

Влияние ледового сжатия на скорости волновых течений при нелинейном взаимодействии волновых гармоник

А. А. Букатов

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия
✉ bukatov.ant@mhi-ras.ru

Поступила в редакцию 15.08.2022; одобрена после рецензирования 29.08.2022;
принята к публикации 09.03.2023.

Аннотация

Цель. Цель работы – исследование влияния ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под плавающим ледяным покровом при распространении волны, сформированной при нелинейном взаимодействии волновых гармоник.

Методы и результаты. На основе полученного решения задачи о нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн в бассейне конечной глубины с плавающим продольно сжатым упругим льдом выполнен анализ распределений составляющих скорости движения частиц жидкости по длине сформированной волны в зависимости от характеристик льда. Исследовано влияние толщины, модуля упругости и сжимающего усилия ледового покрова, нелинейности вертикального ускорения льда и амплитуды второй взаимодействующей гармоники на вертикальную и горизонтальную составляющие скорости движения жидких частиц.

Выводы. Получено, что сжимающее усилие обуславливает уменьшение фазы и максимальных значений составляющих скорости движения жидкости. Изменение знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники проявляется в существенной трансформации профиля и влияет на фазу сформированного возмущения при учете нелинейности вертикального ускорения льда. При фиксированном значении силы сжатия уменьшение жесткости ледяного покрова приводит к заметному отставанию фазы колебания.

Ключевые слова: нелинейное взаимодействие волн, изгибно-гравитационные волны, продольное сжимающее усилие, волны конечной амплитуды, движение частиц жидкости, ледовое сжатие, ледовый покров

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0004.

Для цитирования: Букатов А. А. Влияние ледового сжатия на скорости волновых течений при нелинейном взаимодействии волновых гармоник // Морской гидрофизический журнал. 2023. Т. 39, № 3. С. 314–327. EDN MXZVWW. doi:10.29039/0233-7584-2023-3-314-327

Influence of Ice Compression on the Wave Current Velocities at the Nonlinear Interaction of Wave Harmonics

A. A. Bukatov

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
✉ bukatov.ant@mhi-ras.ru

Abstract

Purpose. The work is aimed at studying the ice compression influence on the components of fluid motion velocity under a floating ice cover in propagation of the wave formed by the nonlinear interaction of wave harmonics.

Methods and Results. Based on the obtained solution of the problem on nonlinear interaction of the progressive surface waves in a finite depth basin with floating and longitudinally compressed elastic ice, analyzed were the distributions of the components of fluid particles motion velocity along the generated wave length depending on the ice characteristics. The impact of thickness, elasticity modulus and compressive force of the ice cover, nonlinearity of the ice vertical acceleration and the amplitude of the second interacting harmonic upon the vertical and horizontal components of the fluid particles motion velocity was studied.

Conclusions. It is established that the compressive force conditions reduction of the phase and the maximum values of the fluid motion velocity components. Change in the sign of the second interacting harmonic amplitude is manifested in a significant profile transformation, and affects the generated perturbation phase at the regard for the nonlinearity of ice vertical acceleration. When the compression force value is fixed, a decrease in the ice cover rigidity results in a noticeable delay of the oscillation phase.

Keywords: nonlinear interaction of waves, flexural-gravity waves, longitudinal compressive force, waves of finite amplitude, motion of fluid particles, ice compression, ice cover

Acknowledgements: The study was carried out within the framework of the state task on theme FNNN-2021-0004.

For citation: Bukatov, A.A., 2023. Influence of Ice Compression on the Wave Current Velocities at the Nonlinear Interaction of Wave Harmonics. *Physical Oceanography*, 30(3), pp. 288-301. doi:10.29039/1573-160X-2023-3-288-301

Введение

Волны распространяются на значительные расстояния в бассейнах как со свободной поверхностью, так и с плавающим ледовым покровом, который влияет на динамику морской поверхности и подповерхностных вод [1–3]. Происходящие климатические процессы обуславливают необходимость в надежных расчетах волновых характеристик и прогнозах волнения в ледовых условиях и требуют развития теоретических исследований, математического моделирования, а также проведения натуральных инструментальных измерений и лабораторных экспериментов [4–8]. При решении отдельных задач, связанных с волновой динамикой на поверхности жидкости, следует учитывать возникающее при распространении поверхностных волн дрейфовое течение – Стоксов дрейф [9, 10]. Его скорость в направлении движения волн конечной амплитуды исследовалась в [11–15] при отсутствии ледового покрова. В работах [16, 17] изучено влияние плавающего битого льда на скорость поступательного перемещения жидкости в направлении распространения прогрес-

сивной нелинейной волны. Изучение скорости смещений жидких частиц вдоль профиля бегущей периодической волны конечной амплитуды в бассейне с плавающим упругим льдом выполнено в [18], а со сплошным, продольно сжатым упругим льдом – в [19].

В настоящей работе на основе полученного решения задачи о нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн в бассейне конечной глубины с плавающим продольно сжатым упругим льдом [20] выполнен анализ распределений составляющих скорости движения частиц жидкости по длине сформированной волны под плавающим ледовым покровом.

Постановка задачи

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H плавает сплошной, продольно сжатый упругий лед с толщиной $h = \text{const}$. Жидкость и ледовый покров в горизонтальных направлениях не ограничены. Исследуем влияние льда на орбитальные скорости движения жидких частиц, формируемые при взаимодействии двух волновых гармоник конечной амплитуды. Предполагаем движение жидкости потенциальным, а колебания льда безотрывными, тогда задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

для потенциала скорости с граничными условиями на поверхности лед – жидкость ($z = \zeta$)

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = p, \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

и на дне ($z = -H$) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Потенциал скорости и возвышение поверхности лед – жидкость при $z = \zeta$ связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) записана в безразмерных величинах:

$$x = kx_1, \quad z = kz_1, \quad t = \sqrt{kg} t_1, \quad \zeta = k\zeta^*, \quad \varphi = \left(k^2 / \sqrt{kg} \right) \varphi^*.$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

E, Q, h, ρ_1, ν – модуль нормальной упругости, продольное сжимающее усилие, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда соответственно; ρ – плотность жидкости; k – волновое число; g – ускорение силы тяжести; t – время; $\varphi(x, z, t)$ – потенциал скорости движения жидкости; $\zeta(x, t)$ – возвышение поверхности лед – жидкость.

Отметим, что в динамическом условии (2) выражение с κ представляет собой инерцию вертикальных смещений льда, первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения льда [20].

Выражения для составляющих орбитальной скорости движения частиц жидкости

Решение задачи (1)–(5) было найдено методом многих масштабов [21] в виде уравнений для трех приближений, учитывающих нелинейность ускорения вертикальных смещений продольно сжатого упругого льда [20]. Первое приближение возвышения поверхности бассейна ζ_1 задавалось в виде

$$\zeta_1 = \cos\theta + a_1 \cos 2\theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2),$$

где a_1 – амплитуда второй взаимодействующей гармоники, а $\beta(T_1, T_2)$ определяется из второго и третьего приближений. Здесь $T_1 = \varepsilon t$; $T_2 = \varepsilon^2 t$; $\varepsilon = ak$; a – амплитуда начальной гармоники. Итоговое выражение для потенциала скорости в безразмерных переменных с точностью до третьего приближения было найдено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi = & \varepsilon b_{11} \operatorname{ch}(z+H) \sin \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_{n2} \operatorname{ch} 2(z+H) \sin 2\theta + \\ & + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 b_{nj} \operatorname{ch} j(z+H) \sin j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 b_{3n} \operatorname{ch} n(z+H) \sin n\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n b_{n0} t, \\ \theta = & x + \sigma t, \quad \sigma = \tau + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4 - Q_1 k^2) (1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H,$$

$$b_{11} = \frac{\tau}{\operatorname{sh} H}, \quad b_{12} = a_1 \frac{\tau}{\operatorname{sh} 2H},$$

$$b_{20} = \tau^2 \left(a_1^2 (1 + \operatorname{cth}^2 2H) + \frac{1}{4} (1 + \operatorname{cth}^2 H) + \kappa k \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 4a_1^2 \operatorname{cth} 2H \right) \right),$$

$$b_{23} = \frac{l_3 \mu_3 + 3l_7 \tau}{3 \operatorname{sh} 3H (\mu_3 - 9\kappa k \tau^2 - 3\tau^2 \operatorname{cth} 3H)},$$

$$b_{24} = \frac{l_4 \mu_4 + 4l_8 \tau}{3 \operatorname{sh} 4H (\mu_4 - 16\kappa k \tau^2 - 4\tau^2 \operatorname{cth} 4H)},$$

$$b_{30} = a_1 \tau^2 \left(2 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \kappa k \left(\frac{9}{4} + 2 \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \frac{1}{4} \operatorname{cth}^2 H \right) \right),$$

$$b_{3i} = \frac{j_i \mu_i + i m_i \tau}{i \operatorname{sh} iH (\mu_i - i^2 \tau^2 \kappa k - i \tau^2 \operatorname{cth} iH)}, \quad i = 3 \dots 6,$$

$$\mu_i = 1 - i^2 Q l_i k^2 + i^4 D_i k^4, \quad i = 1 \dots 6,$$

$$a_{23} = \mu_3^{-1} (l_7 + 3\tau b_{23} (\operatorname{ch} 3H - \kappa k 3 \operatorname{sh} 3H)),$$

$$a_{24} = \mu_4^{-1} (l_8 + 4\tau b_{24} (\operatorname{ch} 4H - \kappa k 4 \operatorname{sh} 4H)),$$

$$a_{3i} = (i \tau b_{3i} (\operatorname{ch} iH + i \kappa k \operatorname{sh} iH) + m_i) \mu_i^{-1}, \quad i = 3 \dots 6,$$

$$a_1 = \pm \left(\frac{\mu_2 r_1}{4r_2 (2\tau^2 \operatorname{cth} 2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2) (1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$r_1 = \left(2 \operatorname{cth} H + \operatorname{th} 2H \left(\operatorname{cth} H \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right) (\tau^2 (\operatorname{cth} H + \kappa k) + \mu_1),$$

$$r_2 = \tau^2 \left(\frac{1}{2} + \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \kappa k \left(\operatorname{cth} 2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} H \right) \right) + \mu_1 \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$l_3 = -\frac{3}{2} a_1 \tau (2 \operatorname{cth} 2H + \operatorname{cth} H), \quad l_4 = -4a_1^2 \operatorname{cth} 2H,$$

$$l_7 = a_1 \tau^2 \left(\frac{11}{2} - \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H + \kappa k \left(5 \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H \right) \right),$$

$$l_8 = a_1^2 \tau^2 (5 - \operatorname{cth}^2 2H + 4\kappa k \operatorname{cth} 2H),$$

$$j_3 = -\frac{5}{8} \tau - \frac{3}{8} a_1^2 \tau - 6b_{24} \operatorname{ch} 4H - \frac{3}{2} a_{24} \tau \operatorname{cth} H + 3a_{23} \sigma_1,$$

$$j_4 = -\frac{9}{2} a_1 \tau - 6b_{23} \operatorname{ch} 3H - 2a_{23} \tau \operatorname{cth} H + 4a_{24} \sigma_1,$$

$$j_5 = -\frac{69}{8} a_1^2 \tau - 10b_{24} \operatorname{ch} 4H - \frac{5}{2} a_{24} \tau \operatorname{cth} H - 5a_1 \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H - a_{23} \tau \operatorname{cth} 2H \right),$$

$$j_6 = -5a_1^3 \tau - 6a_1 (2b_{24} \operatorname{ch} 4H - a_{24} \tau \operatorname{cth} 2H),$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau\mu_2 \left(2\text{cth}H + \text{th}2H \left(\text{cth}H \left(\frac{1}{2} \text{cth}H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right)}{4a_1 (2\tau^2 \text{cth}2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2) (1 + 2\kappa k \text{th}2H)},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1}{\mu_1} + \frac{q_2}{2a_1\mu_2} \right),$$

$$m_3 = \tau \left(\frac{9}{2} a_1 \sigma_1 + 2b_{24} \text{ch}4H (2\text{th}4H - \text{cth}H) \right) + \\ + \frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{1}{4} \text{cth}H (1 - 23a_1^2) + 7a_1^2 \text{cth}2H - 3a_{24} \right) + 3b_{23} \sigma_1 \text{ch}3H + \\ + \kappa k \left(\tau \left(2b_{24} \text{sh}4H (11\text{cth}4H - 4\text{cth}H) + 3a_1 \sigma_1 \left(2\text{cth}2H + \frac{1}{2} \text{cth}H \right) \right) \right) + \\ + \tau^2 \left(a_1^2 \left(\frac{21}{8} - 2\text{cth}^2 2H - \frac{7}{2} \text{cth}H \text{cth}2H \right) - \frac{1}{8} - \frac{3}{2} a_{24} \text{cth}H - \frac{1}{2} \text{cth}^2 H \right) + 9b_{23} \sigma_1 \text{sh}3H \Big),$$

$$m_4 = \tau \left(4\sigma_1 a_1^2 + \frac{3}{2} b_{23} \text{ch}3H (5\text{th}3H - \text{cth}H) \right) + 2\tau^2 \left(a_1 \text{cth}2H - \frac{1}{4} a_1 \text{cth}H + a_{23} \right) + \\ + 4b_{24} \sigma_1 \text{ch}4H + \kappa k \left(\tau \left(\frac{3}{2} b_{23} \text{sh}3H (11\text{cth}3H - 3\text{cth}H) + 8a_1^2 \sigma_1 \text{cth}2H \right) \right) + \\ + \tau^2 \left(a_1 \left(\frac{37}{4} - 4\text{cth}2H \text{cth}H - \frac{3}{4} \text{cth}^2 H \right) + 2a_{23} \text{cth}H \right) + 16b_{24} \sigma_1 \text{sh}4H \Big),$$

$$m_5 = \tau \left(2b_{24} \text{ch}4H (6\text{th}4H - \text{cth}H) + 3b_{23} a_1 \text{ch}3H \left(\frac{7}{2} \text{th}3H - \text{cth}2H \right) \right) + \\ + \tau^2 \left(\frac{7}{2} a_1^2 \left(\text{cth}2H - \frac{1}{4} \text{cth}H \right) + 5a_{23} a_1 + \frac{5}{2} a_{24} \right) + \\ + \kappa k \left(\tau \left(2b_{24} \text{sh}4H (19\text{cth}4H - 4\text{cth}H) + 3b_{23} a_1 \text{sh}3H \left(\frac{11}{2} \text{cth}3H - 3\text{cth}2H \right) \right) \right) + \\ + \tau^2 \left(-a_1^2 \left(\frac{3}{8} + 6\text{cth}^2 2H + \frac{11}{2} \text{cth}2H \text{cth}H \right) + 10a_{23} a_1 \text{cth}2H + \frac{5}{2} a_{24} \text{cth}H \right) \Big),$$

$$m_6 = 4\tau b_{24} a_1 \text{ch}4H (4\text{th}4H - \text{cth}2H) + \tau^2 a_1 (a_1^2 \text{cth}2H + 6a_{24}) + \\ + 2\kappa k a_1 \left(4\tau b_{24} \text{sh}4H (5\text{cth}4H - 2\text{cth}2H) + \tau^2 (6a_{24} \text{cth}2H - a_1^2 (1 + 4\text{cth}^2 2H)) \right) \Big),$$

$$\begin{aligned}
q_1 = & \mu_1 \left(\frac{3}{2} b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H - \tau \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} a_1^2 + a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^2 a_1 \left(-\frac{1}{2} \sigma_1 + \right. \\
& + 3b_{23} \operatorname{ch} 3H \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} 3H + \operatorname{cth} 2H \right) \left. \right) + \tau^3 \left(9a_1^2 \operatorname{cth} 2H + a_1 a_{23} + \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \left(\frac{5}{2} - a_1^2 \right) \right) + \\
& + \kappa k \left(\tau^2 a_1 \left(3b_{23} \operatorname{sh} 3H \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} 3H + 3\operatorname{cth} 2H \right) - 2\sigma_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + \tau^3 \left(2a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H + \frac{3}{8} + a_1^2 \left(8\operatorname{cth}^2 2H + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + \frac{39}{4} \right) \right) \right), \\
q_2 = & \mu_2 \left(3b_{23} \operatorname{ch} 3H + 4b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H + \tau \left(a_{23} \operatorname{cth} H + 2a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 3a_1^3 \right) \right) + \\
& + 2\tau^2 \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H \left(\operatorname{cth} H - \operatorname{th} 3H \right) + 4b_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H \operatorname{ch} 4H - \sigma_1 \right) + \\
& + 2\tau^3 \left(a_{23} + a_1 \left(3a_1 \operatorname{cth} H + 2a_{24} + \operatorname{cth} 2H \left(5a_1^2 - 2 \right) \right) \right) + \\
& + \kappa k \left(2\tau^2 \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{sh} 3H \left(3\operatorname{cth} H - 5\operatorname{cth} 3H \right) + 8b_{24} a_1 \operatorname{sh} 4H \left(2\operatorname{cth} 2H - \operatorname{cth} 4H \right) - \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + 2\tau^3 \left(2a_1^3 \left(3 + 4\operatorname{cth} 2H \right) + a_1 \left(4\operatorname{cth} 2H \left(a_{24} + \operatorname{cth} H \right) + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H - \frac{3}{2} \right) + a_{23} \operatorname{cth} H \right) \right).
\end{aligned}$$

При этом $b_{22} = b_{32} = a_2 = a_3 = l_1 = l_2 = l_5 = l_6 = j_1 = j_2 = m_1 = m_2 = 0$.

В размерных переменных выражение для потенциала скорости имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi = & a\sqrt{g/k} \sum_{n=1}^2 b_{1n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + a^2 \sqrt{kg} \left(\sum_{n=3}^4 b_{2n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + b_{20} t \right) + \\
& + a^3 k \sqrt{kg} \left(\sum_{n=3}^6 b_{3n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + b_{30} t \right),
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\theta = kx + \sqrt{kg} (\tau + ak\sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2) t,$$

а в выражениях для b_{20} , b_{30} , b_{11} , b_{12} , b_{23} , b_{24} , b_{33} , b_{34} , b_{35} , b_{36} , σ_1 , σ_2 аргумент гиперболических функций заменяется на kH . Здесь и далее для выражений в размерных переменных у символов « x », « z », « t » опущен индекс 1, а у « φ » – знак «*». Следовательно, горизонтальная (u) и вертикальная (w) составляющие скорости движения однородной жидкости с учетом формулы (6) определяются выражениями

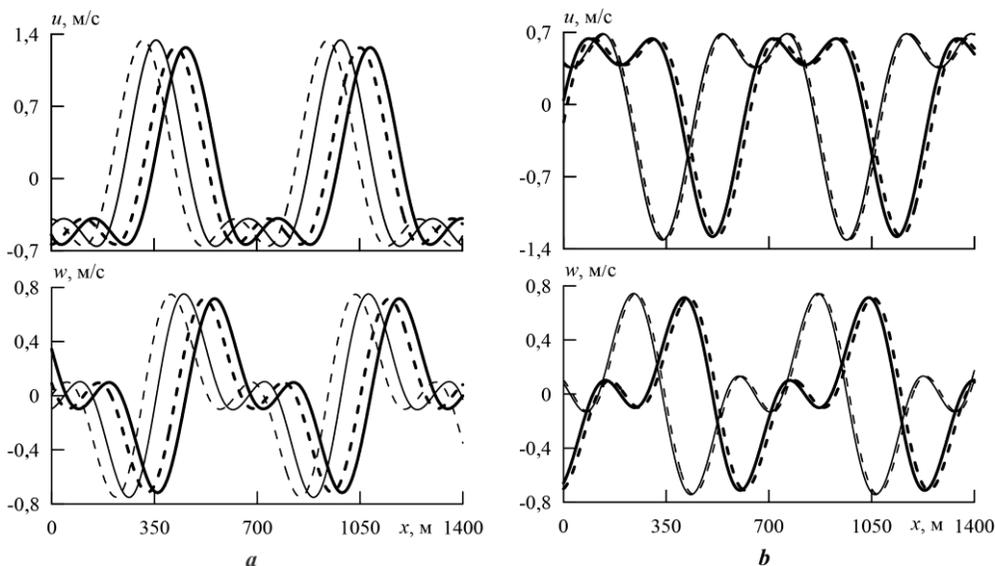
$$\begin{aligned}
u = & a\sqrt{kg} \sum_{n=1}^2 n b_{1n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta + a^2 k \sqrt{kg} \sum_{n=3}^4 n b_{2n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta + \\
& + a^3 k^2 \sqrt{kg} \sum_{n=3}^6 n b_{3n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta,
\end{aligned}$$

$$w = a\sqrt{kg} \sum_{n=1}^2 nb_{1n} \operatorname{sh} nk(z+H) \sin n\theta + a^2 k \sqrt{kg} \sum_{n=3}^6 nb_{3n} \operatorname{sh} nk(z-H) \sin n\theta +$$

Отметим, что полученное решение справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел k_i ($i = 1 \dots 4$) [20].

Анализ зависимости составляющих скорости движения жидкости от характеристик ледового покрова

Для оценки влияния характеристик ледового покрова на скорости волновых течений подо льдом численные расчеты выполнялись при $\rho_1/\rho = 0,87$; $\nu = 0,34$; $0 \leq h \leq 2$ м; E , равном 0; $5 \cdot 10^8$; 10^9 ; $3 \cdot 10^9$ Н/м², и условию $Q_1 < 2\sqrt{D}$, необходимом для устойчивости плавающего ледового покрова¹ [22].



Р и с. 1. Распределение составляющих скорости движения жидкости в условиях ледового сжатия, $Q_1 = \sqrt{D}$ (толстые линии), и при его отсутствии, $Q_1 = 0$ (тонкие линии), для случая, когда $a_1 > 0$ (a) и $a_1 < 0$ (b) при $\lambda/H = 10,47$. Штриховые линии – с учетом вертикального ускорения льда; сплошные – без учета

F i g. 1. Distribution of the fluid motion velocity components under ice compression, $Q_1 = \sqrt{D}$ (thick lines) and in its absence $Q_1 = 0$ (thin lines) for the case when $a_1 > 0$ (a) and $a_1 < 0$ (b) at $\lambda/H = 10.47$. Dashed lines are obtained with allowance for ice vertical acceleration; solid ones – without it

На рис. 1 представлено распределение горизонтальной и вертикальной составляющих скорости в условиях ледового сжатия, $Q_1 = \sqrt{D}$, и при его отсутствии, $Q_1 = 0$, для случая $a_1 > 0$ (рис. 1, a) и $a_1 < 0$ (рис. 1, b). Здесь

¹ Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967. 215 с.

$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $H = 60 \text{ м}$, $a = 2 \text{ м}$, $h = 2 \text{ м}$, длина волны $\lambda = 628 \text{ м}$. Из рис. 1, *a* видно, что при распространении волны, сформированной при нелинейном взаимодействии двух гармоник, влияние сжимающего усилия проявляется в заметном уменьшении фазы и максимальных значений составляющих скорости движения жидкости. Учет нелинейности вертикального ускорения льда проявляется в ускорении смещения сформированного возмущения по сравнению с профилем, построенным без его учета. Эта тенденция остается и при наличии силы сжатия. Смена знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники с минуса на плюс приводит к качественной и количественной трансформации профиля (рис. 1, *b*). Влияние сжимающего усилия сохраняется, однако нелинейность ускорения вертикальных смещений плавающего льда проявляется в уменьшении фазы волнового профиля.

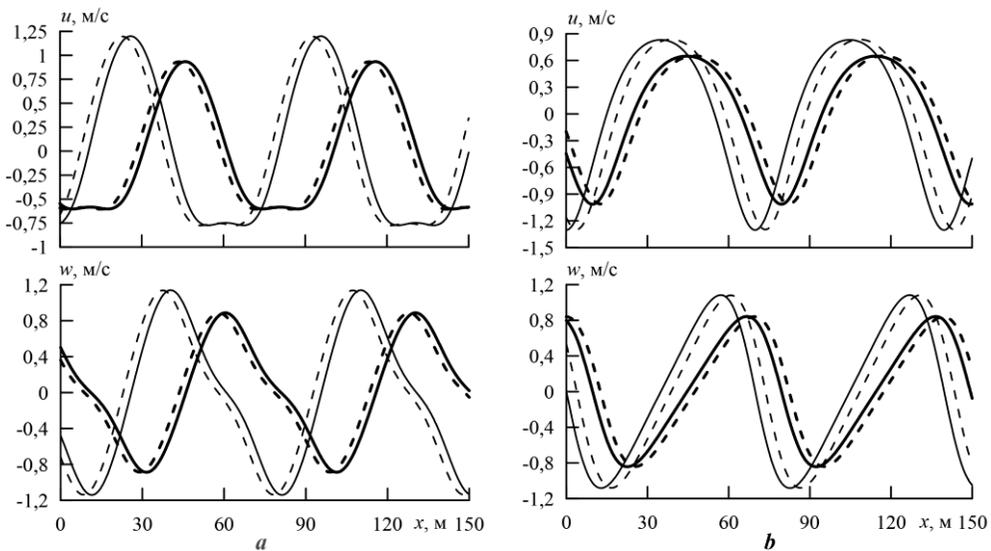


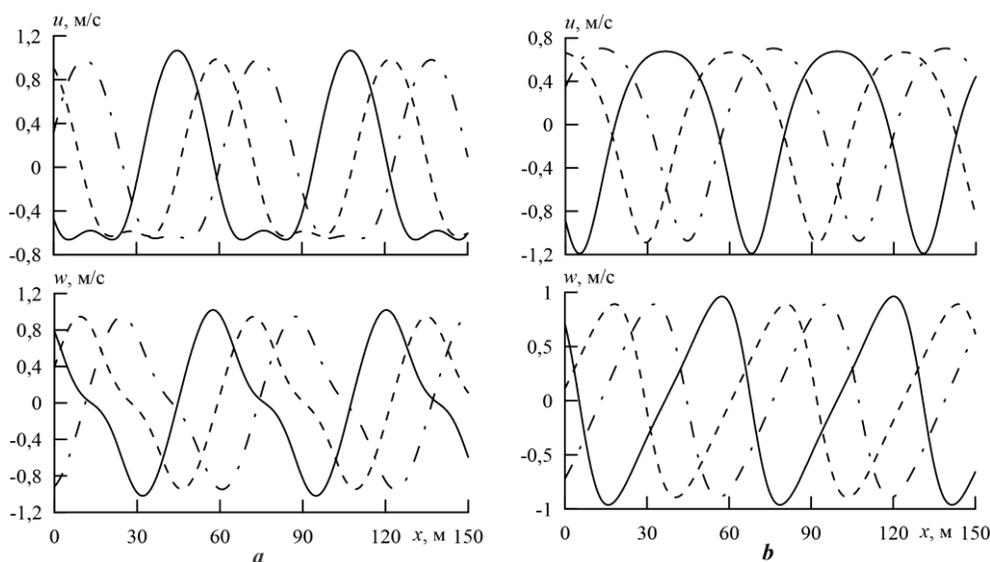
Рис. 2. Распределение составляющих скорости движения жидкости в условиях ледового сжатия, $Q_1 = \sqrt{D}$ (толстые линии), и при его отсутствии, $Q_1 = 0$ (тонкие линии), для случая $a_1 > 0$ (*a*) и $a_1 < 0$ (*b*) при $\lambda/H = 0,69$. Штриховые линии – с учетом вертикального ускорения льда; сплошные – без учета

Fig. 2. Distribution of fluid motion velocity components under ice compression, $Q_1 = \sqrt{D}$ (thick lines) and in its absence $Q_1 = 0$ (thin lines) for the case when $a_1 > 0$ (*a*) and $a_1 < 0$ (*b*) at $\lambda/H = 0.69$. Dashed lines are obtained with allowance for ice vertical acceleration; solid ones – without it

Для диапазона коротких волн (рис. 2) влияние ледового покрова при наличии сжимающего усилия проявляется более заметно, в сравнении с длинными волнами, в величинах фазового сдвига и амплитудных значениях составляющих скорости движения жидкости. Профили сформированных возмущений являются нелинейными. Здесь $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $H = 100 \text{ м}$, $a = 1 \text{ м}$, $h = 0,5 \text{ м}$, $Q_1 = \sqrt{D}$, $\lambda \approx 69 \text{ м}$. Отметим, что значениям вершин на профиле горизонтальной составляющей скорости $u(x)$ для изученных волновых возмущений так же, как и в случае взаимодействия волновых гармоник в бассейне с упругим ледовым покровом [23], линейном случае и при распространении

периодических изгибно-гравитационных волн конечной амплитуды [18, 19], соответствуют значения $w(x) = 0$. При этом значениям вершин на профиле $w(x)$ соответствуют значения $u(x) \neq 0$.

Влияние силы сжатия на составляющие скорости орбитального движения жидких частиц при изменении модуля упругости представлено на рис. 3 при $a_1 > 0$ (рис. 3, *a*) и $a_1 < 0$ (рис. 3, *b*). Здесь $H = 100$ м, $a = 1$ м, $h = 0,6$ м, $Q_1 = \sqrt{D}$, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м² (сплошная линия), $E = 10^9$ Н/м² (штриховая линия), $E = 5 \cdot 10^8$ Н/м² (штрихпунктирная линия). Профили составляющих скорости построены с учетом инерции вертикальных смещений льда. Из рисунка видно, что с уменьшением жесткости ледяного покрова происходит заметное отставание фазы колебания. При этом уменьшается и его амплитуда. При смене знака второй взаимодействующей гармоники деформируются профили составляющих скорости качественно и количественно. Изменение модуля упругости льда влияет на распределения составляющих скорости прежним образом.

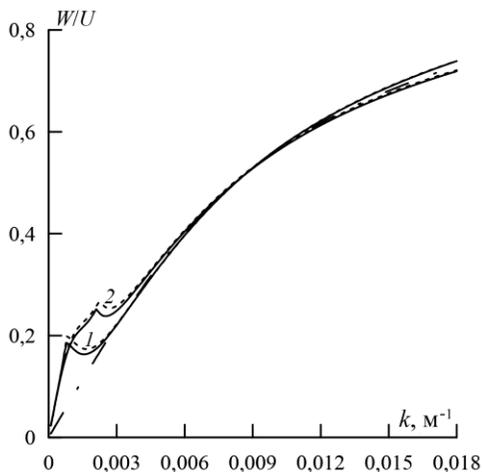


Р и с. 3. Распределение составляющих скорости движения жидкости в условиях ледяного сжатия, $Q_1 = \sqrt{D}$, для случая, когда $a_1 > 0$ (*a*) и $a_1 < 0$ (*b*). Сплошная линия соответствует $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м²; штриховая – $E = 10^9$ Н/м²; штрихпунктирная – $E = 5 \cdot 10^8$ Н/м²

F i g. 3. Distribution of fluid motion velocity components under of ice compression, $Q_1 = \sqrt{D}$ for the case when $a_1 > 0$ (*a*) and $a_1 < 0$ (*b*). Solid line corresponds to $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², dashed line – to $E = 10^9$ Н/м², and dash-dotted one – to $E = 5 \cdot 10^8$ Н/м²

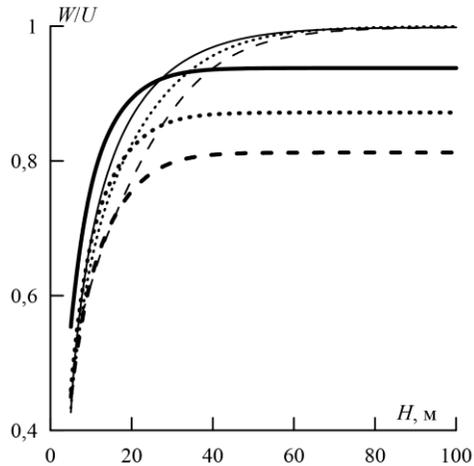
Распределение отношения максимальных по длине волны величин вертикальной составляющей (W) и горизонтальной составляющей (U) скорости по волновому числу в случае учета нелинейности вертикального ускорения льда представлено на рис. 4. Диапазон рассматриваемых волновых чисел расположен вне резонансных значений [20]. Здесь $H = 60$ м, $a = 1$ м, $h = 1$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м². Видно, что в рассмотренном диапазоне k распределение W/U по волновому числу меньше единицы, следовательно, как и в случае распространения нелинейной периодической волны [18, 19], вертикальная состав-

ляющая не превосходит горизонтальную составляющую скорости. В отличие от линейного случая, распределение отношения W/U в диапазоне малых k не является монотонным, здесь заметно проявление сжимающего усилия и влияние знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники. Отметим, что в этом диапазоне уменьшение модуля Юнга сказывается на уменьшении величины отношения как при $Q_1 \neq 0$, так и при $Q_1 = 0$. С ростом k наибольшее влияние на величину W/U оказывает знак амплитуды a_1 .



Р и с. 4. Распределение величины отношения W/U по волновому числу. Сплошные линии – $Q_1 = \sqrt{D}$; штриховые линии – $Q_1 = 0$, штрихпунктирная линия – линейный случай. Линии 1 соответствуют случаю, когда $a_1 > 0$; линии 2 – случаю, когда $a_1 < 0$

F i g. 4. Distribution of the W/U ratio value over the wave number. Solid lines – $Q_1 = \sqrt{D}$; dashed lines – $Q_1 = 0$ and dash-dotted one is a linear case. Lines 1 correspond to the case when $a_1 > 0$, and lines 2 – when $a_1 < 0$

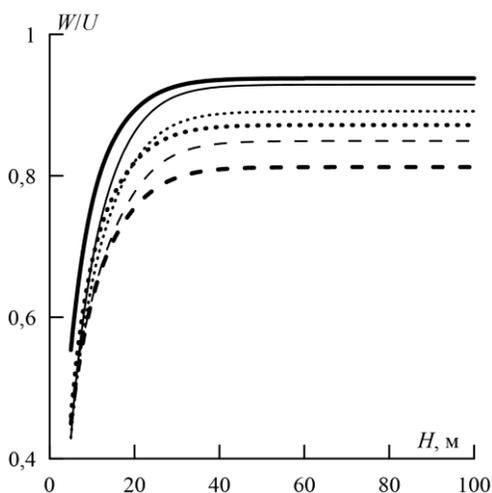


Р и с. 5. Распределение величины отношения W/U по глубине жидкости при $\lambda = 78,5$ м. Толстые линии – $h = 1$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $Q_1 = \sqrt{D}$; тонкие линии – $h = E = Q_1 = 0$. Сплошные линии соответствуют случаю, когда $a_1 > 0$, штриховые линии – случаю, когда $a_1 < 0$, пунктирные линии – линейному случаю

F i g. 5. Distribution of the W/U ratio value over the fluid depth at $\lambda = 78.5$ m. Thick lines – $h = 1$ m, $E = 3 \cdot 10^9$ N/m², $Q_1 = \sqrt{D}$; thin ones – $h = E = Q_1 = 0$. Solid lines correspond to the case when $a_1 > 0$, dashed lines – when $a_1 < 0$, and dotted ones correspond to the linear case

Зависимость отношения максимальных по длине волны величин составляющих скорости от глубины бассейна для заданной длины волны λ представлена на рис. 5 с учетом нелинейности вертикального ускорения льда. Видно, что при наличии ледового покрова с увеличением глубины бассейна отношение вертикальной и горизонтальной составляющих скорости ($W/U_{h \neq 0}$) увеличивается и при $H > 40$ м отношение остается практически постоянным. Величина $W/U_{h \neq 0}$ зависит от знака второй взаимодействующей гармоники и может быть как больше величины этого отношения в линейном случае, так и меньше его. При отсутствии ледового покрова величина $W/U_{h=0} \sim \text{const}$ при $H > 80$ м. Из представленных распределений видно, что, начиная с $H > 40$ м, $W/U_{h \neq 0} < W/U_{h=0} < 1$, т. е. вертикальная составляющая не превышает горизонтальную, а наличие сплошного продольно сжатого упругого ледового покро-

ва уменьшает величину отношения в сравнении со случаем отсутствия льда. Отметим, что с увеличением амплитуды начальной гармоники при $a_1 > 0$ увеличивается отношение W/U , а при $a_1 < 0$ уменьшается. С уменьшением модуля упругости при $Q_1 = 0$ незначительно увеличивается отношение как при $a_1 > 0$, так и при $a_1 < 0$. Причем при $a_1 < 0$ – более заметно. Влияние сжимающего усилия на отношение W/U зависит от величины модуля нормальной упругости, к примеру при $H > 40$ м, $Q_1 = \text{const}$ и уменьшении E отношение W/U увеличивается.



Р и с. 6. Распределение величины отношения W/U по глубине жидкости при $\lambda = 78,5$ м. Толстые – $h = 1$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $Q_1 = \sqrt{D}$; тонкие линии – $h = 1$ м, $E = Q_1 = 0$. Сплошные линии соответствуют случаю, когда $a_1 > 0$, штриховые линии – случаю, когда $a_1 < 0$, пунктирные линии – линейному случаю

F i g. 6. Distribution of the W/U ratio value over the fluid depth at $\lambda = 78.5$ m. Thick lines – $h = 1$ m, $E = 3 \cdot 10^9$ N/m², $Q_1 = \sqrt{D}$; thin ones – $h = 1$ m, $E = Q_1 = 0$. Solid lines correspond to the case when $a_1 > 0$, dashed lines – when $a_1 < 0$, and dotted ones correspond to the linear case

Распределение зависимости W/U по глубине H при $\lambda = 78,5$ м для случая абсолютно гибкого льда ($h \neq 0$, $E = Q_1 = 0$) и случая упругого продольно сжатого льда ($h \neq 0$, $E \neq 0$, $Q_1 \neq 0$) представлено на рис. 6 при учете нелинейности ускорения его вертикальных смещений. Толстые линии, как и на рис. 5, соответствуют случаю упругого продольно сжатого ледового покрова ($h = 1$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $Q_1 = \sqrt{D}$, $a = 1$ м). Тонкие линии – случай абсолютно гибкого льда (битый лед), здесь $h = 1$ м, $E = Q_1 = 0$, $a = 1$ м. Сплошные линии – $a_1 > 0$, штриховые линии – $a_1 < 0$, пунктирные линии – линейный случай. Видно, что, начиная с $H > 30$ м, распределения W/U для случая битого льда ($W/U_{E=0}$) $\sim \text{const}$ и находятся внутри распределения для упругого, продольно сжатого льда ($W/U_{Q_1 \neq 0}$) $\sim \text{const}$, это сохраняется и в случае упругого льда ($Q_1 = 0$). Для случая, когда $a_1 > 0$, $W/U_{E=0} < W/U_{Q_1 \neq 0}$, а для линейного случая и случая, когда $a_1 < 0$, $W/U_{Q_1 \neq 0} < W/U_{E=0}$. Отметим, что влияние учета нелинейности вертикального ускорения льда на отношение W/U с увеличением глубины бассейна

наиболее заметно проявляется в случае абсолютно гибкого льда. При $a_1 > 0$ величина отношения W/U уменьшается, а при $a_1 < 0$ – увеличивается, причем влияние нелинейности ускорения льда более заметно при $a_1 < 0$.

Заключение

На основе полученного решения задачи о нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн в бассейне конечной глубины с плавающим продольно сжатым упругим льдом выполнен анализ распределений составляющих скорости движения частиц жидкости по длине сформированной волны под плавающим ледовым покровом. Исследовано влияние толщины, модуля упругости и сжимающего усилия ледового покрова, учета нелинейности вертикального ускорения льда, амплитуды второй взаимодействующей гармоники на вертикальную и горизонтальную составляющие скорости движения жидких частиц.

Получено, что сжимающее усилие обуславливает уменьшение фазы и максимальных значений составляющих скорости движения жидкости. Изменение знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники проявляется в существенной трансформации профиля и влияет на фазу сформированного возмущения при учете нелинейности вертикального ускорения льда. При фиксированном значении силы сжатия уменьшение жесткости ледяного покрова приводит к заметному отставанию фазы колебания.

Распределение максимальных по длине волны величин отношения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости по волновому числу в диапазоне малых волновых чисел не является монотонным – заметно проявление сжимающего усилия и влияние знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники в сравнении с линейным случаем. Для заданной длины волны наблюдается различие в величинах отношения для случаев открытой поверхности, битого льда и сплошного, продольно сжатого упругого льда. Существует значение глубины, начиная с которого для всех рассмотренных случаев отношения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости остаются практически постоянными и меньше единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V. A.* Of ocean waves and sea-ice revisited // *Cold Regions Science and Technology*. 2007. Vol. 49, iss. 2. P. 110–133. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2007.04.007>
2. *Takagi K.* Interaction between solitary wave and floating elastic plate // *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 1997. Vol. 123, iss. 2. P. 57–62. [doi:10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1997\)123:2\(57\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1997)123:2(57))
3. *Букатов А. Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь : ФБГУН МГИ, 2017. 360 с.
4. *Shen H. H.* Wave-Ice Interaction Models and Experimental Observations : conference paper // *IUTAM Symposium on Physics and Mechanics of Sea Ice*. Cham : Springer, 2022. P. 183–200. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80439-8_9
5. Механика колебаний и волн во льдах Северного Ледовитого океана при явлениях сжатия и торошения / В. Н. Смирнов [и др.] // *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2020. Т. 66, № 3. С. 321–336. <https://doi.org/10.30758/0555-2648-2020-66-3-321-336>.
6. Velocity profiles and incipient motion of frazil particles under ice cover / J. Sui [et al.] // *International Journal of Sediment Research*. 2010. Vol. 25, iss. 1. P. 39–51. [https://doi.org/10.1016/S1001-6279\(10\)60026-1](https://doi.org/10.1016/S1001-6279(10)60026-1)

7. *Ogasawara T., Sakai S.* Numerical analysis of the characteristics of waves propagating in arbitrary ice-covered sea // *Annals of Glaciology*. 2006. Vol. 44. P. 95–100. <https://doi.org/10.3189/172756406781811402>
8. *Коробкин А. А., Папин А. А., Хабхнашева Т. И.* Математические модели снежно-ледового покрова. Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2013. 116 с.
9. *Stokes G.* On the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. P. 197–229. (Cambridge Library Collection – Mathematics ; vol. 1). doi:10.1017/CBO9780511702242.013
10. *Curcic M., Chen S. S., Özgökmen T. M.* Hurricane-induced ocean waves and stokes drift and their impacts on surface transport and dispersion in the Gulf of Mexico // *Geophysical Research Letters*. 2016. Vol. 43, iss. 6. P. 2773–2781. doi:10.1002/2015GL067619
11. *Нестеров С. В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1968. Т. 4, № 10. С. 1123–1125.
12. *Ньюмен Д.* Морская гидродинамика. Л. : Судостроение, 1985. 367 с.
13. *Longuet-Higgins M.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 547–555. <https://doi.org/10.1017/S0022112087001654>
14. *Алешков Ю. З.* Течения и волны в океане. СПб. : Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. 224 с.
15. *Букатов Ант. А., Букатова О. М.* Скорости движения жидкости в бегущей периодической волне конечной амплитуды // *Системы контроля окружающей среды*. Севастополь : МГИ НАН Украины, 2008. Вып. 11. С. 269–271.
16. *Букатов А. Е., Жарков В. В.* Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна // *Морской гидрофизический журнал*. 2001. № 5. С. 3–14.
17. *Bukatov A. E., Bukatov A. A.* Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // *International Journal of Offshore and Polar Engineering*. 1999. Vol. 9, № 3. P. 161–166.
18. *Букатов Ант. А., Букатов Анд. А.* Скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении периодической волны конечной амплитуды // *Морской гидрофизический журнал*. 2011. № 1. С. 15–24.
19. *Букатов Ант. А., Букатова О. М.* Влияние ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под ледяным покровом в бегущей периодической изгибно-гравитационной волне конечной амплитуды // *Морской гидрофизический журнал*. 2011. № 4. С. 28–35.
20. *Букатов А. А.* Нелинейные колебания плавающей продольно сжатой упругой пластинки при взаимодействии волновых гармоник конечной амплитуды // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2019. № 2. С. 48–58. doi:10.1134/S056852811902004X
21. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 455 с.
22. *Букатов А. Е.* Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // *Прикладная механика*. 1981. Т. 17, № 1. С. 93–98.
23. *Букатов А. А.* Скорость волновых течений под плавающим упругим льдом, формируемых при нелинейном взаимодействии волновых гармоник // *Морской гидрофизический журнал*. 2022. Т. 38, № 1. С. 5–17. doi:10.22449/0233-7584-2022-1-5-17

Об авторе:

Букатов Антон Алексеевич, ведущий научный сотрудник, отдел океанографии, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-1165-8428**, **ResearchID: P-6733-2017**, newisland@list.ru