

Вынужденные колебания в ограниченном бассейне переменной глубины

В рамках линейной теории длинных волн с учетом влияния силы Кориолиса проводится исследование вынужденных длинноволновых колебаний жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. Колебания вызваны периодическими по времени возмущениями атмосферного давления. Параметры бассейна (профиль дна, линейные размеры) приближенно соответствуют району Антарктики между 60 и 70° ю.ш. С использованием численных методов определяются волновые скорости и структура мод возвышений свободной поверхности. Установлены зависимости характеристик волнового процесса от периода поверхностных давлений.

1. Введение. В предположениях общей линейной теории волн в работе [1] выполнено исследование свободных колебаний однородной невязкой жидкости в невращающемся кольцевом бассейне постоянной глубины. Изложение этого исследования приведено в монографии [2]. Решение аналогичной задачи для идеальной однородной жидкости, заполняющей круговой бассейн, в рамках теории длинных волн и общей линейной теории получено в [2–5]. С использованием численных методов в работах [6–8] изучалось влияние силы Кориолиса и геометрических характеристик водоема на свободные колебания невязкой жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. В данной работе исследуются вынужденные колебания в кольцевом бассейне переменной глубины. При этом геометрические параметры водоема выбраны характерными для района Антарктики [9,10].

2. Постановка задачи. Пусть кольцевой бассейн переменной глубины заполнен однородной невязкой жидкостью, глубина зависит только от одной пространственной координаты r . Будем предполагать волны длинными, колебания малыми. Примем во внимание действие силы Кориолиса. Колебания жидкости вызваны периодическими по времени возмущениями атмосферного давления вида

$$p(r, \theta, t) = p_0 \psi(r) \sin(s\theta + \sigma t), \quad (1)$$

где p_0 — амплитуда возмущений атмосферного давления, σ — частота вынужденных колебаний, s — волновое число ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $|\psi(r)| \leq 1$.

Уравнения движения в полярных координатах записываются следующим образом [3]:

$$u_t - fv = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho} p_r, \quad (2)$$

$$v_t + fu = -\frac{1}{r} (g\zeta_\theta - \frac{1}{\rho} p_\theta), \quad (3)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r} [(hur)_r + hv_\theta]. \quad (4)$$

На вертикальных боковых стенках $r = a_1$, $r = a_2$ должны выполняться условия непротекания

$$u(a_1, \theta, t) = 0, \quad u(a_2, \theta, t) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\zeta(r, \theta, t)$ — возвышение свободной поверхности; $u(r, \theta, t)$ — радиальная составляющая скорости жидкости, $v(r, \theta, t)$ — касательная составляющая; $h(r)$ — глубина бассейна; остальные обозначения общепринятые.

Будем искать решение системы уравнений (2) – (4) в виде

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \bar{\zeta}(r) \sin(s\theta + \sigma t), \\ u(r, \theta, t) &= \bar{u}(r) \cos(s\theta + \sigma t), \\ v(r, \theta, t) &= \bar{v}(r) \sin(s\theta + \sigma t). \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$\bar{p}(r) = \frac{1}{\rho} p_0 \psi(r), \quad (7)$$

где $\psi(r) = (r - a_1)/(a_2 - a_1)$.

Тогда (1) можно записать так:

$$p(r, \theta, t) = \rho \bar{p}(r) \sin(s\theta + \sigma t). \quad (8)$$

Подставим (6), (8) в (2), (3) и, решив полученную систему, найдем выражения для амплитуд радиальной и касательной составляющих скорости жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r) &= \frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} \left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \psi \right) \right], \\ \bar{v}(r) &= -\frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} \left[\frac{f}{\sigma} \bar{\zeta}_r + \frac{s}{r} \bar{\zeta} + d \left(\frac{f}{\sigma} \psi_r + \frac{s}{r} \psi \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $d = p_0/\rho g$.

Из (9) и (4) получим следующее дифференциальное уравнение для нахождения амплитуды возвышения свободной поверхности $\bar{\zeta}(r)$:

$$\begin{aligned} r^2 h \bar{\zeta}_{rr} + (r^2 h_r + rh) \bar{\zeta}_r + \frac{\sigma^2 - f^2}{g} r^2 \bar{\zeta} = \\ = -d \left[r^2 h \psi_{rr} + (r^2 h_r + rh) \psi_r + \left(\frac{f}{\sigma} srh_r - s^2 h \right) \psi \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия (5) с учетом (6) принимают вид:

$$\left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \psi \right) \right]_{r=a_1} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\bar{\zeta}_r + \frac{sf}{r\sigma} \bar{\zeta} + d \left(\psi_r + \frac{sf}{r\sigma} \psi \right) \right]_{r=a_2} = 0.$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$\bar{\zeta}(r) = c_1 \bar{\zeta}_1(r) + c_2 \bar{\zeta}_2(r) + \bar{\zeta}_3(r). \quad (12)$$

Здесь $\bar{\zeta}_1(r), \bar{\zeta}_2(r)$ — фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (10); $\bar{\zeta}_3(r)$ — частное решение уравнения (10); c_1, c_2 — произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий (11). Функции $\bar{\zeta}_j(r)$ ($j = 1, 2, 3$) находим методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности [11].

3. Численное моделирование. По предложенной выше модели были проведены численные эксперименты для бассейна переменной глубины, параметры которого соответствуют району Антарктики между 60 и 70° ю.ш. Ширина кольца ($a_2 - a_1$) принимается равной 1000 км ($a_1 = 1500$ км, $a_2 = 2500$ км). Глубина у внутренней вертикальной боковой стенки равна 0,2 км, на внешней границе бассейна она достигает 4,0 км. В точке $r = 1700$ км, где имеет место излом дна, глубина составляет 3 км. Параметр Кориолиса $f = -1,32 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, что соответствует 65° ю.ш., параметр s принимает значения 0; 1; 2. Перепад давления на границах бассейна равен 5 гПа ($d = 5,0$ см). Для простоты письма черточки над амплитудными функциями $\zeta(r)$ и $u(r)$ опускаем.

В [8] получены периоды первых четырех мод свободных линейных колебаний (СЛК) τ_{is}^0 для района Антарктики ($i = 1, \dots, 4; s = 0; 1; 2$). В окрестностях этих периодов в результате проведенных численных экспериментов найдены интервалы периодов вынужденных колебаний (ВК) $[\tau_{ais}, \tau_{bis}]$ ($\tau_{is}^0 \in [\tau_{ais}, \tau_{bis}]$), внутри которых количество узловых точек свободной поверхности ВК совпадает с количеством узловых точек свободной поверхности СЛК i ($i = 1, \dots, 4$).

Табл. 1 содержит граничные значения интервалов τ_{ais} и τ_{bis} ($s = 0, 1, 2$) для всех указанных выше i , полученные в результате численных экспериментов. Из этой таблицы видно, что при $s = 0; 1; 2$ верхние границы интервалов τ_{bis} ($i = 2, 3, 4$) отличаются друг от друга не более чем на 6 мин 35 с (максимальное различие наблюдается для второй моды при $s = 0$ и $s = 2$); нижние границы τ_{ais} при тех же значениях s и $i = 1, \dots, 4$ также отличаются не более чем на 6 мин 35 с (это имеет место для $i = 1, s = 0; 2$). При $i = 1$ граничное

значение τ_{bis} в случае $s = 2$ значительно отличается от τ_{b10} и τ_{b11} и составляет 5 ч 55 мин 42 с; при $\tau_{12} \geq 5$ ч 56 мин 43 с профиль свободной поверхности не имеет узловых точек (этот интервал не включен в таблицу).

Т а б л и ц а 1

Граничные значения интервалов периодов возмущающих давлений,
внутри которых профили свободной поверхности ВК и СЛК
имеют одинаковое количество узловых точек

Границы интервалов	i	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$
τ_{bis}	1	13 ч 14 мин 24 с	11 ч 25 мин 48 с	5 ч 55 мин 42 с
τ_{ais}		1 ч 53 мин 12 с	1 ч 50 мин 55 с	1 ч 46 мин 37 с
τ_{bis}	2	1 ч 53 мин 11 с	1 ч 50 мин 54 с	1 ч 46 мин 36 с
τ_{ais}		1 ч 23 мин 04 с	1 ч 22 мин 46 с	1 ч 21 мин 35 с
τ_{bis}	3	1 ч 23 мин 03 с	1 ч 22 мин 45 с	1 ч 21 мин 34 с
τ_{ais}		57 мин 52 с	57 мин 42 с	57 мин 13 с
τ_{bis}	4	57 мин 51 с	57 мин 41 с	57 мин 12 с
τ_{ais}		44 мин 40 с	44 мин 34 с	44 мин 20 с

В табл. 2–4 приведены периоды ВК τ_{is} , являющиеся границами интервалов, в которых $2,5 \leq |\zeta_{\max}| \leq 50,0$ см. Профили свободной поверхности имеют i узловых точек ($i = 1, \dots, 4$). Кроме того, в таблицах содержатся максимальные значения амплитудной функции $u(r)$, а также величины $r_{\max}$, являющиеся координатами точек экстремумов $|u(r)|$ при $s = 0$ (табл.2), $s = 1$ (табл.3), $s = 2$ (табл.4).

Анализ данных табл.2 и не включенных в нее результатов численных экспериментов показал, что при $\tau_{10} \in [1$ ч 53 мин 12 с; 2 ч 52 мин 14 с] амплитуды ζ увеличиваются с приближением τ_{10} к резонансному периоду τ_{10}^0 ($\tau_{10}^0 = 2$ ч 57 мин 14 с) от 2,6 до 45,8 см, а $\max |u|$ – от 0,13 до 1,85 см/с. В случае, когда $\tau_{10} > \tau_{10}^0$ и $\tau_{10} \in [3$ ч 02 мин 14 с; 13 ч 14 мин 24 с], с увеличением периодов ВК $\max |\zeta|$ убывают от 49,9 до 2,8 см, а максимальные значения радиальной составляющей скорости $|u(r)|$ – от 1,9 до 0,02 см/с. Таким образом, с удалением τ_{10} от резонансного периода в сторону уменьшения ($\tau_{10} < \tau_{10}^0$) амплитуды ζ убывают значительно быстрее, а $\max |u|$ медленнее, чем при увеличении τ_{10} ($\tau_{10} > \tau_{10}^0$). Координаты точек экстремумов радиальной составляющей скорости смещаются вправо с увеличением периодов ВК. Так, $\max |u|$ при $\tau_{10} = 1$ ч 53 мин 12 с достигается в точке $r = 1586$ км, а в случае $\tau_{10} = 13$ ч 14 мин 24 с – на 356 км правее, в точке $r = 1942$ км. При $\tau_{20} \in [1$ ч 30 мин 38 с, 1 ч 35 мин 34 с] максимальные значения $|\zeta|$ возрастают от 2,5 до 49,4 см с ростом τ_{20} , а амплитуды радиальной составляющей скоро-

Периоды ВК (τ_{i0}), максимальные значения $|\zeta|$ и $|u|$
 $(\max |\zeta|, \max |u|)$ и координаты ($r_{\max}$) точек
 экстремумов $|u(r)|$ при $s = 0$

i	τ_{i0}	$\max \zeta $, см	$\max u $, см/с	$r_{\max}$, км
1	1 ч 53 мин 12 с	2,6	0,13	1586
	2 ч 52 мин 14 с	45,8	1,85	1923
	3 ч 02 мин 14 с	49,9	1,90	1924
	13 ч 14 мин 24 с	2,8	0,02	1942
2	1 ч 30 мин 38 с	2,5	0,13	1547
	1 ч 35 мин 34 с	49,4	2,67	1557
	1 ч 36 мин 12 с	50,0	2,71	1558
	1 ч 53 мин 10 с	2,6	0,13	1586
3	1 ч 00 мин 48 с	2,5	0,19	1541
	1 ч 06 мин 35 с	50,0	3,50	1541
	1 ч 07 мин 06 с	48,2	3,35	1541
	1 ч 11 мин 50 с	2,5	0,16	1540
4	48 мин 34 с	2,5	0,21	1529
	50 мин 20 с	45,0	3,75	1531
	50 мин 34 с	47,0	3,92	1532
	53 мин 32 с	2,5	0,21	1536

сти $|u(r)|$ в этом случае изменяются от 0,13 до 2,67 см/с. При $\tau_{20} > \tau_{20}^0$ ($\tau_{20}^0 = 1$ ч 35 мин 52 с) величины $|\zeta_{\max}|$ и $|u_{\max}|$ убывают от 50,0 см и 2,71 см/с ($\tau_{20} = 1$ ч 36 мин 12 с) до 2,6 см и 0,13 см/с ($\tau_{20} = 1$ ч 53 мин 10 с) соответственно. Радиальная составляющая скорости достигает своего максимального значения в точке $r = 1547$ км при $\tau_{20} = 1$ ч 30 мин 38 с. С ростом τ_{20} координаты точек максимума смещаются вправо на 39 км (при $\tau_{20} = 1$ ч 53 мин 10 с максимум $|u|$ имеет место в точке $r = 1586$ км). С увеличением $|\zeta_{\max}|$ в 20 раз (от 2,5 до 50,0 см) при $\tau_{30} < \tau_{30}^0$ ($\tau_{30}^0 = 1$ ч 06 мин 50 с) амплитуды радиальной составляющей скорости $u(r)$ возрастают в 18,4 раза и изменяются от 0,19 до 3,50 см/с. С удалением τ_{30} от резонансного периода ($\tau_{30} > \tau_{30}^0$) амплитуды $\zeta(r)$ и $u(r)$ уменьшаются от 48,2 до 2,5 см и от 3,35 до 0,16 см/с соответственно. В случае $i = 4$ для периодов ВК, находящихся достаточно близко от резонансного периода $\tau_{40}^0 = 50$ мин 27 с, максимальные амплитуды отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня не превышают 47,0 см. При этом амплитуды радиальной составляющей скорости больше, чем $\max |u_i|$ ($i = 1, 2, 3$), когда $45,0 \leq \max |\zeta_i| \leq 50,0$ см. Координаты точек максимума радиальной составляющей скорости с увеличением периода от 48 мин 34 с до 53 мин 32 с смещаются вправо на 7,0 км.

Из табл. 3 и 4, содержащих периоды и амплитуды при $s = 1; 2$, видно, что в случае кольцевых волн зависимости характеристик волнового процесса ($\max |\zeta|$, $\max |u|$, $r_{\max}$) от периода ВК (τ_{is}) качественно не отличаются от полученных для

Таблица 3

Периоды ВК (τ_{i1}), максимальные значения $|\zeta|$ и $|u|$
 ($\max |\zeta|$, $\max |u|$) и координаты ($r_{\max}$) точек
 экстремумов $|u(r)|$ при $s = 1$

i	τ_{i1}	$\max \zeta $, см	$\max u $, см/с	$r_{\max}$, км
1	1 ч 54 мин 18 с	2,5	0,13	1865
	2 ч 49 мин 35 с	42,1	1,69	1923
	2 ч 59 мин 35 с	45,8	1,73	1924
	11 ч 25 мин 48 с	3,3	0,02	1567
2	1 ч 30 мин 52 с	2,5	0,13	1548
	1 ч 35 мин 16 с	50,2	2,72	1556
	1 ч 35 мин 50 с	48,5	2,63	1558
	1 ч 48 мин 24 с	2,5	0,13	1581
3	1 ч 00 мин 52 с	2,5	0,19	1541
	1 ч 06 мин 28 с	47,1	3,30	1541
	1 ч 07 мин 00 с	45,1	3,13	1541
	1 ч 11 мин 30 с	2,5	0,16	1540
4	48 мин 34 с	2,5	0,21	1529
	50 мин 18 с	49,5	4,13	1531
	50 мин 32 с	41,0	4,60	1532
	53 мин 22 с	2,5	0,21	1535

Таблица 4

Периоды ВК (τ_{i2}), максимальные значения $|\zeta|$ и $|u|$
 ($\max |\zeta|$, $\max |u|$) и координаты ($r_{\max}$) точек
 экстремумов $|u(r)|$ при $s = 2$

i	τ_{i2}	$\max \zeta $, см	$\max u $, см/с	$r_{\max}$, км
1	1 ч 56 мин 26 с	2,5	0,13	1884
	2 ч 45 мин 00 с	48,0	1,85	1921
	2 ч 54 мин 00 с	41,7	1,50	1923
	5 ч 55 мин 42 с	3,9	0,05	1565
2	1 ч 30 мин 42 с	2,5	0,13	1547
	1 ч 34 мин 28 с	47,9	2,60	1556
	1 ч 34 мин 57 с	50,7	2,75	1557
	1 ч 43 мин 46 с	2,5	0,13	1577
3	1 ч 00 мин 48 с	2,5	0,19	1541
	1 ч 06 мин 12 с	50,0	3,30	1541
	1 ч 06 мин 41 с	47,6	3,31	1541
	1 ч 10 мин 58 с	2,5	0,16	1539
4	48 мин 30 с	2,5	0,21	1529
	50 мин 10 с	45,9	3,83	1531
	50 мин 24 с	41,3	3,45	1532
	53 мин 08 с	2,5	0,21	1535

осесимметричных волн ($s = 0$). Так, амплитуды $\zeta(r)$ и $u(r)$ в случаях $s = 1; 2$, как и при $s = 0$, убывают с удалением r_{is} от резонансных периодов ($i = 1, \dots, 4$). Имеется некоторое различие в расположении точек максимума радиальной составляющей скорости для первой и третьей мод при $s = 1; 2$. Так, для $\tau_{11} < \tau_{11}^0$, $\tau_{12} < \tau_{12}^0$ координаты точек экстремума $u(r)$ с увеличением периода смещаются вправо на 58 км ($s = 1$) и 37 км ($s = 2$), а при $\tau_{11} > \tau_{11}^0$ и $\tau_{12} > \tau_{12}^0$ – влево на 357 и 358 км соответственно.

Как следует из анализа полученных результатов, максимальные отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня для всех рассмотренных периодов ВК имеют место на внутренней границе бассейна. Однако численные расчеты показали, что для некоторых τ_{is} ($i = 1, \dots, 4$; $s = 0, 1, 2$) $r = a_1$ не единственная точка экстремума: второй максимум, численно равный первому, достигается сравнительно недалеко (в 0,9 – 7,0 км) от внутренней границы бассейна. Наибольшие значения радиальной и касательной составляющих скорости при $s = 0$ достигаются в одних и тех же точках для всех периодов, изучаемых в ходе численных экспериментов. Амплитуды касательной составляющей скорости $v(r)$ не приведены в этих таблицах, так как при $s = 0$; 1; 2 и $i = 1, \dots, 4$ они не превышают 1 см/с для всех рассмотренных выше периодов вынужденных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Geppert H. Die permanenten wellen in ringförmigen Kanälen// *Mathematische Annalen*. – 1929. – 101. – С.424–445.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Гостехиздат, 1955. – 560 с.
5. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1. – М.: Мир, 1981. – 680 с.
6. Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Сейши в кольцевом бассейне переменной глубины// *Морской гидрофизический журнал*. – 1999. – №1. – С.11–20.
7. Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование пространственной структуры и изменчивости сейшевых колебаний в бассейне переменной глубины// *Доп. НАН України*. – 2000. – №5. – С.114–118.
8. Маркова Н.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Влияние геометрии кольцевого бассейна на характеристики сейш// *Морской гидрофизический журнал*. – 2001. – №3. – С.16–23.
9. Саруханян Э.И., Смирнов Н.Н. Водные массы и циркуляция Южного океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 228 с.
10. *Regional atlas of the world*. – Edinburgh, 1948. – 160 p.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 19.04.02

ABSTRACT Forced long-wave fluid oscillations in a ring-like basin with a variable depth are studied within the framework of the linear theory of long waves with regard to the affect of the Coriolis force. Oscillations are induced by temporally periodic disturbances of the atmospheric pressure. The basin parameters (ring width, bottom profile) approximately correspond to the Antarctic region between 60° and 70°S. Wave velocities and structure of modes of free surface rises are determined using numerical methods. Dependencies of characteristics of the wave process upon the period of surface pressures are found.