$$

Численное решение задачи (12) – (14) находится по формулам (36) вместе с соответствующими краевыми условиями. Задача решается итерационно одним из известных методов [14]. Далее формулы (33) – (35) используются для вычисления производных  $\frac{\partial \Psi_{i,j}}{\partial x}$ , а формулы (37) – (39) применяются для вычисления производных. Формулы (33), (34), (38) и (39) для определения производных на границах области (при решении задачи (12) – (14) в прямоугольнике) существенно упрощаются в силу краевого условия для функции  $\Psi$ . Отметим также, что разностная схема (36) тестировалась при решении задачи (14) в работе [15] и оказалась более точной, чем известные схемы из работ<sup>3, 4</sup> и [2, 16].

### Результаты численных экспериментов

Проиллюстрируем работу предлагаемых численных методов результатами экспериментов с задачей (1), (12) – (14), в которой выбраны следующие значения основных параметров:

$$r = 11, q = 5, \mu = 0,01, \beta = 1.$$

Модельный ветер (формулы (8), (9)) определяется значениями

$$F_1 = 1, F_2 = 0, G_1 = -1, G_2 = 0, l = 0, m = 1, s = 1, p = 1,$$

при которых над акваторией формируется циклон (рис. 1).

Критерием качества вычислительного алгоритма служила относительная погрешность

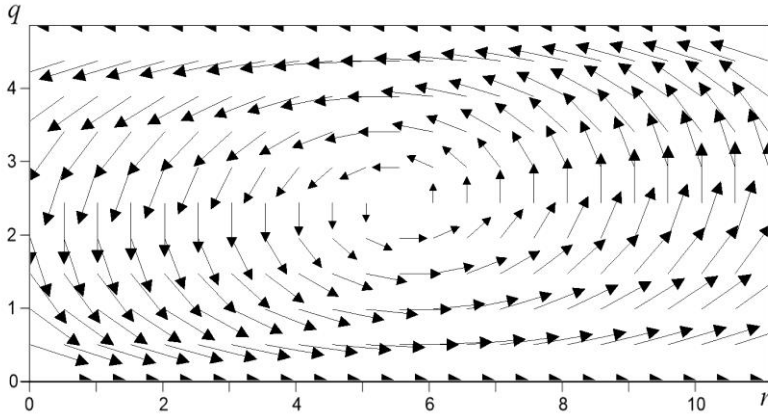
$$Er(\Phi) = \frac{\|\Phi - \bar{\Phi}\|_{\infty}}{\|\bar{\Phi}\|_{\infty}} \cdot 100 (\%),$$

которая вычислялась в сеточной норме

$$\|\bar{\Phi}\|_{\infty} = \max_{\omega_h} |\bar{\Phi}|.$$

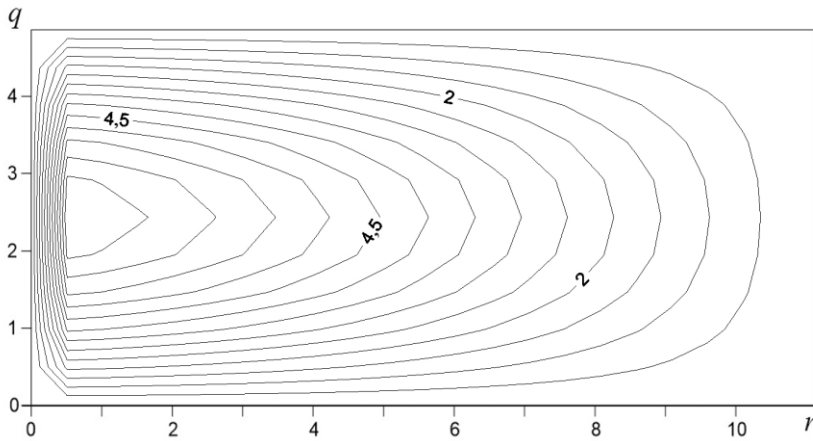
<sup>3</sup> Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1983. 616 с.

<sup>4</sup> Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М. : Наука, 1983. 344 с.



**Р и с. 1.** Циклоническое поле ветра  
**Fig. 1.** Cyclonic wind field

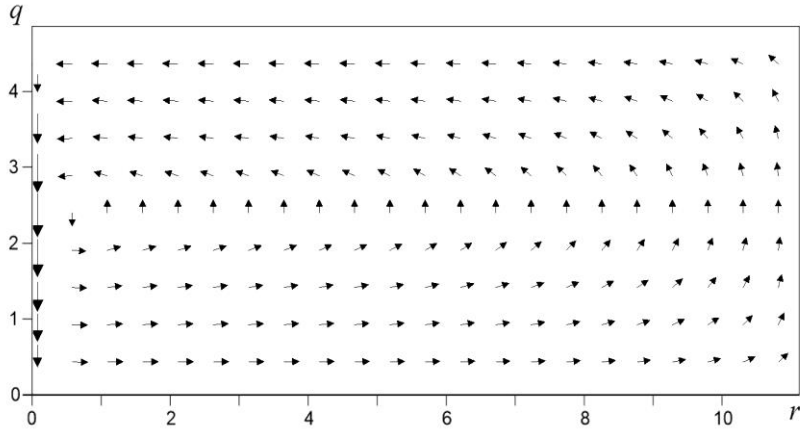
Здесь  $\bar{\Phi}$  – спроектированное на сетку  $\omega_h$  точное решение задачи (в данном случае найденное по формулам работы [8]);  $\Phi$  – приближенное решение этой же задачи, вычисленное при помощи соответствующего алгоритма. Пусть  $\Psi, U, V$  – решение задачи (1), (12) – (14), найденное методом, представленным выше. На рис. 2 показано аналитическое поле функции тока, которое визуально практически не отличается от найденного численно [15].



**Р и с. 2.** Функция тока при заданных параметрах  
**Fig. 2.** Stream function for the given parameters

На рис. 3 приведено аналитическое поле полных потоков, полученное на основе формул из работы [8].

Представленное поле характеризуется интенсивным пограничным слоем у левой границы. Вычисленное поле с использованием выражения (36) визуально практически не отличается от изображенного на рис. 3, поэтому оно в работе не приводится. О точности расчетов в этом случае целесообразно судить по значениям относительной погрешности.



**Р и с. 3.** Аналитическое поле полных потоков

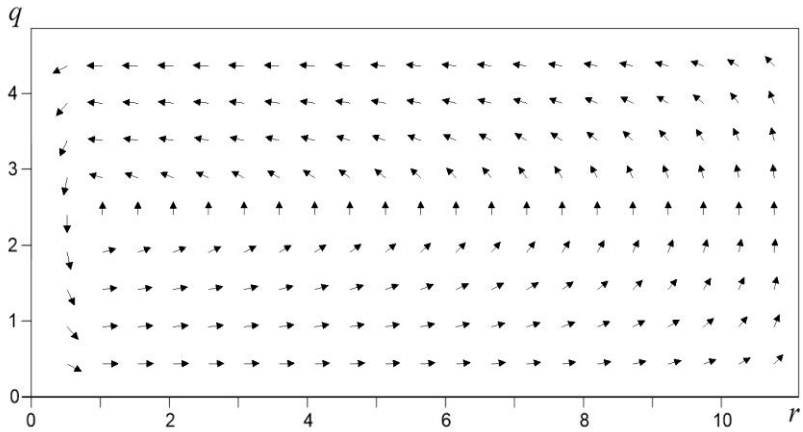
**F i g. 3.** Analytical field of the total flows

При расчете полных потоков  $\tilde{U}, \tilde{V}$  по стандартным формулам

$$\tilde{U}_{i,1} = D_y^+ \Psi_{i,1}, \quad \tilde{U}_{i,j} = \frac{1}{2} (D_y^+ \Psi_{i,j} + D_y^- \Psi_{i,j}), \quad j = \overline{2, k-1}, \quad \tilde{U}_{i,k} = D_y^- \Psi_{i,k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (40)$$

$$\tilde{V}_{1,j} = -D_x^+ \Psi_{1,j}, \quad \tilde{V}_{i,j} = -\frac{1}{2} (D_x^+ \Psi_{i,j} + D_x^- \Psi_{i,j}), \quad i = \overline{2, n-1}; \quad \tilde{V}_{n,j} = -D_x^- \Psi_{n,j}, \quad j = \overline{1, k} \quad (41)$$

получается поле, изображенное на рис. 4.



**Р и с. 4.** Поле полных потоков, вычисленное по формулам (40), (41)

**F i g. 4.** Field of the total flows calculated by formulas (40) and (41)

После решения задачи (14) для функции тока при помощи формулы (36)  $U$  и  $V$  определялись двумя способами: методом, описанным выше, и при помощи формул (40), (41). Величины соответствующих погрешностей, вычисленные на сетках с различным числом узлов, приведены в таблице. Значения относительных погрешностей  $Er(\Psi)$  указывают на сходимость итерационной процедуры.

ционного процесса вследствие сравнения получаемых результатов с точным решением. Легко проверить, что величины  $U$ , полученные с использованием формул (37) – (39), и величины  $\tilde{U}$ , вычисленные в соответствии с формулой (40), совпадают, поэтому погрешности  $Er(\tilde{U})$  в таблице мы не приводим.

**Значения погрешности при увеличении числа узлов сетки**  
**Error values at increase in the number of grid nodes**

Число узлов сетки / Number of grid nodes	$Er(\Psi)$	$Er(U)$	$Er(V)$	$Er(\tilde{V})$
23×11	0,64259	1,06010	0,05480	98,0685
51×23	0,26472	0,22237	0,02779	95,5197
111×51	0,10534	0,07869	0,01187	90,0591
221×101	0,04036	0,03189	0,00471	80,2305
441×201	0,01247	0,01018	0,00148	63,8351

**Заключение**

Как показали результаты численных экспериментов, даже при достаточно точном решении задачи для функции тока вычисление горизонтальных компонент полного потока может оказаться неэффективным, если не учитывать специфику задачи. Используемые алгоритмы дают достаточно хорошую точность воспроизведения решения уравнения для функции тока. На мелкой сетке ошибка составляет сотые доли процента в используемой норме. Предлагаемая в данной работе методика позволяет в рамках единого подхода решать задачу для функции тока и вычислять производные от этого решения, что гарантирует точность определения горизонтальных компонент полного потока. Результаты работы могут быть использованы при моделировании динамических процессов в море.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *O'Malley Jr. R. E.* Introduction to Singular Perturbations. New York : Academic Press, 1974. 206 p.
2. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. Москва : Мир, 1980. 616 с.
3. *Ekman V. W.* On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1905. Band 2, no 11. P. 1–53.
4. *Stommel H.* The westward intensification of wind-driven ocean currents // EOS, Transactions, American Geophysical Union. 1948. Vol. 29, iss. 2. P. 202–206. doi:10.1029/TR029i002p00202
5. *Stommel H.* The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description. Berkeley and Los Angeles, USA : University of California Press, 1965. 243 p.
6. *Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N.* Analytical Test Problem of Wind Currents // Processes in GeoMedia / Ed. T. Chaplina. Cham : Springer Geology, 2020. Vol. I. P. 17–25. doi:10.1007/978-3-030-38177-6\_3

7. *Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N.* Analytical Solution of the Test Three-Dimensional Problem of Wind Flows // *Processes in GeoMedia* / Ed. T. Chaplina. Cham : Springer Geology, 2021. Vol. II. P. 65–71. doi:10.1007/978-3-030-53521-6\_9
8. *Кочергин В. С., Кочергин С. В., Скляр С. Н.* Аналитическое решение уравнения для функции тока в модели течений с переменным по пространству ветровым воздействием // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2022. Т. 19, № 1. С. 16–24. <https://doi.org/10.31429/vestnik-19-1-16-25>
9. *Sklyar S. N.* A projective version of the integral-interpolation method and its application for the discretization of the singular perturbation problems // *Advanced Mathematics, Computations and Applications : Proceedings of the International Conference AMCA-95* / Eds. A. S. Alekseev, N. A. Bakhvalov. Novosibirsk : NCC Publisher, 1995. P. 380–385.
10. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов / В. Н. Еремеев [и др.]. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. 238 с.
11. *Кочергин В. П., Скляр С. Н., Султанов П. К.* К вопросу о численном моделировании гидротермодинамических задач океана // *Морской гидрофизический журнал*. 1990. № 2. С. 10–18.
12. *Кочергин В. П., Скляр С. Н., Султанов П. К.* О вычислении баротропных составляющих движения в моделях общей циркуляции океана // *Морской гидрофизический журнал*. 1994. № 1. С. 20–25.
13. *Кочергин В. П., Дунец Т. В.* Вычислительный алгоритм для определения наклонов уровня в задачах динамики водоемов // *Морской гидрофизический журнал*. 1999. № 3. С. 20–28.
14. *Ильин В. П.* Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813. <https://doi.org/10.31857/S0044466921110090>
15. *Kochergin V. S., Kochergin S. V., Sklyar S. N.* Testing of Numerical Methods for Solving the Stream Function Problem in a Model of Stationary Fluid Motion // *Processes in GeoMedia* / Ed. T. Chaplina. Cham : Springer Geology, 2023. P. 513–521. doi:10.1007/978-3-031-16575-7\_46
16. *Булеев Н. И., Тимухин Г. И.* О численном решении уравнений гидродинамики для плоского потока вязкой несжимаемой жидкости // *Известия СО АН СССР. Серия Технические науки*. 1969. Вып. 1, № 3. С. 14–24.

*Об авторах:*

**Кочергин Владимир Сергеевич**, младший научный сотрудник, отдел теории волн, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), **ORCID ID: 0000-0002-6767-1218**, **ResearcherID: AAG-4209-2020**, [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

**Кочергин Сергей Владимирович**, старший научный сотрудник, отдел вычислительных технологий и математического моделирования, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-3583-8351**, **ResearcherID: AAAG-4206-2020**, [svkocher@mail.ru](mailto:svkocher@mail.ru)

**Скляр Сергей Николаевич**, заведующий кафедрой, Американский университет в Центральной Азии (AUCA) (720060, Киргизская Республика, г. Бишкек, ул. Токомбаева, д. 7/6), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID ID: 0000-0001-6985-6155**, [sklyar51@gmail.com](mailto:sklyar51@gmail.com)