

Научная статья

УДК 551.466.6(265.54)

EDN: ENUJFN

## Возбуждение внутренних волн в неглубоком морском бассейне с открытым входом в условиях параметрического резонанса

**В. В. Новотрясов**

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,  
Владивосток, Россия  
✉ vadimnov@poi.dvo.ru*

Поступила в редакцию 28.03.2024; одобрена после рецензирования 05.07.2024;  
принята к публикации 13.07.2024.

### *Аннотация*

*Цель.* С использованием данных натуральных измерений показать, что в заливе Посьета под воздействием сейшевых колебаний его уровня в осенний период в условиях параметрического резонанса возбуждаются внутренние волны (ВВ).

*Методы и результаты.* Методами спектрального анализ установлен ряд частот ВВ, близких к частотам самых интенсивных сейшевых колебаний залива. Для горизонтальной компоненты орбитальной скорости ВВ получено уравнение Матье и выполнен его анализ. Для условий наблюдения ВВ сформулированы необходимые и достаточные условия реализации параметрического резонанса в модельном бассейне, аппроксимирующем залив Посьета. Проверка этих условий показала, что в заливе в осенний период выполнены как необходимые, так и достаточные условия параметрического резонанса между ВВ и сейшевыми колебаниями уровня.

*Выводы.* Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в осенний сезон в заливе Посьета ряд частот ВВ близок к частотам свободных колебаний уровня залива. Показано, что баротропные течения, индуцированные сейшевыми колебаниями, могут возбуждать внутренние волны посредством параметрического резонанса.

**Ключевые слова:** сейши, баротропное волновое течение, залив Посьета, внутренние волны, параметрическая неустойчивость, параметрический резонанс

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН (тема № 1240-2210-0072-5).

**Для цитирования:** *Новотрясов В. В.* Возбуждение внутренних волн в неглубоком морском бассейне с открытым входом в условиях параметрического резонанса // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40, № 5. С. 690–705. EDN ENUJFN.

## Excitation of Internal Waves in a Shallow Sea Basin with an Open Inlet under Conditions of Parametric Resonance

V. V. Novotryasov

V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,  
Vladivostok, Russia  
✉ vadimnov@poi.dvo.ru

### Abstract

*Purpose.* The purpose of the study is to show (using the *in situ* measurement data) that in autumn under parametric resonance conditions, internal waves (IW) are excited in Posyet Bay under the influence of seiche vibrations of its level.

*Methods and Results.* The spectral analysis methods have revealed a number of IW frequencies close to those of the most intensive seiche vibrations of the bay. The Mathieu equation was obtained and analyzed for the horizontal component of IW orbital velocity. For the conditions for observing IW, the necessary and sufficient conditions for implementing the parametric resonance in the model basin approximating Posyet Bay, were formulated. Verification of these conditions has shown that in autumn both necessary and sufficient conditions of the parametric resonance between the IW and sea level seiche vibrations are fulfilled in the bay.

*Conclusions.* The experimental data indicate that in the autumn season a number of IW frequencies are close to those of free oscillations of the sea level in Posyet Bay. It is shown that the barotropic currents induced by seiche vibrations can excite internal waves by means of parametric resonance.

**Keywords:** seiches, barotropic wave current, Posyet Bay, internal waves, parametric instability, parametric resonance

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of state assignment of POI FEB RAS (theme No. 1240-2210-0072-5).

**For citation:** Novotryasov, V.V., 2024. Excitation of Internal Waves in a Shallow Sea Basin with an Open Inlet under Conditions of Parametric Resonance. *Physical Oceanography*, 31(5), pp. 647-661.

### Введение

Внутренние волны (ВВ) играют значительную роль в процессах перемешивания в приповерхностном и придонном погранслоях, участвуя в их формировании [1, 2]. Наряду с зимней конвекцией, этим волнам принадлежит существенная роль в процессах тепло- и массопереноса в приповерхностном слое в бассейнах, покрытых льдом [3].

Как известно<sup>1</sup> [4], возбуждение ВВ с частотами  $\sim 0,7 N_{\max}$ , где  $N_{\max}$  – максимальное значение частоты плавучести в бассейне, происходит за счет пульсаций давления или тангенциального напряжения ветра. В настоящей работе рассматривается альтернативный механизм возбуждения таких волн. Его основу представляет явление параметрической неустойчивости ВВ, вызванное таким внешним воздействием, как, напр., сейшевые колебания свободной поверхности бассейна. Особенно эффективно этот механизм проявляет себя в условиях параметрического резонанса – особого типа параметрически возбуждаемых колебаний.

---

<sup>1</sup> Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Ленинград : Гидрометеиздат, 1981. 302 с.

Только в последние десятилетия начаты исследования параметрической неустойчивости ВВ в стратифицированной жидкости [5]. В указанной работе приведен ряд соображений о возможности роста высокочастотных возмущений на фоне низкочастотной внутренней волны. Теоретическое исследование параметрической неустойчивости слабо нелинейной внутренней волны содержится в [6]. Здесь показано, что внутренняя волна конечной амплитуды может быть неустойчивой. В работах [7, 8] с использованием натуральных данных установлено, что в результате укрупнения переднего фронта полусуточной внутренней волны в прибрежной зоне залива Посьета идет эффективная генерация ее гармоник с периодами  $T_n = 12,4/n$  (ч),  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

В настоящей работе для случая длинных внутренних и поверхностных волн в морском бассейне с полуоткрытой границей аналитически получены необходимые и достаточные условия возбуждения ВВ посредством параметрического резонанса. Показано, что физическая природа этого механизма возбуждения состоит в параметрической раскачке амплитуды ВВ за счет модуляции горизонтальной компоненты ее орбитальной скорости, вызванной баротропным течением, индуцированным сейшевыми колебаниями. Такой способ генерации волн в устойчиво стратифицированной жидкости существенно отличается от широко известных способов [9, 10] и осуществляется без внесения дополнительной анизотропии в систему, что обеспечивает, в частности, отсутствие пространственного рассеяния энергии, переносимой ВВ. С использованием натуральных данных анализируется возможность осуществления необходимых и достаточных условий параметрического резонанса между полем внутренних волн и баротропным волновым потоком, создаваемым модой Гельмгольца и последующими модами сейшевых колебаний в заливе Посьета.

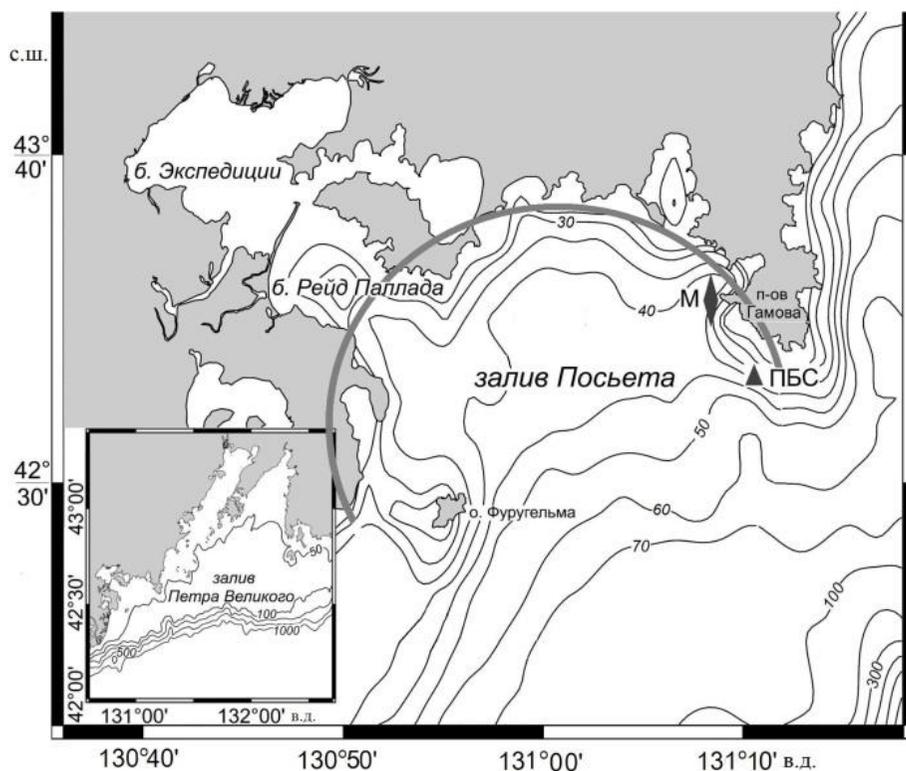
Целью данной работы является изучение процесса параметрической генерации внутренних волн в неглубоком морском бассейне сейшевыми колебаниями его уровня на основе теоретических представлений о параметрическом резонансе в гидродинамических системах и натуральных наблюдений, выполненных в разные годы в заливе Посьета.

### **Район исследования и данные измерений**

Анализ частотного состава сейшевых колебаний проводился с использованием данных, полученных мареографом. Погрешность его измерений составила 0,5 см, интервал дискретизации в октябре 2001 г. – 7,5 мин, в августе 2003 г. – 1 мин. Мареограф был установлен в береговой зоне залива Посьета в районе п-ова Гамов. На карте-схеме залива (рис. 1) его положение обозначено ромбовидным символом. Здесь же на карте показана батиметрия залива, полученная из навигационных карт залива и примыкающих к нему бухт<sup>2</sup>. Полукругом с радиусом  $L \sim 13,5$  км ограничена акватория, аппроксимирующая залив. Согласно навигационной карте, глубина залива на входе составляет  $\sim 45\text{--}50$  м.

---

<sup>2</sup> Атлас залива Петра Великого и северо-западного берега Японского моря до бухты Соколовская (для маломерных судов). Владивосток : ООО «ГИРОСКОП», 2009. 10 с.

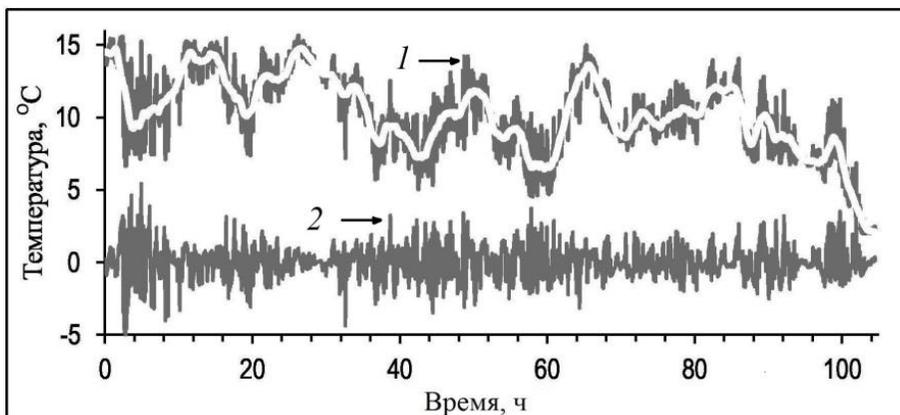


**Р и с. 1.** Карта-схема залива Посьета. На врезке показан залив Петра Великого  
**F i g. 1.** Map-diagram of Posyet Bay. The inset shows Peter the Great Bay

Исследование внутренних волн выполнено по данным измерений вертикального разреза поля температуры с использованием притопленной буйковой станции (ПБС), выставленной 14 сентября 2013 г. на изобате 40 м. Географическое местоположение ПБС показано на рис. 1 черным треугольником. Она была оснащена девятью измерителями температуры НОВО на расстоянии 4 м друг от друга начиная от поверхности. Автономный цифровой термограф НОВО компании *Onset* имеет точность  $0,21^{\circ}\text{C}$  в диапазоне  $0\text{--}50^{\circ}\text{C}$  и разрешение  $0,02^{\circ}\text{C}$  при температуре  $25^{\circ}\text{C}$ , а также 64 Кбайт памяти ( $\sim 42000$  12-битных температурных измерений). Регистрация температуры на станциях проводилась с дискретностью 1 мин. Продолжительность измерений составила чуть более 10 сут.

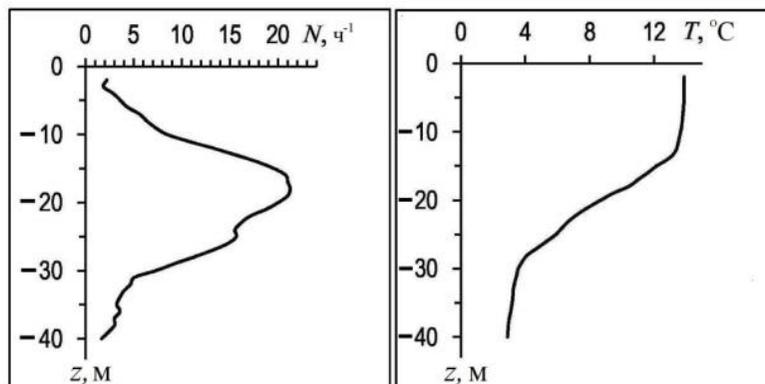
На рис. 2 показаны 5-суточная реализация температуры на горизонте  $z = -24$  м, зарегистрированной термографом ПБС, и ее низкочастотный тренд. Здесь же представлена реализация высокочастотных колебаний температуры.

В районе постановки буйковых станций 13.09.2013 г. было выполнено 8 гидрологических зондирований с дискретностью 3 ч. Зондирования выполнялись с помощью канадского зонда *RBR XRX-620*.



**Р и с. 2.** Температура в районе ПБС (1), ее низкочастотный тренд (кривая белого цвета) и высокочастотные пульсации (2)

**F i g. 2.** Temperature near the moored buoy station (1), its low-frequency trend (white color graph) and high-frequency pulsations (2)



**Р и с. 3.** Среднесуточные профили частоты плавучести ( $N$ ) (слева) и температуры ( $T$ ) (справа) в районе расположения буйковой станции

**F i g. 3.** Mean daily profiles of buoyancy frequency ( $N$ ) (left) and temperature ( $T$ ) (right) in the vicinity of buoy station

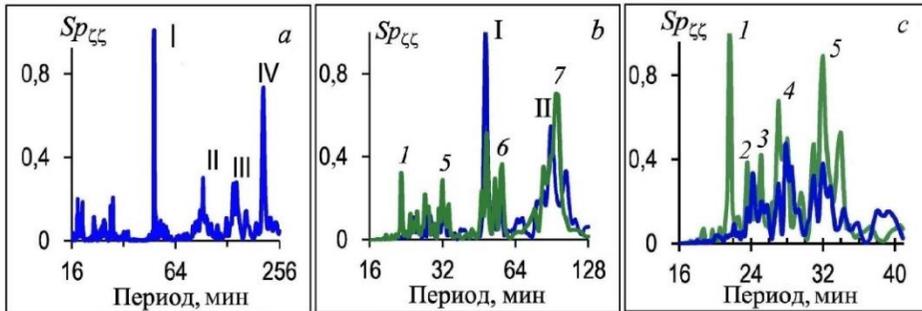
На рис. 3 (слева) показан характерный для осеннего сезона профиль частоты плавучести в заливе Посьета. Представленный профиль  $N(z)$  использовался для расчета фазовой скорости низшей моды ВВ с частотами сейшевых колебаний залива. Анализ среднесуточного профиля температуры (рис. 3, справа) показал, что фоновые условия на горизонте  $z_1 = -24$  м в период эксперимента в окрестности ПБС характеризовались квазилинейной зависимостью температуры от глубины.

### Методика спектральной обработки данных и ее результаты

Характерные временные масштабы сейшевых колебаний уровня ( $\zeta$ ) и пульсаций температуры ( $T$ , °C) морских вод в заливе, вызванных внутренними волнами, определялись с помощью методов стандартного спектрально-

го анализа <sup>3</sup> [11]. Разделение колебаний  $\zeta$  и  $T$  на высокочастотную составляющую и низкочастотный тренд выполнялось с использованием фильтра Хэмминга с окном длительностью 256 мин. Полученные после фильтрации реализации низкочастотного тренда служили фоном для определения частот внутренних волн и сейшевых колебаний с периодами 8–256 мин. Реализации с частотами сейшевых колебаний рассчитывались как разность между исходными реализациями уровня и температуры и реализациями низкочастотного тренда  $\zeta$  и  $T$ . Полученные в итоге временные ряды колебаний  $\zeta$  и  $T$  использовались для расчета спектральных плотностей (далее – спектров) колебаний уровня ( $Sp_{\zeta\zeta}$ ) и пульсаций температуры ( $Sp_{TT}$ ).

Спектры колебаний уровня залива нормированы на максимальное значение, которое приходится на период  $\sim 47$  мин (рис. 4, *a, b*) и на период  $\sim 22$  мин (рис. 4, *c*). Спектр с максимумом, расположенным на периоде  $T_0 \sim 47$  мин, и спектр с менее выразительным широкополосным максимумом на периоде  $T_1 \sim 93$  мин показаны синим цветом. Зеленым цветом выделен спектр с доминирующим максимумом, расположенным на периоде  $T_7 \sim 96$  мин (рис. 4, *b*), и доминирующим максимумом на периоде  $T_1 \sim 22$  мин (рис. 4, *c*). Спектр на рис. 4, *a* рассчитан по двухнедельной реализации, на рис. 4, *b, c* – по двум последовательным недельным реализациям, полученным в октябре 2001 г.



**Р и с. 4.** Нормированные спектры колебаний уровня залива Посыета в августе 2003 г. (*a*) и в октябре 2001 г. (*b, c*)

**Fig. 4.** Normalized spectra of Posyet Bay level fluctuations in August 2003 (*a*) and October 2001 (*b, c*)

Спектр на рис. 4, *a* характеризуется дельтообразным максимумом на периоде  $T_0 \sim 47$  мин, отмеченным римской цифрой I, и менее интенсивным, отмеченным цифрой II, широкополосным максимумом на периоде  $T_1 \sim 96$  мин. В диапазоне периодов, превышающих 100 мин, зафиксированы два максимума, отмеченные римскими цифрами III и IV.

Рассмотрим приведенные на рис. 4, *b, c* спектры, полученные в 2001 г. по двум последовательным 7-суточным реализациям. В диапазоне периодов 16–128 мин цифрами 1, 2, ..., 7 пронумерованы соответствующие максимумы. Приведем значения периодов, на которых эти максимумы располагаются:

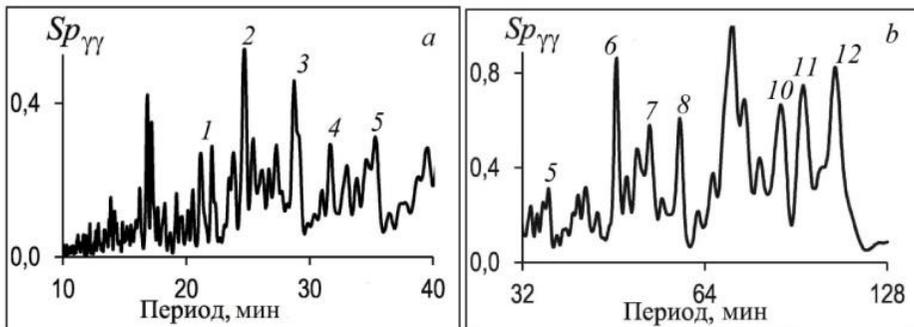
<sup>3</sup> Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Ленинград : Гидрометеиздат, 1987. 320 с.

Максимумы спектра	1	2	3	4	5	6	7
$T_m$ , мин	22	24	25	27	32	47	96

Таким образом, в результате спектрального анализа было установлено интенсивное проявление колебаний уровня в заливе на частотах  $\nu_0 \sim 47 \text{ мин}^{-1}$  и  $\nu_0^+ \sim 1/96 \text{ мин}^{-1}$  и менее интенсивное проявление на частотах  $\nu_1 \sim 1/32 \text{ мин}^{-1}$ ,  $\nu_2 \sim 1/27 \text{ мин}^{-1}$  и  $\nu_3 \sim 1/25 \text{ мин}^{-1}$ .

Рассмотрим спектральный состав пульсаций температуры в заливе. Приведем результаты расчета энергетического спектра этих пульсаций в диапазонах 10–40 и 32–128  $\text{мин}^{-1}$ , т. е. в тех же диапазонах, что и колебания его уровня. Спектральный анализ выполнялся по реализации высокочастотных пульсаций температуры, зарегистрированных термографом ПБС на горизонте  $z_1 = -20 \text{ м}$  (рис. 2).

На рис. 5 показан спектр, нормированный на максимальное значение пульсаций температуры, зарегистрированной на горизонте  $z = -24 \text{ м}$  с помощью ПБС. Цифрами 1–12 обозначены номера соответствующих максимумов спектра, которые располагаются на низкочастотном фоне, что свидетельствует о модуляции этих пульсаций низкочастотной составляющей.



**Р и с. 5.** Нормированный спектр пульсаций температуры в диапазонах 10–40 мин (a) и 32–128 мин (b)

**F i g. 5.** Normalized spectrum of temperature pulsations in the ranges 10–40 min (a) and 32–128 min (b)

Приведем значения периодов  $T_m$  (мин) максимумов спектра  $Sp_{TT}$ , показанного на рис. 5:

Максимумы спектра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_m$ , мин	22	25	28	32	35	46	52	58	71	85	93	105

На спектрах, прежде всего, обращают на себя внимание узкополосный максимум на частоте  $\nu_0 \sim 1/46 \text{ мин}^{-1}$  с  $m = 6$ . Кроме этого, следует также отметить, что максимумы на частотах  $\nu_1 \sim 1/25 \text{ мин}^{-1}$  и  $\nu_2 \sim 1/28 \text{ мин}^{-1}$  близки к максимумам на частотах сейшевых колебаний залива  $\sim 1/25 \text{ мин}^{-1}$  и  $\sim 1/27 \text{ мин}^{-1}$ .

Анализируя спектр пульсаций температуры, представленный на рис. 3, а, отметим, что разности между частотами  $\nu_1 - \nu_0$  и  $\nu_2 - \nu_0$  близки к частотам максимумов в спектре на периодах 52 и 71 мин<sup>-1</sup>. Другими словами, для частот, соответствующих этим периодам, выполняются следующие приближенные соотношения:  $\nu_1 - \nu_0 \sim 1/55$  мин<sup>-1</sup> и  $\nu_2 - \nu_0 \sim 1/72$  мин<sup>-1</sup>. Следует заметить также, что частоты  $\nu_0 \sim 1/46$  мин<sup>-1</sup>,  $\nu_1^- \sim 1/105$  мин<sup>-1</sup>,  $\nu_2^- \sim 1/180$  мин<sup>-1</sup>, в окрестности которых располагаются максимумы спектра, удовлетворяют приближенным выражениям  $\nu_n \sim \nu_0 + \nu_n^-$ , где  $n$  равно 1 и 2,  $\nu_1 \sim 1/32$  мин<sup>-1</sup> и  $\nu_2 \sim 1/37$  мин<sup>-1</sup>.

Отмеченные особенности спектров в районе постановки буйковой станции могут служить косвенным указанием на параметрическую неустойчивость внутренней волны, вызванную в том числе сейшевыми колебаниями.

### Параметрическое возбуждение внутренних волн в неглубоком морском бассейне сейшевыми колебаниями его свободной поверхности

Введем прямоугольную систему координат с осью  $z$ , направленной вертикально вверх, ось  $x$  совместим с направлением скорости баротропного одномерного потока стратифицированной жидкости. Система уравнений гидродинамики для достаточно длинных линейных ВВ в приближении Буссинеска в указанном потоке имеет следующий вид [4, 10]:

$$D_0 u = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - b = 0, \quad (1)$$

$$D_0 \rho = w \frac{d\rho_0}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $D_0 = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$ ,  $U$  – скорость баротропного потока;  $u$  и  $w$  – горизонтальная и вертикальная компоненты орбитальной скорости внутренней волны;  $p$  и  $\rho$  – волновые возмущения давления и плотности;  $\rho_0(z)$  – средняя плотность слоя жидкости;  $b = \rho g/\rho_0$  – волновые флуктуации плавучести на единицу объема. Систему уравнений (1), (2) преобразуем к одному уравнению для  $u$  следующего вида:

$$D_0^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{N} \frac{dN}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где  $N(z) = (gd \ln \rho_0 / dz)^{1/2}$  – частота плавучести.

Поскольку система уравнений (1), (2) однородна по горизонтали, решение уравнения (3) описывается суперпозицией мод ВВ произвольной формы  $u_m \sim \psi(c_m t) \varphi_m(z) \exp(ikx)$ . В этом выражении  $\psi_m(t)$  – амплитудная функция волновой моды с номером  $m$ ;  $\varphi_m(z)$  и  $c_m$  – собственная функция и собственное значение краевой задачи

$$\frac{d^2\varphi_m}{dz^2} - \frac{2}{N} \frac{dN}{dz} \frac{d\varphi_m}{dz} + \frac{N^2}{c_m^2} \varphi_m = 0, \quad \varphi_m(0) = \varphi_m(-H) = 0. \quad (4)$$

Здесь принято, что дно ( $z = -H$ ) и свободная поверхность ( $z = 0$ ) представляют собой твердые стенки.

Для функции  $\psi_m(t)$  (далее индекс  $m$  опускаем, полагая  $m = 1$ ) с учетом ортогональности набора функций  $\varphi_m(z)$  после ряда преобразований получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2i(kU) \frac{d\psi}{dt} + \left[ (kU)^2 + (kc_{ph})^2 \right] \psi = 0, \quad (5)$$

которое редуцируем к нормальной форме, воспользовавшись преобразованием  $\psi(t) = \zeta(t) \exp(i \int kU dt)$ . В результате получим следующее уравнение для функции  $\zeta(t)$ :

$$d^2\zeta/dt^2 + \left[ (kc_{ph})^2 - i(k dU/dt)^2 \right] \zeta = 0. \quad (6)$$

Зададим скорость баротропного течения, пульсирующего с частотой  $\omega$ , следующим образом:  $U = u_0 \exp(i\omega t)$ . Тогда мнимое слагаемое в квадратных скобках уравнения (6) равно  $\omega kU$ . Представим решение уравнения (6) в виде суммы реальной и мнимой частей. В этом случае реальная часть решения (обозначим ее как  $\eta = \text{Re}(\zeta)$ ) удовлетворяет уравнению

$$d^2\eta/dt^2 + \Omega_0^2 (1 + \mu \sin(\Omega t)) \eta = 0, \quad (7)$$

где  $\mu = (u_0/c_{ph})(\Omega/\Omega_0)$ , а размерные величины (обозначены штрихами) имеют вид  $\eta = \eta'/H$ ,  $t = t'/N_{\max}$ ,  $\Omega = \omega/N_{\max}$ ,  $\Omega_0 = \omega_0/N_{\max}$ ,  $\omega_0 = kc_{ph}$  – частота внутренней волны.

Таким образом, при распространении внутренней волны фиксированной, (низшей) моды в пульсирующем с частотой  $\omega$  баротропном потоке реальная часть ее амплитудной функции эволюционирует согласно уравнению (7).

Уравнение (7) представляет собой известное уравнением Матье. Его общее решение имеет вид<sup>4</sup>

$$\eta(t) = C_1 \exp(-i\sigma t) \Phi(t) + C_2 \exp(-i\sigma t) \Phi(-t), \quad (8)$$

где  $C_1, C_2$  – константы;  $\Phi(t)$  и  $\Phi(-t)$  – периодические функции. Величина  $\sigma$  характеризует скорость роста решения (8), является комплексной функцией параметров  $\omega_0$  и  $\mu$ . В этом случае решение (8) экспоненциально растет со временем. Явление, заключающееся в нарастании колебаний параметров гидродинамической системы, называют параметрическим резонансом.

<sup>4</sup> Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. Москва: Наука, 1987. 328 с.

Покажем, что в морском бассейне под воздействием слабых периодических колебаний скорости баротропного потока  $U = u_0 \sin(\omega t)$ , создаваемого сейшевыми колебаниями уровня, возможна параметрическая генерация ВВ с фазовой скоростью  $c_{ph}$  при условии  $u_0^2 \ll c_{ph}^2$ . В процессе генерации амплитуда волны, заданная функцией  $\eta(t)$ , описывается уравнением (7). Будем искать решение этого уравнения в области основного демультимпликативного резонанса, т. е. при выполнении условия  $|\Omega_0 - \Omega/2| \leq \mu$  в виде

$$\eta(t) = A(t) \sin[\Omega t/2 - \theta(t)]. \quad (9)$$

Воспользовавшись методом усреднения Крылова – Боголюбова <sup>5</sup>, для амплитуды  $A$  и фазы  $\theta$  получаем систему уравнений

$$dA/dt = \varepsilon A \cos(2\theta), \quad d\theta/dt = \delta - \varepsilon \cos(2\theta), \quad (10)$$

где  $\varepsilon = -\mu\Omega_0/4$ ;  $\delta = \Omega_0 - \Omega/2$ . Система (10) обладает инвариантом

$$I = A^2(d\theta/dt) = \text{const}, \quad (11)$$

что позволяет ее легко проинтегрировать. При этом оказывается, что при выполнении условия  $\varepsilon^2 > \delta^2$  существует решение вида  $A \sim \exp(t\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2})$ .

В этом можно убедиться простой подстановкой указанного решения в уравнение (7). Таким образом, амплитуда фиксированной моды ВВ пропорциональна  $\exp(t\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2})$ , а условием ее экспоненциального роста малой амплитуды горизонтальной скорости волновых течений является условие  $|\delta| < \varepsilon$ , которое соответствует критерию параметрической неустойчивости колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса в отсутствие трения <sup>6</sup>. Кроме того, должны соблюдаться условия малости параметра  $\mu \ll 1$  и параметрического резонанса частот  $|\delta| < \min\{\mu, \varepsilon\}$ . Отсюда с учетом неравенства  $\mu \ll 1$  условие «раскачки» амплитуд внутренних волн однородным по глубине пульсирующим потоком с частотой  $\Omega$  и максимальным значением его скорости  $u_0$  принимает вид

$$|\Omega_0 - \Omega/2| = \Omega u_0 / 4c_{ph}. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что параметрический резонанс должен иметь место при любом  $\omega = n\omega_0/2$  (где  $n$  – целое число), в том числе и при  $n = 2$ . При этом границы второй зоны параметрической генерации определяются неравенствами из работы <sup>7</sup>:

$$-5\mu^2 \omega / 24 < \omega_0 - \omega < \mu^2 \omega / 4, \quad (13)$$

где  $\omega$  – частота пульсирующего баротропного течения.

<sup>5</sup> Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев : Издательство АН УССР, 1937. 363 с.

<sup>6</sup> Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Москва : Наука, 1965. 204 с.

<sup>7</sup> Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва : Наука, 1984. 432 с. EDN ХУСРСЛ.

В заключение сформулируем необходимые и достаточные условия, при которых реализуется параметрическая генерация ВВ в неглубоком бассейне под воздействием модуляции ее горизонтальной компоненты скорости орбитального движения, вызванной баротропным течением сейшевых колебаний свободной поверхности бассейна.

Параметрическая генерация ВВ фиксированной моды с фазовой скоростью  $c_{ph}$  и волновым числом  $k$  в морском бассейне глубиной  $H$  полем стоячих поверхностных волн с частотой  $\omega$  возможна при выполнении следующих условий:

– длины внутренней ( $\lambda_{int}$ ) и поверхностной ( $\lambda_{sur}$ ) волн значительно превышают глубину бассейна  $H$ , т. е.  $H \ll \lambda_{int} \ll \lambda_{sur}$ , а частотный диапазон ВВ ограничен частотой  $\omega_*/2$ , где  $\omega_*$  – низшая частота сейшевых колебаний бассейна;

– фазовая скорость ВВ ( $c_{ph}$ ) значительно превышает максимальное значение скорости баротропного течения ( $u_0$ ), т. е. их отношение  $\mu = (u_0/c_{ph}) \ll 1$ . Расстройка между частотой ВВ  $\omega_0 = kc_{ph}$  и частотой сейшевых колебаний  $\omega$  не должна превышать произведения  $\mu\omega$ , т. е.  $|\omega_0 - \omega| < \mu\omega$ .

С использованием натуральных данных покажем, что в модельном бассейне с акваторией полукруглой формы, аппроксимирующем залив Посьета, в осенний сезон формируются необходимые и достаточные условия для возбуждения ВВ под воздействием параметрического резонанса, вызванного фундаментальной нулевой модой (модой Гельмгольца), а также первой, второй и последующими модами сейшевых колебаний водной массы залива.

### Обсуждение

Спектральный анализ пульсаций температуры, вызванных полем ВВ в заливе, показал, что ряд частот этих пульсаций близок к частотам сейшевых колебаний уровня. Следовательно, необходимое условие для параметрического возбуждения ВВ сейшевыми колебаниями выполнено.

В осенний период, для которого характерны интенсивные сейшевые колебания, выполнено достаточное условие для осуществления параметрического резонанса между волновыми движениями. Следовательно, в этот период в заливе Посьета под воздействием сейшевых колебаний возбуждаются ВВ.

Обратимся к данным натуральных измерений уровня в заливе. На рис. 4 показан характерный для октября спектр колебаний свободной поверхности залива в частотном диапазоне  $1/16$ – $1/256$  мин<sup>-1</sup>. На спектре выделяются два доминирующих максимума на периодах 47 и 92 мин и три менее выразительных максимума на периодах  $\sim 33$ ,  $\sim 28$  и  $\sim 25$  мин соответственно. Следует заметить, что отношение этих периодов к периоду  $T \sim 47$  мин составляет  $\sim 0,7$ ,  $\sim 0,6$  и  $\sim 0,5$ .

В ряде экспериментальных работ [12–15] установлено, что наибольшей интенсивностью в бассейне с полузакнутой акваторией обладает мода Гельмгольца – продольное колебание уровня и скорости баротропного течения с периодом  $T_0$ , направленного по нормали к открытой границе. Для бассейнов простейшей формы периоды первой и последующих мод рассчитываются по формуле из работ [16, 17]

$$T_m = \alpha_m T_0 / (2m + 1), \quad (14)$$

где  $T_0$  – период моды Гельмгольца;  $\alpha_m$  – параметр, характеризующий форму бассейна;  $m$  – номер моды.

В работе [18] приведена таблица 2.1 с периодами продольных мод свободных колебаний в бассейнах простейшей формы. Согласно этой таблице, в бассейне полукруглой формы с профилем глубины, заданным зависимостью  $h(x) = h_1(1-x^2/L^2)$ , отношение  $\alpha_m/(2m+1)$  равно  $\sim 0,7$ ,  $\sim 0,6$  и  $\sim 0,5$  для  $m$ , равных 1, 2 и 3 соответственно. Период моды Гельмгольца для такого бассейна рассчитывается по формуле

$$T_0 = 2,2 \cdot 2L / \sqrt{gh_1}, \quad (15)$$

где  $h_1$  – глубина на входе бассейна;  $L$  – его длина, равная радиусу акватории бассейна.

Предположим, что максимум в спектре колебаний уровня принадлежит моде Гельмгольца, в этом случае  $T_0 = 47$  мин. Тогда периоды первой, второй и последующих мод равны 33, 28 и 24 мин. Определив период самого интенсивного колебания ( $T_0$ ) свободной поверхности и зная глубину бассейна на входе ( $h_1$ ), нетрудно определить его длину. Воспользовавшись соотношением (15), получим выражение  $L = (gh_1)^{1/2} (T_0/4,44)$ . Отсюда длина бассейна  $L$  при глубине на его входе  $h_1 \sim 45$  м и периоде моды Гельмгольца  $T_0 = 47$  мин составит  $\sim 13,5$  км.

На карте-схеме залива Посьета (рис. 1) показана акватория полукруглой формы с диаметром и глубиной на входе  $\sim 28$  км и  $\sim 45$  м соответственно. Согласно рис. 1, геометрические размеры модельного бассейна, а также его форма и профиль дна в первом приближении удовлетворительно согласуются с размерами и формой залива Посьета.

В неглубоких заливах и гаванях наряду с продольными колебаниями присутствуют и поперечные сейшевые колебания [19]. В дальнейшем нам потребуются периоды первой и последующих мод этого типа колебаний. Для рассматриваемого бассейна период первой моды рассчитывается по формуле  $\tau_1 = \tau_{\max} / \sqrt{2}$ . В этом выражении  $\tau_{\max} = 8,88L / \sqrt{gh_1}$ . Следовательно, для указанных параметров бассейна период первой поперечной сейши  $\tau_1$  составит 70 мин.

Таким образом, в модели морского бассейна полукруглой формы с квадратичным профилем дна мода Гельмгольца, первая и последующие моды имеют периоды 47, 34, 29 и 24 мин. В этом же бассейне первая и последующие моды поперечных сейш имеют периоды, близкие к  $\tau_1 = 70$  мин,  $\tau_2 = 44$  мин,  $\tau_3 = 31$  мин,  $\tau_4 = 24$  мин.

Обратимся к анализу частотного состава внутренних волн в районе исследования. На рис. 5 представлен спектр пульсаций температуры, вызванных этими волнами. Спектр рассчитан в диапазоне периодов 10–128 мин, общем с диапазоном периодов сейшевых колебаний. Цифрами на спектре выделены его максимумы, периоды которых близки к периодам максимумов в спектре колебаний свободной поверхности залива, т. е. его сейшевых колебаний.

Расчеты, выполненные с использованием профиля частоты плавучести (рис. 3), показали, что фазовая скорость первой моды ВВ лежит в интервале  $0,15-0,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , а длина волны  $\lambda_{in}$  с периодом  $T_{in} \sim 15$  мин составляет  $\sim 300$  м. Следовательно, залив является мелким морским бассейном для ВВ с периодами, превышающими 15 мин.

Покажем, что морской бассейн с глубиной на входе 45 м является мелким для поверхностной волны с периодом  $T_{sr} \sim 15$  мин. Длина поверхностных волн  $\lambda_{sr}$  (равная  $(gh_1)^{1/2} T_{sr}$ ) с этим периодом составляет  $\sim 19$  км, что значительно превышает  $\lambda_{in}$ . Следовательно, залив является морским бассейном, в котором выполняется неравенство  $\lambda_{sr} \gg \lambda_{in} \gg H$ , т. е. он является мелким бассейном как для поверхностных, так и для внутренних волн с частотами из частотного диапазона сейшевых колебаний.

Достаточное условие для «раскачки» амплитуд внутренних волн с периодом  $T_{int}$  сейшевыми колебаниями с периодом  $T_{sr}$  с учетом (12) примет следующий вид:

$$|1 - 2T_{sr}/T_{int}| \leq \mu / 2, \quad (16)$$

где  $\mu = (u_0/c_{ph})$ .

Покажем, что амплитуда внутренней волны с фазовой скоростью  $c_{ph} \sim 0,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  и периодом  $T_{int} \sim 93$  мин параметрически «раскачивается» модой Гельмгольца с амплитудой  $\zeta_0 \sim 0,1$  м и периодом  $T_{sur} \sim 47$  мин в зоне основного резонанса. С этой целью выполним проверку достаточного условия для реализации этого процесса. Условие (12) представим в виде

$$\delta T/T_{int} \leq (u_0/c_{ph})(T_{int}/T_{sur})/2, \quad (17)$$

где  $\delta T = (T_{int} - 2T_{sur})$  – расстройка периода;  $u_0 = \zeta_0 \sqrt{g/H}$  – максимальная скорость баротропного течения, создаваемого модой Гельмгольца. Воспользовавшись заданными значениями, получим  $\delta T/T_{int} \sim 10^{-2}$ ,  $u_0/c_{ph} \sim 2,5 \cdot 10^{-1}$ . Таким образом, правая часть соотношения (17) составит  $\sim 0,2$ , что на порядок превышает значение левой части этого соотношения. Следовательно, достаточное условие экспоненциального роста амплитуды волны с периодом 93 мин и фазовой скоростью  $\sim 0,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  выполнено.

Выполним проверку достаточного условия, при котором возможно возбуждение ВВ с частотами сейшевых колебаний залива, т. е. параметрическое возбуждение волн в первой зоне параметрического резонанса. Представим это условие в соответствии с (13) в виде

$$\delta T \leq (u_0/c_{ph})^2 T_{int} / 2.$$

Согласно работам [16, 17],  $u_0 = \eta_0 \sqrt{g/H}$ , тогда  $u_0 \sim 0,047 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Учитывая, что  $c_{ph} \sim 0,25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , получим  $(u_0/c_{ph})^2 \sim 0,035$ . Отсюда расстройка периода внутренней волны с  $T_{int} = 47$  мин не должна превышать 0,5 мин.

Очевидно, что проверка достаточного условия (13) с использованием данных натурального эксперимента весьма сложная в методическом плане задача. Относительная стабильность частоты возбуждения внутренней волны с периодом 47 мин, равная отношению  $\delta T/T_{int}$ , составляет  $\sim 1\%$ , что в морских условиях на интервале возбуждения, верхняя граница которого  $\sim 8$  ч, маловероятно.

Вместе с тем возбуждение внутренних волн в первой зоне параметрического резонанса возможно в рамках следующей схемы. Заметим, что периоды самых значительных максимумов спектра  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  равны 17, 25, 29 и 47 мин соответственно. На эти же периоды приходятся близкие к предыдущим периоды 16, 26, 30 и 44 мин гармоник полусуточного прилива с периодом 12,4 ч.

В работе [18] было установлено, что в заливе Посьета приливная ВВ с полусуточным периодом в процессе распространения изменяет свою форму, т. е. скорость частиц жидкости на ее вершине превышает скорость частиц в подошве. В спектральном описании волнового движения это означает появление в спектре максимумов на периодах  $T_n = 12,4/n$  (ч), где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , – номер гармоники. Следовательно, при распространении в волновом поле стоячих поверхностных волн с частотами сейшевых колебаний между этим полем и соответствующими гармониками приливной внутренней волны с частотой  $1/12,4$  ч<sup>-1</sup> возможен параметрический резонанс.

Другими словами, в процессе распространения в мелководную зону залива, охваченную сейшевыми колебаниями, полусуточная приливная ВВ под действием квадратичной нелинейности трансформируется из гармонической волны с частотой  $\nu = 1/12,4$  ч<sup>-1</sup> в полигармоническую волну с частотами гармоник  $\nu_n = n\nu$ . При близких значениях между частотами сейшевых колебаний и частотами гармоник приливной ВВ наступает параметрический резонанс, т. е. экспоненциальное возрастание амплитуд соответствующих гармоник приливной ВВ.

Таким образом, при наличии достаточно интенсивных сейшевых колебаний уровня и слабо нелинейной ВВ с частотой  $\nu = 1/12,4$  ч<sup>-1</sup> в заливе реализуется достаточное условие для параметрической генерации в первой зоне параметрического резонанса ВВ с частотами сейшевых колебаний.

### Заключение

В настоящей работе проанализированы результаты натурных исследований в заливе Посьета стоячих поверхностных и свободных внутренних волн из частотного диапазона  $1/16$ – $1/256$  мин<sup>-1</sup>. С использованием Фурье-анализа определены частоты, на которые приходятся самые значительные максимумы в спектрах как поверхностных, так и внутренних волн в указанном частотном диапазоне. Установлена близость ряда частот, на которых располагаются эти максимумы в спектрах указанных волновых процессов.

С использованием модельного бассейна, аппроксимирующего залив Посьета, были получены оценки периодов моды Гельмгольца и последующих мод в таком бассейне. Анализ спектра колебаний свободной поверхности залива показал, что его максимумы приходятся на указанные выше периоды, которые являются периодами свободных колебаний уровня или сейш залива.

Таким образом, в заливе в осенний период формируются необходимые условия параметрической неустойчивости внутренних волн, вызванные сейшевыми колебаниями уровня.

В рамках теории параметрического резонанса было установлено, что под воздействием баротропного течения, вызванного сейшевыми колебаниями, происходит модуляция горизонтальной компоненты скорости орбитального движения внутренней волны. При соответствующем отношении  $u_0/c_{ph} \ll 1$  в заливе реализуется достаточное условие параметрического возбуждения внутренних волн в нулевой зоне параметрического резонанса.

В рамках этой же теории было показано, что в заливах и бухтах окраинных морей возможно возбуждение внутренних волн в первой зоне параметрического резонанса с частотами гармоник внутренней волны с частотой  $\nu_{id} = 1/12,4 \text{ ч}^{-1}$ . Условием этого резонанса является близость частот моды Гельмгольца и последующих мод бассейна к частотам гармоник внутреннего прилива.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rates and mechanisms of turbulent dissipation and mixing in the Southern Ocean: Results from the Diapycnal and Isopycnal Mixing Experiment in the Southern Ocean (DIMES) / K. L. Sheen [et al.] // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2013. Vol. 118, iss. 6. P. 2774–2792. <https://doi.org/10.1002/jgrc.20217>
2. *MacIntyre S.* Vertical mixing in a shallow, eutrophic lake: Possible consequences for the light climate of phytoplankton // *Limnology and Oceanography*. 1993. Vol. 38, iss. 4. P. 798–817. <https://doi.org/10.4319/lo.1993.38.4.0798>
3. Резонансное возбуждение короткопериодных внутренних волн баротропными сейшами в покрытом льдом мелководном озере / С. Ю. Волков [и др.] // *Морской гидрофизический журнал*. 2020. Т. 36, № 4. С. 407–423. EDN EUVONQ. <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2020-4-407-423>
4. *LeBlond P. H., Mysak L. A.* Waves in the Ocean. Amsterdam, Oxford, New York : Elsevier Scientific Publishing Company, 1978. 602 p. (Elsevier Oceanography Series ; vol. 20).
5. *McEwan A. D., Robinson R. M.* Parametric instability of internal gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 67, iss. 4. P. 667–687. <https://doi.org/10.1017/S0022112075000547>
6. *Stepanov D. V., Novotryasov V. V.* Sub-inertial modulation of nonlinear Kelvin waves in the coastal zone // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013. Vol. 20, iss. 3. P. 357–364. <https://doi.org/10.5194/npg-20-357-2013>
7. *Novotryasov V., Filonov A., Lavin M. F.* Nonlinear internal tidal waves in a semi-enclosed sea (Gulf of California) // *Geophysical Research Letters*. 2011. Vol. 38, iss. 24. L24611. <https://doi.org/10.1029/2011GL049886>
8. *Новотрясов В. В., Павлова Е. П.* Определение параметров низкочастотных внутренних волн в прибрежной зоне окраинного моря с использованием натуральных измерений на основе нелинейной теории // *Метеорология и гидрология*. 2011. № 4. С. 82–86. EDN NWASCT.
9. *Лайтхилл Д.* Волны в жидкостях. Москва : Мир, 1981. 598 с.
10. *Miropol'sky Yu.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean / Ed. O. D. Shishkina. Dordrecht : Springer, 2001. 406 p. (Atmospheric and Oceanographic Sciences Library ; vol. 24).
11. *Thomson R. E., Emery W. J.* Data Analysis Methods in Physical Oceanography. Amsterdam, Netherlands : Elsevier Science, 2001. 654 p.

12. *Rabinovich A. B.* Seiches and Harbor Oscillations. Chapter 9 // Handbook of Coastal and Ocean Engineering / Ed. Y. C. Kim. Singapore : World Scientific Publishers, 2009. P. 193–236. [http://dx.doi.org/10.1142/9789812819307\\_0009](http://dx.doi.org/10.1142/9789812819307_0009)
13. Study of Free Oscillations of Bays in the Northwestern Part of Posyet Bay / V. Chupin [et al.] // Journal of Marine Science and Engineering. 2022. Vol. 10, iss. 8. 1005. <https://doi.org/10.3390/jmse10081005>
14. Исследование резонансных колебаний в восточной части залива Посьета / С. В. Смирнов [и др.] // Метеорология и гидрология. 2018. № 2. С. 37–44. EDN YPPJMR.
15. Собственные колебания уровня воды в бухтах залива Посьета Японского моря / Г. И. Долгих [и др.] // Метеорология и гидрология. 2016. № 8. С. 57–63. EDN WIMTMB.
16. *Манилюк Ю. В., Черкесов Л. В.* Исследование сейшевых колебаний в бухте со свободным входом // Морской гидрофизический журнал. 2017. № 4. С. 16–25. EDN ZMNTTL. <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2017-4-16-25>
17. *Иванов В. А., Манилюк Ю. В., Санников В. Ф.* Сейши в бассейне с открытым входом // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 23–30. EDN XTUVKX. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180404>
18. *Рабинович А. Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. СПб. : Гидрометеиздат, 1993. 326 с.
19. *Wilson B. W.* Seiches // Advances in Hydrosience. 1972. Vol. 8. P. 1–94. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-021808-0.50006-1>

*Об авторе:*

**Новотрясов Вадим Васильевич**, ведущий научный сотрудник отдела физики океана и атмосферы, ФГБУН ТОИ ДВО РАН (690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, д. 43), доктор физико-математических наук, доцент, **SPIN-код: 4584-8071**, **ORCID ID: 0000-0003-2607-9290**, [vadimnov@poi.dvo.ru](mailto:vadimnov@poi.dvo.ru)