

УДК 532.59

Н. В. Маркова, Л. В. Черкесов

Влияние геометрических характеристик бассейна на пространственную структуру вынужденных колебаний

Методом математического моделирования изучается влияние изменения ширины и глубины кольцевого бассейна с параболическим профилем дна на пространственную структуру волн, генерируемых периодическими по времени изменениями атмосферного давления. Исследование проводится в предположениях линейной теории длинных волн с учетом действия силы Кориолиса. Сравниваются структуры профилей поверхности жидкости свободных и вынужденных волн. Найдены зависимости от геометрии бассейна периодов атмосферных возмущений, при которых количество узловых точек профиля свободной поверхности вынужденных колебаний совпадает с числом узловых точек профиля поверхности жидкости в случае свободных колебаний.

Введение. В монографии [1] изложено исследование свободных линейных колебаний однородной невязкой жидкости в невращающемся кольцевом бассейне постоянной глубины. Решение аналогичной задачи для кругового бассейна в рамках теории длинных волн и общей линейной теории получено в [1–4]. В [5–7] с использованием численных методов изучалось влияние силы Кориолиса и геометрических характеристик водоема на свободные колебания идеальной жидкости в кольцевом бассейне. В данной работе продолжено исследование волновых движений жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины, вызываемых поверхностными давлениями.

Постановка задачи. Рассмотрим кольцевой бассейн переменной глубины, заполненный однородной невязкой жидкостью. Функция глубины h зависит только от одной пространственной координаты r . Будем полагать волны длинными, а колебания малыми. Учтем действие силы Кориолиса. В качестве вынуждающей силы рассмотрим периодические по времени возмущения атмосферного давления вида

$$p(r, \theta, t) = p_0 \psi(r) \sin(s\theta + \sigma t), \quad (1)$$

где p_0 — амплитуда возмущений атмосферного давления, s — волновое число ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), σ — частота вынужденных колебаний, $\psi(r)$ — безразмерная функция, максимум которой равен 1.

В полярных координатах уравнения движения записываются так [3]:

$$u_t - fv = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho} p_r, \quad (2)$$

$$v_t + fu = -\frac{1}{r} (g\zeta_\theta - \frac{1}{\rho} p_\theta), \quad (3)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r} [(hur)_r + hv_\theta]. \quad (4)$$

Здесь $\zeta(r, \theta, t)$ — возвышение свободной поверхности, $u(r, \theta, t)$ — радиальная и $v(r, \theta, t)$ — касательная составляющие скорости жидкости, $h(r)$ — глубина бассейна, остальные обозначения общепринятые.

Потребуем выполнения условий непротекания на вертикальных боковых стенках $r = a_1, r = a_2$:

$$u(a_1, \theta, t) = 0, \quad u(a_2, \theta, t) = 0. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (2) – (4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \bar{\zeta}(r) \sin(s\theta + \sigma t), \\ u(r, \theta, t) &= \bar{u}(r) \cos(s\theta + \sigma t), \\ v(r, \theta, t) &= \bar{v}(r) \sin(s\theta + \sigma t). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$\bar{p}(r) = \frac{1}{\rho} p_0 \psi(r), \quad (7)$$

где $\psi(r) = (r - a_1)/(a_2 - a_1)$.

Тогда (1) можно записать так:

$$p(r, \theta, t) = \rho \bar{p}(r) \sin(s\theta + \sigma t). \quad (8)$$

Подставляя (6), (8) в (2), (3) и решая полученную систему, находим такие выражения для амплитуд радиальной и касательной составляющих скорости:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r) &= \frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} \left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \psi \right) \right], \\ \bar{v}(r) &= -\frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} \left[\frac{f}{\sigma} \bar{\zeta}_r + \frac{s}{r} \bar{\zeta} + d \left(\frac{f}{\sigma} \psi_r + \frac{s}{r} \psi \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $d = p_0/\rho g$.

Для определения амплитуды возвышения свободной поверхности $\bar{\zeta}(r)$ из (9) и (4) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} r^2 h \bar{\zeta}_{rr} + (r^2 h_r + rh) \bar{\zeta}_r + \frac{\sigma^2 - f^2}{g} r^2 \bar{\zeta} = \\ = -d \left[r^2 h \psi_{rr} + (r^2 h_r + rh) \psi_r + \left(\frac{f}{\sigma} srh_r - s^2 h \right) \psi \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (6) граничные условия (5) перепишем так:

$$\left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \psi \right) \right]_{r=a_1} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{p} \right) \right]_{r=a_2} = 0.$$

Уравнение (10) имеет общее решение вида

$$\bar{\zeta}(r) = c_1 \bar{\zeta}_1(r) + c_2 \bar{\zeta}_2(r) + \bar{\zeta}_3(r), \quad (12)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий (11); $\bar{\zeta}_1(r), \bar{\zeta}_2(r)$ — фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (10); $\bar{\zeta}_3(r)$ — частное решение уравнения (10).

Функции $\bar{\zeta}_j(r)$, ($j = 1; 2; 3$) находим методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [8].

Численное моделирование. Поставим своей целью исследование влияния геометрических характеристик кольцевого бассейна на пространственную структуру вынужденных волн. Глубина бассейна меняется по параболическому закону

$$h(r) = h_2(r - a_1)^2 + h_1(r - a_1) + h_0, \quad (13)$$

где a_1 — внутренняя граница бассейна, находящаяся для каждого из бассейнов на расстоянии 50 км от центра кольца ($a_1 = 50$ км); h_0 — глубина бассейна при $r = a_1$. Другие параметры бассейнов (расстояние от центра до внешней границы кольца a_2 , максимальная глубина бассейна h_m) таковы:

$$a_2 = 1000 \text{ км}, h_m = 1000 \text{ м}; \quad (14)$$

$$a_2 = 1000 \text{ км}, h_m = 4000 \text{ м}; \quad (15)$$

$$a_2 = 3000 \text{ км}, h_m = 1000 \text{ м}; \quad (16)$$

$$a_2 = 3000 \text{ км}, h_m = 4000 \text{ м}. \quad (17)$$

Глубины у внутренней и внешней стенок каждого из бассейнов выбирались равными 1 м. Параметр s принимал значения 0; 1; 2. Перепад атмосферного давления на границах бассейна выбирался равным 5 гПа. Параметр Кориолиса f соответствовал 60° с.ш. (инерционный период 13 ч 51 мин 23 с).

В работе [6] для бассейнов (14), (15) и (16), (17) определены периоды свободных линейных колебаний (СЛК) τ_{is}^0 первых трех мод ($i = 1; 2; 3; s = 0; 1; 2$). В окрестностях этих периодов в результате проведенных численных экспериментов найдены интервалы периодов вынужденных колебаний (ВК) $[\tau_{is}^a, \tau_{is}^b]$ ($\tau_{is}^0 \in [\tau_{is}^a, \tau_{is}^b]$), внутри которых количество узловых точек свободной поверхности ВК совпадает с количеством узловых точек свободной поверхности СЛК i ($i = 1, 2, 3$). Будем обозначать в дальнейшем $\Delta\tau_{is}^+ = \tau_{is}^b - \tau_{is}^0$, $\Delta\tau_{is}^- = \tau_{is}^0 - \tau_{is}^a$, $\Delta\tau_{is} = \tau_{is}^b - \tau_{is}^a$.

Влияние глубины бассейна. Проведем исследование влияния глубины бассейна на величины интервалов, внутри которых профили свободной поверхности ВК и СЛК имеют одинаковое количество узловых точек.

В табл. 1 приведены значения временных интервалов $\Delta\tau_{is}^+$, $\Delta\tau_{is}^-$, $\Delta\tau_{is}$ для бассейнов с шириной кольца 950 км ($a_2 = 1000$ км) и максимальной глубиной 1000 и 4000 м. Из таблицы видно, что с ростом глубины бассейна интервалы $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ для $s = 0; 1; 2$, $i = 1; 2; 3$ уменьшаются. Например, значение $\Delta\tau_{30}$ для бассейна (14) более чем в два раза превосходит $\Delta\tau_{30}$ для бассейна (15). Исключение составляют величины $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^+$, $\Delta\tau_{is}^-$ при $i = 3$, $s = 1$ и

Т а б л и ц а 1

Величины интервалов периодов возмущающих давлений ($\Delta\tau_{is}^-$, $\Delta\tau_{is}^+$, $\Delta\tau_{is}$),
внутри которых профили свободной поверхности ВК и СЛК имеют
одинаковое количество узловых точек ($a_2 = 1000$ км)

h_m , м	Интервал	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
1000	$\Delta\tau_{1s}^+$	9 ч 06 мин 33 с	1 ч 42 мин 35 с	17 мин 50 с
	$\Delta\tau_{1s}^-$	1 ч 35 мин 05 с	1 ч 06 мин 43 с	23 мин 30 с
	$\Delta\tau_{1s}$	10 ч 41 мин 38 с	2 ч 49 мин 18 с	41 мин 20 с
	$\Delta\tau_{2s}^+$	6 мин 13 с	8 мин 55 с	26 с
	$\Delta\tau_{2s}^-$	9 мин 40 с	4 мин 23 с	14 с
	$\Delta\tau_{2s}$	15 мин 53 с	13 мин 18 с	40 с
	$\Delta\tau_{3s}^+$	2 мин 20 с	3 с	4 мин 05 с
	$\Delta\tau_{3s}^-$	2 мин 54 с	3 с	4 мин 45 с
	$\Delta\tau_{3s}$	5 мин 14 с	6 с	8 мин 50 с
	$\Delta\tau_{1s}^+$	11 ч 22 мин 14 с	53 мин 03 с	13 мин 05 с
	$\Delta\tau_{1s}^-$	52 мин 19 с	31 мин 17 с	23 мин 55 с
	$\Delta\tau_{1s}$	12 ч 14 мин 33 с	1 ч 24 мин 20 с	37 мин 00 с
4000	$\Delta\tau_{2s}^+$	3 мин 16 с	7 мин 39 с	1 мин 20 с
	$\Delta\tau_{2s}^-$	4 мин 59 с	3 мин 31 с	50 с
	$\Delta\tau_{2s}$	8 мин 15 с	11 мин 10 с	2 мин 10 с
	$\Delta\tau_{3s}^+$	1 мин 17 с	31 с	1 мин 34 с
	$\Delta\tau_{3s}^-$	1 мин 33 с	29 с	2 мин 26 с
	$\Delta\tau_{3s}$	2 мин 50 с	1 мин 00 с	4 мин 00 с

$i = 2$, $s = 2$, которые с увеличением h_m возрастают. Так, $\Delta\tau_{31}$, $\Delta\tau_{31}^+$, $\Delta\tau_{31}^-$ для бассейна с максимальной глубиной 4000 м в 10 раз больше соответствующих значений для бассейна с $h_m = 1000$ м. В табл. 2 представлены интервалы $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ для бассейнов, у которых радиус внешней границы равен 3000 км.

Величины интервалов периодов возмущающих давлений ($\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^+$, $\Delta\tau_{is}^-$),
внутри которых профили свободной поверхности ВК и СЛК имеют
одинаковое количество узловых точек ($a_2 = 3000$ км)

h_m , м	Интервал	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
1000	$\Delta\tau_{1s}^+$	3 ч 06 мин 08 с	2 ч 02 мин 57 с	26 мин 59 с
	$\Delta\tau_{1s}^-$	2 ч 23 мин 39 с	2 ч 03 мин 11 с	22 мин 16 с
	$\Delta\tau_{1s}$	5 ч 59 мин 47 с	4 ч 06 мин 08 с	49 мин 15 с
	$\Delta\tau_{2s}^+$	4 мин 51 с	12 мин 09 с	13 мин 24 с
	$\Delta\tau_{2s}^-$	7 мин 34 с	6 мин 16 с	8 мин 21 с
	$\Delta\tau_{2s}$	12 мин 25 с	18 мин 25 с	21 мин 45 с
	$\Delta\tau_{3s}^+$	2 мин 49 с	2 мин 53 с	3 мин 17 с
	$\Delta\tau_{3s}^-$	3 мин 32 с	2 мин 47 с	3 мин 13 с
	$\Delta\tau_{3s}$	6 мин 21 с	5 мин 40 с	6 мин 30 с
4000	$\Delta\tau_{1s}^+$	7 ч 10 мин 35 с	1 ч 47 мин 07 с	33 мин 13 с
	$\Delta\tau_{1s}^-$	2 ч 10 мин 03 с	1 ч 15 мин 27 с	41 мин 54 с
	$\Delta\tau_{1s}$	9 ч 20 мин 38 с	3 ч 02 мин 34 с	1 ч 15 мин 07 с
	$\Delta\tau_{2s}^+$	3 мин 31 с	27 мин 36 с	14 мин 27 с
	$\Delta\tau_{2s}^-$	5 мин 29 с	12 мин 04 с	10 мин 38 с
	$\Delta\tau_{2s}$	9 мин 00 с	39 мин 40 с	25 мин 05 с
	$\Delta\tau_{3s}^+$	1 мин 51 с	6 мин 07 с	5 мин 17 с
	$\Delta\tau_{3s}^-$	2 мин 24 с	4 мин 28 с	3 мин 58 с
	$\Delta\tau_{3s}$	4 мин 15 с	10 мин 35 с	9 мин 15 с

Из таблицы видно, что для каждого фиксированного s с ростом номера моды i величины интервалов $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ убывают для обоих бассейнов. К примеру, $\Delta\tau_{10} = 30\Delta\tau_{20} = 60\Delta\tau_{30}$ для бассейна (15) и $\Delta\tau_{10} = 62\Delta\tau_{20} = 140\Delta\tau_{30}$ для бассейна (16). С ростом максимальной глубины бассейна значения $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ уменьшаются для второй и третьей мод при $s = 0$ и первой моды при $s = 1$. Для всех мод при $s = 2$ и второй, третьей мод при $s = 1$ указанные интервалы увеличиваются. Так, величины $\Delta\tau_{11}$, $\Delta\tau_{11}^-$ и $\Delta\tau_{11}^+$ для более глубокого бассейна составляют 87, 61 и 74% значений $\Delta\tau_{11}$, $\Delta\tau_{11}^-$ и $\Delta\tau_{11}^+$ для более мелкого бассейна соответственно.

Влияние ширины кольца бассейна. Рассмотрим теперь влияние ширины кольца бассейна на изменение величин $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ ($i = 1; 2; 3$, $s = 0; 1; 2$). Для этого сравним пары бассейнов (14), (16) и (15), (17), имеющих максимальные глубины соответственно 1000 и 4000 м.

Для первой пары бассейнов с максимальной глубиной 1000 м значения $\Delta\tau_{is}$, $\Delta\tau_{is}^-$ и $\Delta\tau_{is}^+$ убывают с увеличением ширины кольца при $s = 0$, $i = 2$ и $s = 2$, $i = 3$. Для всех мод при $s = 1$, третьей моды при $s = 0$ и второй моды при $s = 2$ указанные интервалы возрастают. Например, $\Delta\tau_{32}^-$ для бассейна с шириной кольца 2950 км меньше соответствующего значения $\Delta\tau_{32}^-$ для бассейна с $a_2 = 1000$ км на 1 мин 32 с, т.е. на 32%. Разница между величинами $\Delta\tau_{32}^+$ для этих бассейнов составляет 48 с (20%). Интервалы $\Delta\tau_{32}$ отличаются друг от друга на 2 мин 20 с, или 26%.

Для бассейнов с максимальной глубиной 4000 м с ростом ширины кольца при $s = 1$; 2 для любого номера моды i ($i = 1$; 2; 3) и для второй моды при $s = 0$ значения $\Delta\tau_{is}^+$, $\Delta\tau_{is}^-$, $\Delta\tau_{is}$ увеличиваются. Кроме того, с увеличением расстояния a_2 от 1000 до 3000 км величины $\Delta\tau_{10}^-$, $\Delta\tau_{30}^-$, $\Delta\tau_{30}^+$ также возрастают. Так, $\Delta\tau_{10}^-$ для более широкого бассейна ($a_2 = 3000$ км) превосходит соответствующее значение $\Delta\tau_{10}^-$ при $a_2 = 1000$ км в 2,5 раза. Вместе с тем для бассейна (15) величины $\Delta\tau_{10}^+$, $\Delta\tau_{10}$, $\Delta\tau_{30}$ больше, чем для бассейна (17). К примеру, разница между $\Delta\tau_{10}^+$ при ширине бассейнов 950 и 2950 км составляет 4 ч 11 мин 39 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Гостехиздат, 1955. – 560 с.
4. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т.1. – М.: Мир, 1981. – 680 с.
5. Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Сейши в кольцевом бассейне переменной глубины// Морской гидрофизический журнал. – 1999. – №1. – С.11–20.
6. Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование пространственной структуры и изменчивости сейшевых колебаний в бассейне переменной глубины// Доп. НАН України. – 2000. – №5. – С.114–118.
7. Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование влияния геометрии бассейна на структуру сейшевых колебаний// Морской гидрофизический журнал. – 2000. – №1. – С.19–30.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 27.05.02

ABSTRACT Influence of variation of width and depth in a ring-like basin with the parabolic bottom profile upon the spatial structure of waves generated by temporally periodic variations of the atmosphere pressure is studied by the method of mathematical modeling. Investigations are carried out in assumptions of the linear theory of long waves with regard to the Coriolis force. Structures of fluid surface profiles of free and forced waves are compared. Found are dependencies of periods of atmospheric disturbances upon the basin geometry under which quantity of main points on free surface of forced oscillations coincides with that on the fluid surface profile of free oscillations.