

УДК 551.467

А.Е. Букатов, А.А. Букатов

Взаимодействие поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом

Методом многих масштабов получены асимптотические разложения до величин третьего порядка для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости движения жидких частиц волнового возмущения, формируемого при нелинейном взаимодействии периодических бегущих волн первой и второй гармоник в покрытой битым льдом однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной постоянной глубины. Исследована зависимость амплитудно-фазовой структуры возмущений от толщины льда, глубины бассейна и параметров взаимодействующих гармоник. Дана оценка погрешности определения характеристик формируемого вертикального смещения поверхности бассейна и нелинейного переноса массы, вносимой пренебрежением кривизны волнового профиля в выражении потенциала скорости при выводе кинематического и динамического поверхностных граничных условий для нелинейных приближений.

Введение

Распространение поверхностных гравитационных волн малой амплитуды в покрытой плавающим льдом однородной жидкости исследовалось в работах [1–7]. Влияние льда на нелинейные волны в бассейне малой глубины рассмотрено в [8, 9]. Для покрытого битым льдом бассейна произвольной постоянной глубины исследование эволюции и нелинейного взаимодействия периодических волновых гармоник конечной амплитуды выполнено в [10, 11].

Стационарный перенос жидких частиц в направлении движения периодических волн, предсказанный [12] теорией Стокса, рассматривался для жидкости с открытой поверхностью в [13–15] при бесконечной и в [16–19] — при конечной глубине бассейна.

Влияние плавающего битого льда на перенос массы периодической бегущей поверхностной волной конечной амплитуды и волновым движением, формируемым при нелинейном взаимодействии прогрессивных волн первой и второй гармоник, исследовалось в [10, 11, 20].

Оценка изменений амплитудно-фазовых характеристик бегущей нелинейной периодической волны, вносимых учетом пространственно-временной зависимости величины вертикальных смещений поверхности бассейна в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна при выводе кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений, дана в [21].

В настоящей работе выполнен аналогичный анализ изменений амплитудно-фазовой структуры возмущений и нелинейного переноса массы, вносимых

© А.Е. Букатов, А.А. Букатов, 2003

полным учетом кривизны волнового профиля в уравнениях для нелинейных приближений при взаимодействии периодических бегущих волн первой и второй гармоник.

Постановка задачи

Пусть поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн конечной глубины H , покрыта плавающим льдом. Рассмотрим влияние льда на распространение периодических волн малой, но конечной амплитуды, предполагая колебания безотрывными, а размеры льдин малыми по сравнению с длиной волны возмущений. При сделанных допущениях не происходит изгиба льдин. Поэтому из восстанавливающих сил при исследовании колебаний учтем только силу тяжести. Будем пренебрегать и нелинейностью вертикального ускорения льдин, принимая во внимание его слабое влияние на амплитуду формируемого бегущей волной конечной амплитуды возвышения поверхности бассейна [10]. Тогда в предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg}t_1$, где k волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H < z < \zeta \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = \zeta$)

$$\zeta - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \kappa \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\kappa = h\rho_1/\rho$, h и ρ_1 — толщина и плотность льда, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. В динамическом условии (2) слагаемое с множителем κ представляет собой инерцию вертикальных смещений льда без учета ее нелинейной составляющей. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности бассейна ζ связаны кинематическим условием ($z = \zeta$)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

При $\kappa = 0$ из (2) следует динамическое условие на свободной от льда поверхности.

Уравнения для нелинейных приближений

Решение задачи (1) — (5) найдем методом многих масштабов [22], позволяющим получить для ζ и φ равномерно пригодные разложения. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε — малое, но конечное, и предположим, что

$$\begin{aligned}\zeta &= \varepsilon \zeta_0, \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0, \quad f = \varepsilon f_0, \\ \zeta_0 &= \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3), \quad \varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3), \\ f_0 &= f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3),\end{aligned}\tag{6}$$

тогда из уравнения Лапласа (1) и условия (3) на дне ($z = -H$) с точностью до величин третьего порядка малости получим

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0.\tag{7}$$

Представляя $\varphi(x, z, t)$ на поверхности бассейна $z = \varepsilon \zeta_0(x, t)$ в виде ряда

$$\varphi(x, \varepsilon \zeta_0, t) = \varphi(x, 0, t) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, 0, t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta_0^2 \varphi_{zz}(x, 0, t) + \dots\tag{8}$$

и учитывая (6) из (2), (4), (5), (7), аналогично [21] найдем:

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad H < z < 0,\tag{9}$$

$$\zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} - \kappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} = F_n^*, \quad z = 0,\tag{10}$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n^*, \quad z = 0,\tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H,\tag{12}$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0.\tag{13}$$

Здесь

$$F_n^* = P_n + P_n^0, \quad L_n^* = L_n + L_n^0, \quad P_1 = L_1 = P_1^0 = L_1^0 = L_2^0 = G_1 = 0,$$

$$P_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \kappa k \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_1},$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, & G_2 &= -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \\
P_3 &= \zeta_1 N_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \\
&\quad - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \kappa k \left(\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_2} \right), \\
N_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, & G_3 &= -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}, \\
L_3 &= \zeta_1 \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + N_3, & L_3^0 &= \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \\
N_3 &= \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}, & P_2^0 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \\
P_3^0 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые P_2^0, P_3^0, L_3^0 , входящие в правые части уравнений (10), (11), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t в (8).

Из (10), (11) видно, что зависимость ζ_0 от x и t не проявляется ($P_1^0 = L_1^0 = 0$) в выражениях для приближения порядка ε . В выражениях же ε^2 и ε^3 появились слагаемые, обусловленные этой зависимостью. Причем в приближении ε^2 такое слагаемое (P_2^0) входит только в динамическое, а в приближении ε^3 — в динамическое (P_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

Выражения для потенциала скорости и возвышения поверхности бассейна

Уравнения, граничные и начальные условия для нелинейных приближений (9) — (13) получены в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн, задавая первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности бассейна в форме

$$\zeta_1 = \cos \theta + a_1 \cos 2\theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta_1(T_1, T_2), \quad (14)$$

где a_1 — постоянная порядка единицы, $\beta_1(0) = 0$. Удовлетворяя условию на дне и учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия (10), (11), запишем:

$$\varphi_1 = \tau \left[\frac{\cosh(z+H)}{\sinh H} \sin \theta + a_1 \frac{\cosh 2(z+H)}{\sinh 2H} \sin 2\theta \right], \quad (15)$$

$$\tau^2 = \tau_0^{-1} \tanh H, \quad \tau_0 = 1 + \kappa k \tanh H.$$

Амплитуду a_1 и фазовый сдвиг β_1 определим из последующих приближений. Подставим ζ_1, φ_1 из (14), (15) в правые части динамического (10) и кинематического (11) граничных условий для второго приближения и, решив задачу при $n=2$ с учетом требования отсутствия первой и второй гармоник в частном решении, получим:

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^4 a_{2n} \cos n\theta, \quad (16)$$

$$\varphi_2 = \tau^2 b_{20} t + \tau \sum_{n=1}^4 b_{2n} \cosh n(z+H) \sinh^{-1} nH \sin n\theta, \quad (17)$$

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_0}{\tau_*} \left(\frac{2}{3} \coth H \tanh 2H + \frac{1}{6} (\coth^2 H - 5) \tanh^2 2H \right) \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$\tau_* = 1 + 2\kappa k \tanh 2H, \quad \beta_1 = \varepsilon \tau_1 t + \beta_2(T_2), \quad \tau_1 = \frac{3}{2} a_1 \tau \tau_0^{-1} \coth 2H.$$

Здесь

$$a_{2n} = -a_1 \tau^2 F_n \mu_n^{-1}, \quad n=3,4, \quad \mu_n = (1 - n^2 \kappa k \tau^2) \tanh nH - n\tau^2,$$

$$F_3 = \frac{1}{2} [3(2 \coth 2H + \coth H) + (2 \coth H \coth 2H - 1) \tanh 3H],$$

$$F_4 = [4 \coth 2H + (\coth^2 2H - 5) \tanh 4H] a_1,$$

$$b_{20} = \frac{1}{4} [1 + \coth^2 H + 4a_1^2 (1 + \coth^2 2H)], \quad b_{21} = -\frac{1}{2} (2 \coth 2H + \coth H) a_1 + \sigma_1,$$

$$b_{22} = a_2 + a_0, \quad b_{23} = a_{23} - \frac{1}{2} (2 \coth 2H + \coth H) a_1, \quad b_{24} = a_{24} - a_1^2 \coth 2H,$$

$$a_0 = a_1 \sigma_1 - \frac{1}{2} \coth H, \quad \sigma_1 = \frac{\tau_1}{\tau},$$

ζ_1, φ_1 из (10) и ζ_2, φ_2 из (11) определяют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий при $n=3$. Исключив из них слагаемые, порождающие секулярность, найдем:

$$a_2 = \frac{1}{2} (\omega_2 - \delta) / \omega_1, \quad \beta_2 = \varepsilon^2 \tau_2 t, \quad \delta = \tau (\gamma_2 - q_2 \tanh 2H) / (4a_1 \tau_*),$$

$$\tau_2 = \omega_2 - \omega_1 a_2, \quad \omega_1 = -\tau_1/a_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - q_1 \tanh H)\tau/\tau_0,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}a_1(b_{21} \coth H + 3b_{23} \coth 3H) + (a_0 + a_1 a_{23}) \coth 2H - \frac{15}{4}a_1^2 - \frac{3}{8},$$

$$\gamma_2 = (b_{21} + a_{23}) \coth H + a_1(2a_{24} \coth 2H + 4b_{24} \coth 4H) + 3(b_{23} \coth 3H - a_1^3),$$

$$q_1 = \sum_{n=1}^4 q_{1n}, \quad q_2 = \sum_{n=1}^4 q_{2n}, \quad (19)$$

$$q_{11} = a_1 \left(\frac{5}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} b_{21} + 2a_{23} \right) + a_0 + \kappa k \sigma_1^2,$$

$$q_{12} = \left(\sigma_1 b_{21} - \frac{7}{4} a_1^2 - \frac{5}{8} \right) \coth H - 5a_1^2 \coth 2H,$$

$$q_{13} = a_1 b_{23} \left(\frac{3}{2} - 3 \coth 2H \coth 3H \right) - (a_0 + a_1 b_{21}) \coth H \coth 2H,$$

$$q_{14} = - \left\{ a_0 + a_1 [b_{21} + 2\sigma_1 - 3(b_{23} + a_{23})] + 2a_1^2 (\coth H - 2 \coth 2H) + 1/2 \coth H \right\},$$

$$q_{21} = (2a_0 \sigma_1 - 5a_1^3 + a_1) \coth 2H - \frac{5}{2} a_1 \coth H,$$

$$q_{22} = 4a_1 b_{24} (1 - \coth 2H \coth 4H) + b_{21} \left(1 - \frac{1}{2} \coth^2 H \right) + \frac{3}{2} b_{23} (2 - \coth H \coth 3H),$$

$$q_{23} = 2a_1 (a_{24} + 2\kappa k \sigma_1^2) + \frac{1}{2} (a_{23} + \sigma_1),$$

$$q_{24} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + b_{21}) - a_1 [4(a_{24} + b_{24}) + \coth H - \coth 2H] - \frac{3}{2} (a_{23} + b_{23}).$$

Тогда решение задачи для третьего приближения ($n = 3$) имеет вид:

$$\zeta_3 = a_3 \cos 2\theta + \sum_{n=3}^6 a_{3n} \cos n\theta, \quad (20)$$

$$\varphi_3 = \tau^2 b_{30} t + \tau \sum_{n=1}^6 b_{3n} \cosh n(z+H) \sinh^{-1} nH \sin n\theta, \quad (21)$$

где

$$a_{3n} = \tau^2 (q_n \tanh nH - \gamma_n) \mu_n^{-1}, \quad n = 3, 4, 5, 6,$$

$$\gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32}, \quad \gamma_{31} = \frac{3}{8} a_1^2 - 3a_{23} \sigma_1 + \frac{1}{8},$$

$$\gamma_{32} = \frac{3}{2} (b_{21} a_1 + a_2 + a_{24}) \coth H + 3(a_0 + a_2) \coth 2H + 6b_{24} \coth 4H,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= 2a_{23} \coth H + a_1 \left[4(2a_2 + a_0) \coth 2H + \frac{9}{2} \right] + 6b_{23} \coth 3H - 4a_{24} \sigma_1, \\
\gamma_5 &= \frac{5}{2} a_{24} \coth H + a_1 \left(5a_{23} \coth 2H + \frac{15}{2} b_{23} \coth 3H \right) + 10b_{24} \coth 4H + \frac{69}{8} a_1^2, \\
\gamma_6 &= a_1 (6a_{24} \coth 2H + 12b_{24} \coth 4H) + 5a_1^2, \\
q_3 &= \sum_{n=1}^4 q_{3n}, \quad q_4 = \sum_{n=1}^3 q_{4n}, \quad q_5 = \sum_{n=1}^3 q_{5n}, \\
q_6 &= a_1 \left[4b_{24} (3 - \coth 2H \coth 4H) + a_1^2 \coth 2H + 2a_{24} \right] + q_{61}, \\
q_{61} &= 4a_1 (b_{24} + a_{24}), \\
q_{31} &= a_2 \left(\frac{7}{2} - \coth H \coth 2H \right) + 3(b_{23} \coth 3H + 6\kappa a_{24}) \sigma_1, \\
q_{32} &= a_1 \left[b_{21} \left(\frac{3}{2} - \coth H \coth 2H \right) + \frac{5}{2} \sigma_1 \right] - a_1^2 \left(\frac{11}{8} \coth H - \frac{1}{2} \coth 2H \right), \\
q_{33} &= 2b_{24} (3 - \coth H \coth 4H) + a_0 (3 + \coth H \coth 2H) + \frac{1}{8} \coth H + \frac{1}{2} a_{24}, \\
q_{34} &= a_0 + 2a_2 + a_1 (b_{21} + 2\sigma_1) - 2(b_{24} + a_{24}) + a_1^2 \left(3 \coth 2H - \frac{1}{2} \coth H \right), \\
q_{41} &= 2\sigma_1 \left[2(b_{24} \coth 4H + 8\kappa a_{24}) + a_1^2 \right] + \frac{3}{2} b_{23} (4 - \coth H \coth 3H), \\
q_{42} &= 2a_1 \left[a_2 (3 - \coth^2 H) + a_0 (2 - \coth^2 2H) + \frac{3}{4} \coth 2H - \frac{1}{8} \coth H \right] + \frac{1}{2} a_{23}, \\
q_{43} &= 2a_1^2 \sigma_1 + \frac{3}{2} (a_{23} + b_{23}) + a_1 \left(4a_2 + 2a_0 + \frac{3}{4} \coth H - \frac{1}{2} \coth 2H \right), \\
q_{51} &= 2b_{24} (5 - \coth H \coth 4H) + \frac{1}{2} a_{24} - a_1^2 \left(\frac{3}{8} \coth H - \frac{5}{2} \coth 2H \right), \\
q_{52} &= 2a_1 \left[a_{23} + \frac{3}{4} b_{23} (5 - 2 \coth 2H \coth 3H) \right], \\
q_{53} &= 2b_{24} + 3a_1 (a_{23} + b_{23}) + a_1^2 \left(\coth 2H - \frac{1}{2} \coth H \right) + 2a_{24}, \\
b_{30} &= 1/2 \left[\sigma_1 (1 + 4a_1^2) - b_{21} \coth^2 H \right] - 2a_1 \left[b_{22} \coth^2 2H + \right. \\
&\quad \left. + 1/8 (5 \coth H + 2 \coth 2H - a_2) \right] + b_{30}^0,
\end{aligned}$$

$$b_{30}^0 = -\frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 (1 + 4a_1^2) + b_{21} + a_1 \left[4b_{22} + 4a_2 + \frac{1}{4} (3 \coth H - 2 \coth 2H) \right] \right\},$$

$$b_{3n} = (n a_{3n} + \gamma_n) / n, \quad a_{31} = -\sigma_2 + a_2 \coth H \coth 2H,$$

$$a_{32} = a_3 + (a_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_1), \quad \sigma_2 = \tau_2 / \tau,$$

а величина a_3 может быть определена из уравнений для четвертого приближения.

Таким образом, возмущения покрытой битым льдом поверхности бассейна конечной глубины при нелинейном взаимодействии периодических прогрессивных волн первой и второй гармоник до величин третьего порядка определяются выражением

$$\zeta = \varepsilon \cos \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos 2\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 a_{nj} \cos j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 a_{3n} \cos n\theta, \quad (22)$$

$$\theta = x + \sigma, \quad \sigma = \tau (1 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2), \quad \sigma_1 = \tau_1 / \tau, \quad \sigma_2 = \tau_2 / \tau.$$

Фазовую скорость волновых возмущений определим по формуле

$$v = \tau k^{-1} (1 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2).$$

Соответствующее выражение на основании формул (15), (17), (21) можно записать и для потенциала скорости:

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3. \quad (23)$$

В размерных переменных ($x = x/k$, $t = t/\sqrt{kg}$, $\zeta = \zeta/k$, $\bar{a} = \varepsilon/k$, где a и k — амплитуда и волновое число основной линейной гармоники) выражения для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости примут вид:

$$\zeta = a \zeta_1 + a^2 k \zeta_2 + a^3 k^2 \zeta_3, \quad (24)$$

$$\varphi = a \sqrt{g/k} \varphi_1 + a^2 \sqrt{kg} \varphi_2 + a^3 k \sqrt{kg} \varphi_3. \quad (25)$$

При этом

$$\theta = kx + \sigma, \quad \sigma = \tau \sqrt{kg} (1 + a k \sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2),$$

$$v = \tau \sqrt{g/k} (1 + a k \sigma_1 + a^2 k^2 \sigma_2).$$

Формулы (22) – (25) для ζ и φ определяют формируемое волновое возмущение и при отказе от учета кривизны волнового профиля в выражении для потенциала скорости (8) на поверхности бассейна [11]. Однако в таком случае ($P_2^0 = P_3^0 = L_3^0 = 0$) следует учесть, что

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} \left[\tau_0 \tau_*^{-1} \coth H \tanh 2H \right]^{1/2}, \quad (26)$$

$$\tau_1 = \frac{a_1 \tau}{4\tau_0} (4 \coth 2H + \coth H - 3 \tanh H),$$

$$b_{20} = \frac{1}{4} [\coth^2 H - 1 + 4a_1^2 (\coth^2 2H - 1)],$$

$$F_3 = \frac{1}{2} [3(2 \coth 2H + \coth H) + (2 \coth H \coth 2H - 7) \tanh 3H],$$

$$F_4 = [4 \coth 2H + (\coth^2 2H - 3) \tanh 4H] a_1,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} a_1 (b_{21} \coth H + 3b_{23} \coth 3H) + (a_0 + a_1 a_{23}) \coth 2H + \frac{9}{4} a_1^2 + \frac{3}{8},$$

$$\gamma_2 = (b_{21} + a_{23}) \coth H + a_1 (2a_{24} \coth 2H + 4b_{24} \coth 4H + 3) + 3(b_{23} \coth 3H + a_1^3),$$

$$\gamma_{31} = \frac{27}{8} a_1^2 - 3a_{23} \sigma_1 + \frac{3}{8},$$

$$\gamma_4 = 2a_{23} \coth H + a_1 [4(2a_2 + a_0) \coth 2H + 3] + 6b_{23} \coth 3H - 4a_{24} \sigma_1,$$

$$\gamma_5 = \frac{5}{2} a_{24} \coth H + a_1 \left(5a_{23} \coth 2H + \frac{15}{2} b_{23} \coth 3H \right) + 10b_{24} \coth 4H + \frac{45}{8} a_1^2,$$

$$\gamma_6 = a_1 (6a_{24} \coth 2H + 12b_{24} \coth 4H) + 3a_1^3,$$

$$q_1 = \sum_{n=1}^3 q_{1n}, q_2 = \sum_{n=1}^3 q_{2n}, q_3 = \sum_{n=1}^3 q_{3n}, q_4 = \sum_{n=1}^2 q_{4n}, q_5 = \sum_{n=1}^2 q_{5n},$$

$$q_{14} = q_{24} = q_{34} = q_{43} = q_{53} = q_{61} = b_{30}^0 = 0.$$

Все другие обозначения остаются прежними.

Анализ амплитудно-фазовых характеристик формируемого волнового возмущения

Из полученных соотношений следует, что частота σ и фазовая скорость v зависят от амплитуд взаимодействующих волн. Причем влияние амплитуд в ледовых условиях и при отсутствии льда сказывается как в первом так и во втором приближениях. В случае $a_1 = 0$ частота и фазовая скорость распространения волн конечной амплитуды в бассейне со свободной и покрытой льдом поверхностью зависят от амплитуды начальной линейной гармоник только во втором приближении.

Величина $\sigma_0 = \tau \sqrt{kg} \sigma_1$, характеризующая фазовый сдвиг колебаний в приближении порядка ε , в случае $kH \gg 1$ (короткие волны) обращается в нуль. На мелкой воде (длинные волны)

$$\sigma_0 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{1}{1 + \kappa k^2 H} \sqrt{\frac{(3 - 5\kappa^2 H^2)}{3(1 + 4\kappa k^2 H)}}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \sigma_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H}}. \quad (27)$$

Если пренебречь кривизной волнового профиля в выражении для φ на поверхности бассейна, то

$$\sigma_0 = \pm \frac{1}{4(1 + \kappa k)} \sqrt{\frac{kg}{1 + 2\kappa k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_0 = 0 \quad (28)$$

для глубокой воды и

$$\sigma_0 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{3 - (kH)^2}{(1 + \kappa k^2 H) \sqrt{1 + 4\kappa k^2 H}}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \sigma_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{g}{H}} \quad (29)$$

в длинноволновом приближении. Направленность этого фазового сдвига, обусловленного участием второй гармоники в формировании волнового движения, определяется знаком при a_1 . Из (28) следует, что в случае $P_2^0 = P_3^0 = L_3^0 = 0$ функция $\sigma_0(k)$ для коротких волн в ледовых условиях имеет локальный максимум:

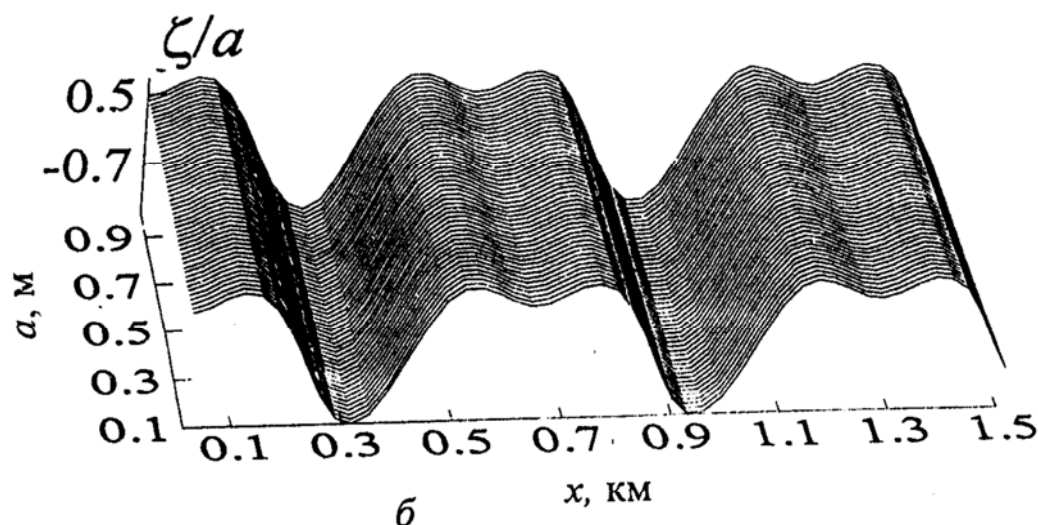
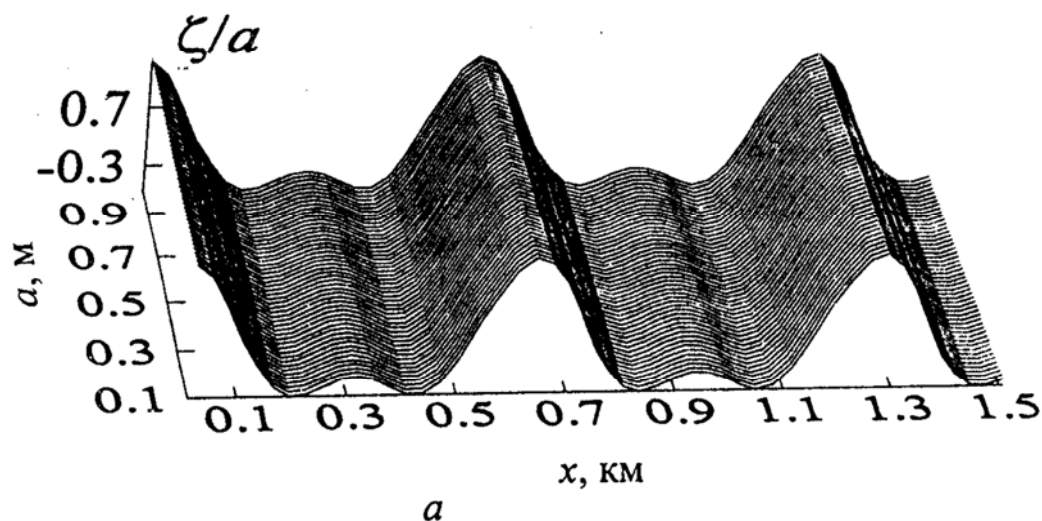
$$\sigma_0^m = \frac{2\sqrt{g}}{7 + \sqrt{17}} \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2\kappa(3 + \sqrt{17})}} \quad \text{при} \quad k = \frac{1}{8\kappa}(\sqrt{17} - 1).$$

Он ограничивает сверху интервал смещения частоты в приближении порядка ε . Величина максимума убывает с ростом толщины льда.

Из (27), (29) можно заключить, что с увеличением длины волны λ (уменьшением волнового числа k) влияние учета кривизны волнового профиля на частоту фазового сдвига σ_0 убывает. С ростом толщины льда величина σ_0 также убывает.

Чтобы оценить зависимость волнового возмущения от ледовых условий и характеристик взаимодействующих гармоник, проводились численные расчеты при значениях $\rho_1/\rho = 0,87$, $0 \leq h \leq 5$ м, $H = 100$ м.

Остановимся сначала на результатах расчетов распределений высоты вертикальных смещений поверхности бассейна вдоль направления перемещения волновых возмущений, полученных по формулам (24), (26) без учета кривизны взволнованной поверхности в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна ($P_2^0 = P_3^0 = L_3^0 = 0$). Зависимость таких распределений от амплитуды a и длины волны $\lambda = 2\pi/k$ основной гармоники показана на рис. 1, а, 2, а при $a_1 > 0$ и на рис. 1, б, 2, б при $a_1 < 0$. Волновые профили вдоль оси x на этих рисунках даны при $h = 2$ м, $t = 0$. На рис. 1 они отвечают длине волны основной гармоники $\lambda = 2\pi 10^2$ м, амплитуда которой изменяется в пределах $0,1 \text{ м} \leq a \leq 1 \text{ м}$. Соответствующие этим значениям a величины ε , характеризующие крутизну волны, при рассматриваемой длине λ изменяются в диапазоне $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$. Волновые профили на рис. 2 приведены в случае постоянной крутизны волны основной гармоники, определяемой значением $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\pi/5 \text{ км} \leq \lambda \leq \pi/3 \text{ км}$. Таким значениям ε и λ соответствуют изменения амплитуды основной гармоники от 0,1 м до 1/6 м.

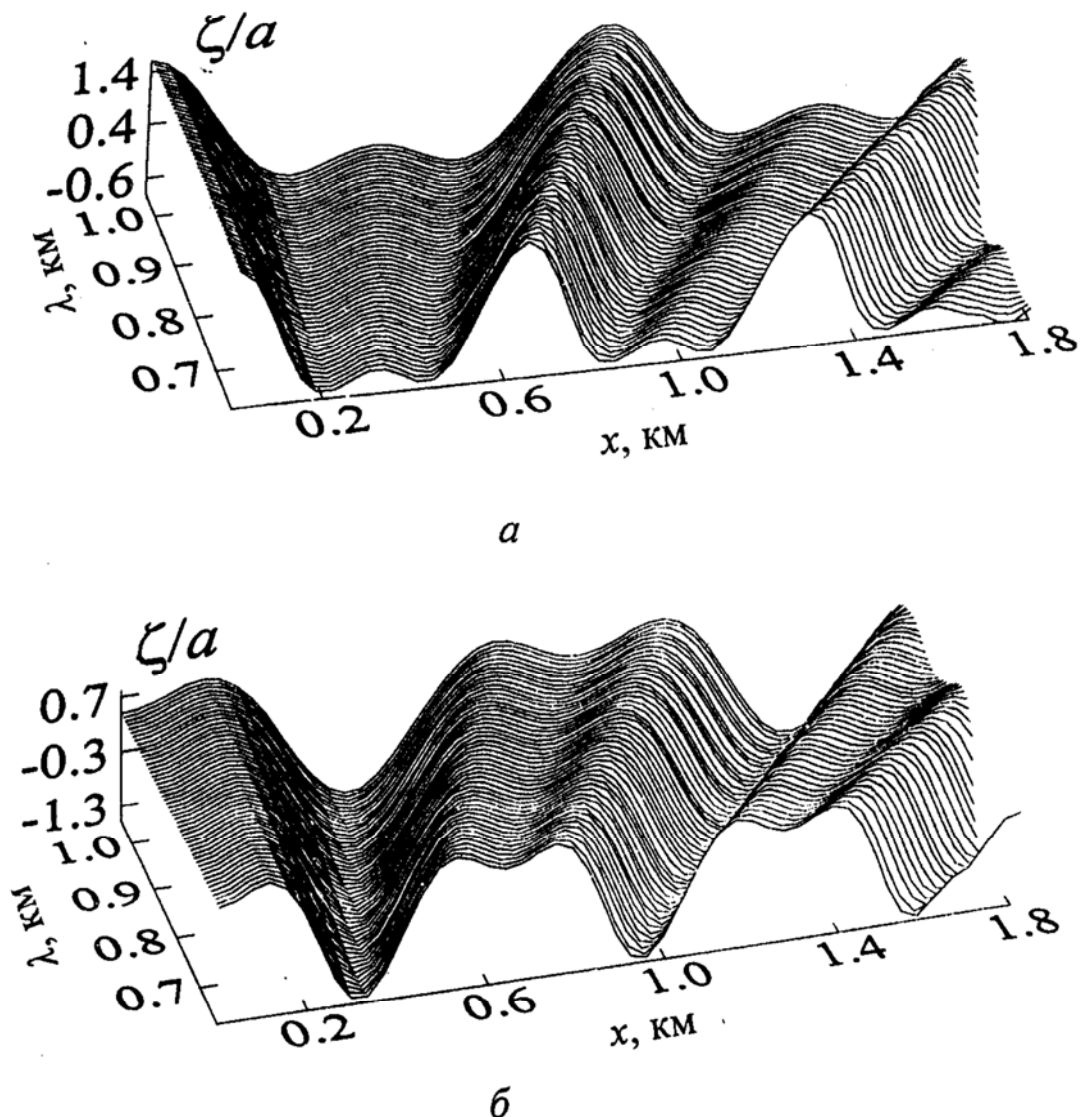


Р и с. 1. Профиль возвышения поверхности бассейна вдоль оси x как функция амплитуды основной гармоники при $\lambda = 2\pi \cdot 10^2$ м, $h = 2$ м, $t = 0$: а — $a_1 > 0$; б — $a_1 < 0$

Сопоставление профилей возмущений $\zeta(x)$, приведенных при $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$, показывает, что изменение начальной фазы второй гармоники на противоположную деформирует пространственное распределение ζ и количественно, и качественно. В случае $a_1 > 0$ максимальные смещения поверхности бассейна проявляются в виде всплесков, в то время как при $a_1 < 0$ — в виде впадин.

С увеличением t происходит смещение пространственного профиля волновых возмущений в направлении их распространения. Напомним, что рассматриваются волны, бегущие в отрицательном направлении оси x . Сдвигается фаза колебаний и с увеличением толщины льда. Это влияние усиливается со временем. Чем больше длина волны начальной гармоники, тем позднее по времени обнаруживаются фазовые отличия, обусловленные эффектом льда. В частности, при $\varepsilon = 10^{-3}$, $kH = 0,1$ они становятся заметными только при $t > 10$ ч, а при $\varepsilon = 10^{-1}$, $kH = 10$ уже при $t > 10$ с. Направленность фазовых изменений за счет льда при изменении начальной фазы второй гармоники (знака при a_1) на противоположную сохраняется. При этом в случае $a_1 < 0$ влияние льда и нелинейности направлено на уменьшение начальной частоты колебаний (уменьшение фазовой скорости распространения возмущений).

Если $a_1 > 0$, то лед уменьшает, а нелинейность увеличивает скорость смещения пространственного профиля возмущений. В этом случае в приближении глубокой воды при $k < \varepsilon/(2\kappa)$ влияние нелинейности сильнее, чем влияние ледяного покрова. При $k > \varepsilon/(2\kappa)$ имеет место обратное явление. В приближении мелкой воды и при $a_1 > 0$ влияние льда проявляется на фазовом сдвиге сильнее, чем влияние нелинейности, если $k > k_0$, где $k_0 = [3\varepsilon/(2\sqrt{2}\kappa H^2)]^{1/3}$. Если $k < k_0$, то нелинейность ускоряет волны сильнее, чем лед тормозит их.



Р и с. 2. Профиль возвышения поверхности бассейна вдоль оси x как функция длины волны основной гармоники при $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 2$ м, $t = 0$: a — $a_1 > 0$; b — $a_1 < 0$

Для коротких волн влияние льда проявляется как в уменьшении фазовой скорости, так и в уменьшении (хотя и слабом) их высоты. Причем эффект уменьшения высоты волн ярче проявляется при положительном значении a_1 , чем при отрицательном.

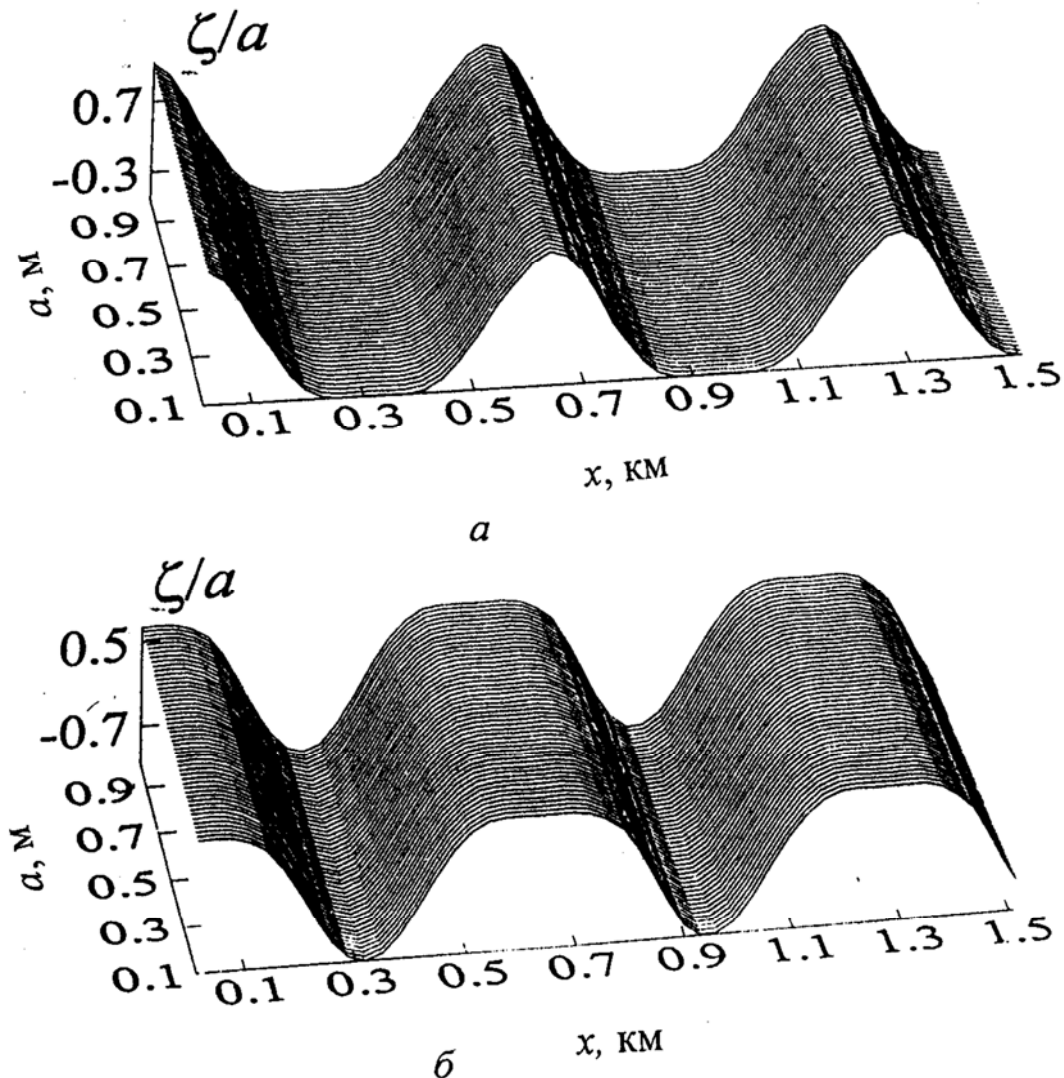
Напомним, что величина a_3 , имеющая одинаковый порядок с a_{3n} ($n = 3 - 6$) и определяющая вместе с ними решение в третьем приближении, может быть найдена только из четвертого приближения. Поэтому при численных расчетах профилей $\zeta(x)$ она не учитывалась. Однако с целью ориентировочной

оценки допускаемой при этом ошибки (величины вклада третьего приближения) расчеты проводились как при $a_{3n} = 0$, так и при $a_{3n} \neq 0$. Их сопоставление не выявило принципиальных качественных отличий в полученных результатах. Пренебрежение величинами a_{3n} привело лишь к незначительному уменьшению экстремальных значений ζ и слабому сглаживанию вершин поднятий и оснований впадин. Причем это влияние убывает с уменьшением длин волн начальных гармоник.

Рассмотрим теперь результаты расчетов распределений высоты волновых возмущений вдоль направления их распространения, полученных при учете зависимости ζ от x и t в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна ($P_2^0 \neq 0$, $P_3^0 \neq 0$, $L_3^0 \neq 0$). Профили $\zeta(x)$ для такого случая как функции амплитуды a и длины волны λ основной гармоники приведены на рис. 3, а, 4, а при $a_1 > 0$ и на рис. 3, б, 4, б при $a_1 < 0$. Они получены при $h = 2$ м, $t = 0$ для тех же значений ε , λ , a , что и соответствующие профили $\zeta(x)$ на рис. 1, а, 2, а ($a_1 > 0$) и на рис. 1, б, 2, б ($a_1 < 0$). Из сопоставления распределений ζ по x на рис. 1, 2 с распределениями на рис. 3, 4 можно заключить, что изменение начальной фазы второй взаимодействующей гармоники приводит качественно к таким же изменениям, как и при $P_n^0 = L_n^0 = 0$. При $a_1 > 0$ максимальные смещения поверхности бассейна достигаются в вершинах поднятий, а минимальные — в подошвах впадин. Если же $a_1 < 0$, то смещения в подошвах впадин больше, чем в вершинах поднятий. Величина же вклада второй гармоники при уточненных и не уточненных граничных условиях для нелинейных приближений при одинаковых значениях исходных параметров разная. В первом случае вклад заметнее проявляется при больших значениях длины волны основной гармоники, чем во втором. Это подтверждается тем, что при уточненных граничных условиях с уменьшением длины волны λ теряется волнистость впадин ($a_1 > 0$) и поднятий ($a_1 < 0$) в распределениях ζ вдоль оси x . Уточнение граничных условий в случае коротких волн приводит и к уменьшению величин максимальных вертикальных смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня.

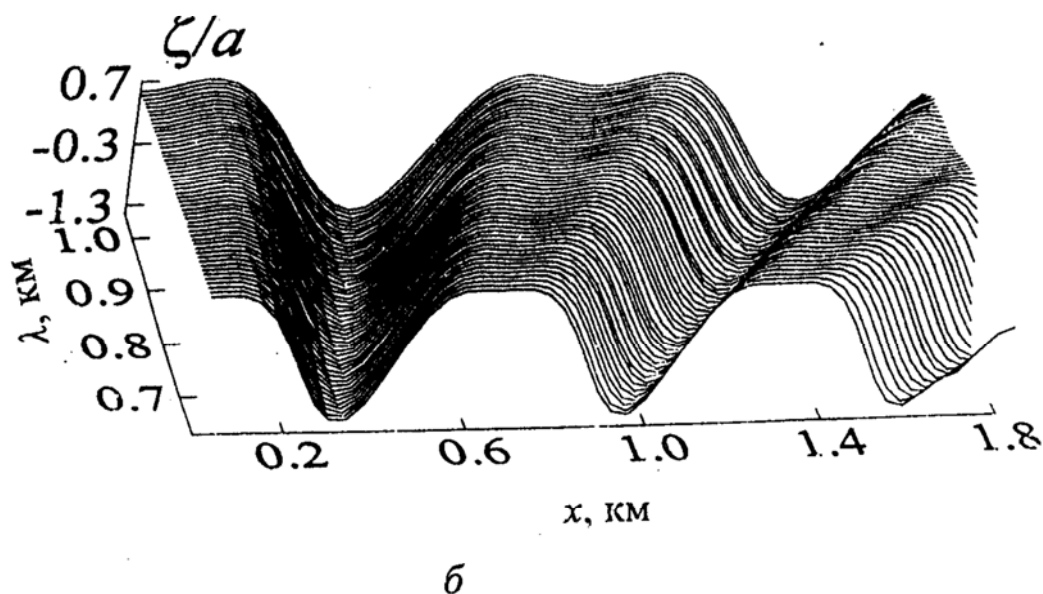
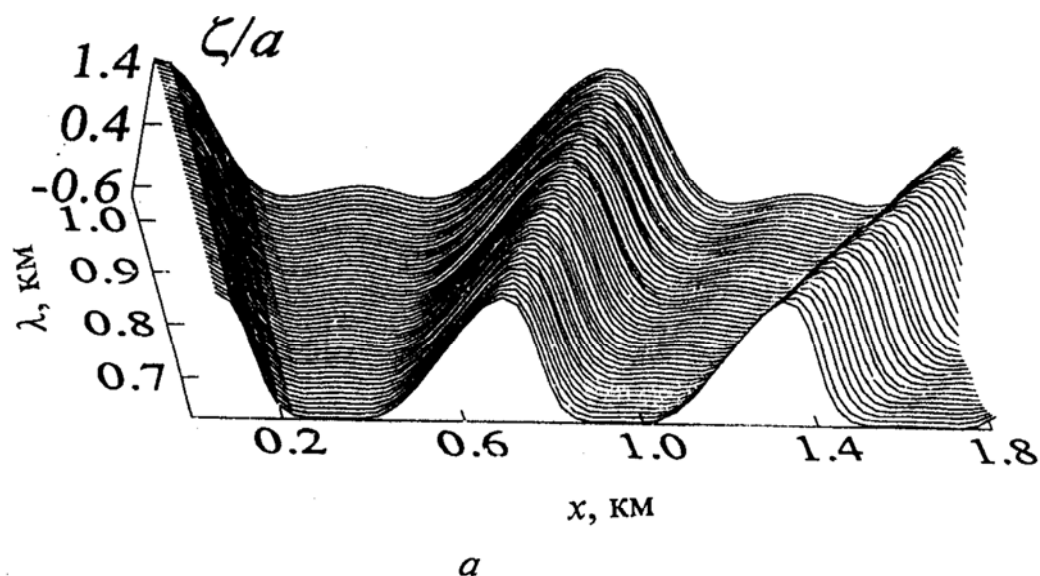
С уменьшением длины волны основной гармоники уточнение граничных условий не только сглаживает волнистость впадин и поднятий на профилях $\zeta(x)$, но и приближает вид профилей к гармоническому. Кроме того, становится заметным смещение распределений ζ по x , полученных при уточненных и не уточненных граничных условиях. Это следует из сопоставления распределений ζ по x , приведенных на рис. 5 для уточненных (штриховые) и не уточненных (сплошные линии) граничных условий при значениях параметров $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$, $\lambda = 2\pi/3 \cdot 10^2$ м, $h = 0$, $t = 300$ с. Графики на рис. 5, а соответствуют случаю $a_1 > 0$, на рис. 5, б — случаю $a_1 < 0$. Отметим, что чем короче основная гармоника, тем при меньших значениях t проявляется обусловленный уточнением граничных условий фазовый сдвиг волновых возмущений. Величина горизонтального смещения распределений ζ по x определяется значениями $\sigma_0 = \tau \sqrt{kg} \sigma_1$ и $\sigma^0 = \tau \sqrt{kg} \sigma_2$ в приближениях порядка ε и ε^2 соответственно. Распределение σ_0 по волновому числу k приведено на

рис. 6 при уточненных (линии с кружками) и неуточненных граничных условиях. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии на этом рисунке отвечают толщинам льда 0, 3, 5 м. Квадратом отмечено значение $\sigma_0(0) = 3\sqrt{2}/8 \cdot \sqrt{g/H}$. Видно, что в коротковолновом диапазоне уточнение граничных условий существенно влияет на $\sigma_0(k)$. Ледяной покров уменьшает значения $\sigma_0(k)$.



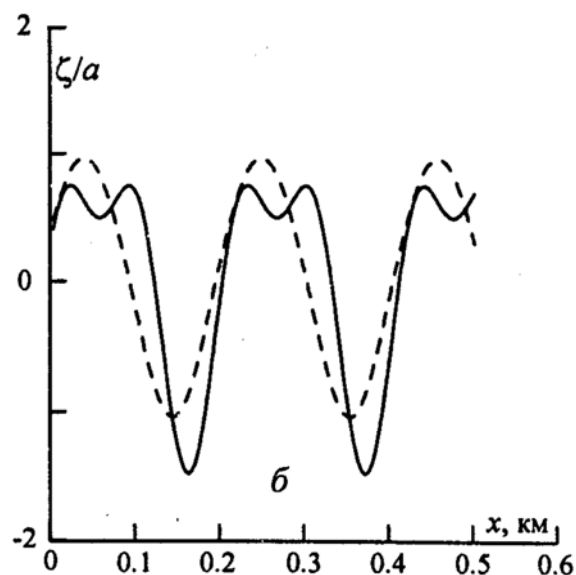
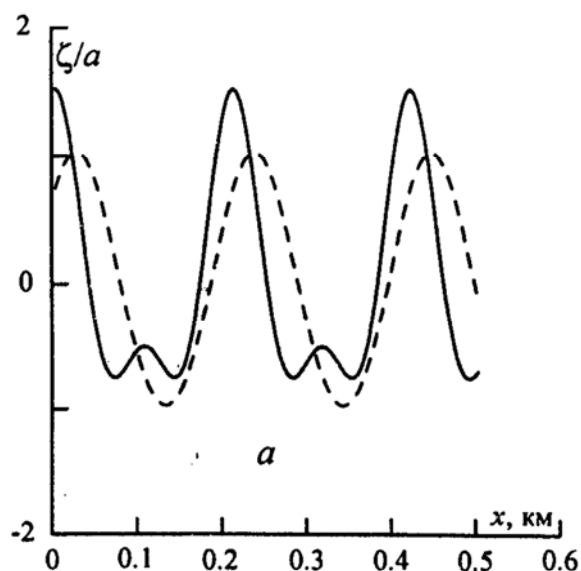
Р и с. 3. Профиль возвышения поверхности бассейна вдоль оси x как функция амплитуды основной гармоники в случае уточненных граничных условий для нелинейных приближений при $\lambda = 2\pi \cdot 10^2$ м, $h = 2$ м, $t = 0$: a — $a_1 > 0$; $б$ — $a_1 < 0$

Распределение сдвиговой частоты $\beta_1 = ak\sigma_0$ по волновому числу представлено на рис. 7 при $a = 1$ м. Сплошные и штриховые линии соответствуют толщине льда 0 и 5 м. Кружками отмечены зависимости $\beta_1(k)$ при уточненных граничных условиях. Из анализа графиков $\beta_1(k)$ следует, что частота сдвига в приближении порядка ϵ при уточненных граничных условиях ограничена сверху. Величина максимума β_1 убывает с ростом толщины льда. Убывает она и с уменьшением амплитуды основной гармоники.

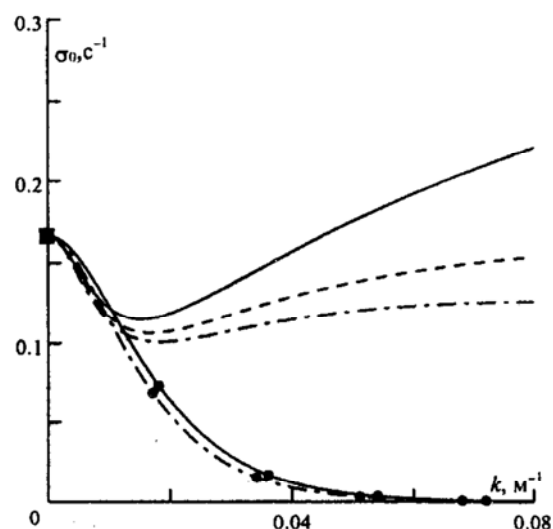


Р и с. 4. Профиль возвышения поверхности бассейна вдоль оси x как функция длины волны основной гармоники в случае уточненных граничных условий для нелинейных приближений при $\epsilon = 10^{-3}$, $h = 2$ м, $t = 0$: а — $a_1 > 0$; б — $a_1 < 0$

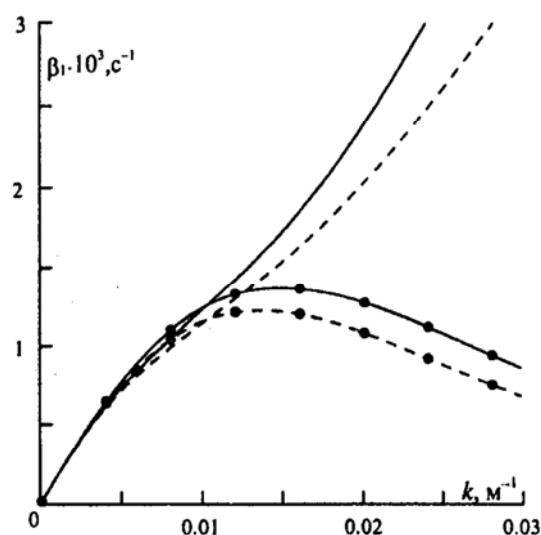
Таким образом, в корстковолновом диапазоне пренебрежение зависимостью ζ_0 от x и t в (8) при выводе граничных условий для нелинейных приближений может привести к заметным погрешностям в определении фазового сдвига возмущений и величин максимальных смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня при нелинейном взаимодействии периодических бегущих волн.



Р и с. 5. Профили $\zeta(x)$ при уточненных (штриховые линии) и неуточненных (сплошные) граничных условиях при $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$, $\lambda = 2\pi/3 \cdot 10^2$ м, $h = 0$, $t = 300$ с: а — $a_1 > 0$; б — $a_1 < 0$



Р и с. 6. Зависимость распределений σ_0 по волновому числу k от толщины льда при уточненных (линии с кружками) и неуточненных граничных условиях. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии соответствуют толщине льда 0; 3; 5 м. Квадратом отмечено значение $\sigma_0 = \frac{3}{8} \sqrt{2g/H}$



Р и с. 7. Дисперсия сдвиговой частоты в приближении порядка ε при амплитуде основной гармоники 1 м. Сплошные и штриховые линии соответствуют толщине льда 0 и 5 м. Кружками отмечены зависимости $\beta_1(k)$ при уточненных граничных условиях

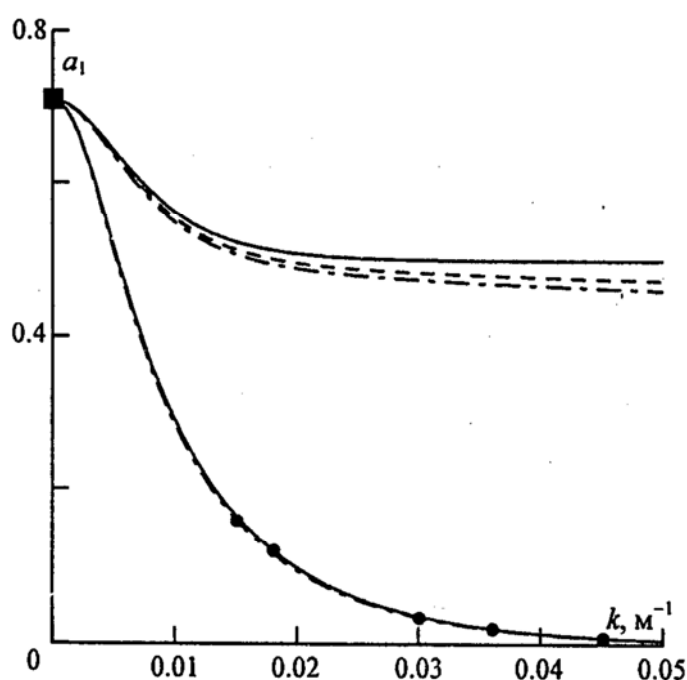
Зависимости амплитуды второй взаимодействующей гармоники от толщины льда

Величина амплитуды второй взаимодействующей гармоники a_1 при уточненных граничных условиях определяется выражением (18). Из этой формулы следует, что в коротковолновом приближении ($kH \gg 1$) амплитуда a_1 близка к нулю $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_1 = 0 \right)$. В случае длинных волн ($kH \ll 1$)

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{3 - 5k^2 H^2} \sqrt{\frac{1 + \kappa k^2 H}{1 + 4\kappa k^2 H}}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если пренебречь кривизной волнового профиля при определении φ_x и φ_t на поверхности бассейна, то амплитуда a_1 определяется формулой (26). Тогда для коротких (глубокая вода) и длинных (мелкая вода) волн найдем соответственно:

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \kappa k}{1 + 2\kappa k}}, \quad a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \kappa k^2 H}{1 + 4\kappa k^2 H}}.$$



Р и с. 8. Зависимость распределений a_1 по волновому числу k от толщины льда при уточненных (линии с кружками) и неуточненных граничных условиях. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии соответствуют толщине льда 0; 3; 5 м. Квадратом отмечено значение $a_1(0) = 1/\sqrt{2}$

Из полученных формул видно, что при уточненных граничных условиях величина a_1 изменяется от нуля до $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Если же использовать неуточненные граничные условия, то эта величина при отсутствии льда находится в пределах от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{\sqrt{2}}$. В покрытом льдом бассейне она изменяется от $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ до $\frac{1}{\sqrt{2}}$. С ростом толщи-

ны льда значение a_1 убывает. Убывает величина a_1 и с уменьшением длины волны основной гармоники. Это иллюстрируют

графики на рис. 8, где сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями приведены модуль функции $a_1(k)$ для толщин льда 0, 3, 5 м соответственно. Линии с кружками получены при уточненных граничных условиях. Квад-

ратом отмечено значение $|a_1(0)| = 1/\sqrt{2}$. Такая зависимость $a_1(k)$ объясняет зависимость приближения профиля $\zeta(x)$ к гармоническому виду с уменьшением длины волны основной гармоники в случае уточненных граничных условий. В частности, на рис. 5 профиль $\zeta(x)$, нарисованный штриховой линией, представляет собой практически сдвинутую по фазе начальную основную гармонику с амплитудой ~ 1 м.

Перенос массы

Изменения нелинейного переноса массы, обусловленные уточнением модели, можно оценить по формулам из [11, 20] после замены соответствующих выражений на полученные при уточнении. Выполненный анализ показал, что величина скорости поступательного перемещения жидких частиц и полный средний перенос массы в направлении движения взаимодействующих гармоник в ледовых условиях меньше, чем при отсутствии льда. Эти отличия, усиливающиеся с ростом толщины льда и амплитуд гармоник, убывают с увеличением длины (с уменьшением крутизны) волны основной гармоники. Участие второй взаимодействующей гармоники в формировании волновых возмущений увеличивает скорость переноса и полный средний перенос массы. Однако обусловленные второй гармоникой изменения убывают с ростом толщины льда. Нелинейный перенос массы, полученный при уточненных уравнениях, меньше, чем при неуточненных. Это объясняется тем, что при уточнении модели значение амплитуды a_1 убывает с уменьшением длины волны основной гармоники. Следовательно, убывает и вклад второй гармоники в нелинейный перенос массы. Кроме того, уточнение граничных условий для нелинейных приближений существенно уменьшает различие величин скорости переноса и полного среднего переноса, полученных при распространении волны конечной амплитуды и при нелинейном взаимодействии волн.

Заключение

Методом многих масштабов построены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости движения жидких частиц волнового возмущения, формируемого при нелинейном взаимодействии периодических бегущих волн первой и второй гармоник в покрытой битым льдом однородной жидкости конечной постоянной глубины.

Исследована зависимость амплитудно-фазовой структуры возмущений и нелинейного переноса массы от толщины льда, глубины бассейна и параметров взаимодействующих гармоник. Дана оценка погрешности, вносимой при этом пренебрежением кривизны волны в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна при выводе граничных условий для нелинейных приближений.

Показано, что при нелинейном взаимодействии волн частота возмущений зависит от начальной амплитуды основной гармоники не только во втором, но и в первом приближении. Влияние льда может проявляться при взаимодействии как коротких, так и длинных волн. В случае длинных волн оно вы-

ражается главным образом в фазовом сдвиге пространственного распределения волновых возмущений. В случае коротких волн заметное влияние льда проявляется в уменьшении не только фазовой скорости, но и амплитуды возмущений. Причем уменьшение амплитуды ярче выражено, при одинаковых начальных фазах взаимодействующих гармоник, чем при противоположных. Изменение фазы начальной второй гармоники на противоположную деформирует профиль пространственного распределения возмущений и количественно, и качественно. Направленность фазовых изменений за счет льда при этом сохраняется. С ростом толщины льда величина амплитуды второй взаимодействующей гармоники убывает. Убывает она и с уменьшением длины волны основной гармоники.

Пренебрежение кривизной волнового профиля в выражении потенциала скорости волновых возмущений при выводе граничных условий для нелинейных приближений может привести к заметным погрешностям в определении фазового сдвига коротковолновых возмущений и величин смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня при нелинейном взаимодействии волновых гармоник.

Величина скорости поступательного перемещения жидких частиц и полный средний перенос массы в направлении движения волн в ледовых условиях меньше, чем при отсутствии льда. Это отличие, усиливающееся с ростом толщины льда и амплитуд гармоник, убывает с увеличением длины (с уменьшением крутизны) волны основной гармоники. Участие второй взаимодействующей гармоники в формировании волновых возмущений увеличивает скорость переноса, а следовательно, и полный средний перенос массы. Однако вклад второй гармоники в нелинейный перенос убывает с ростом толщины льда. Уточнение уравнений для нелинейных приближений, заключающееся в учете пространственно-временных изменений профиля волны в поверхностных граничных условиях, уменьшает различие характеристик нелинейного переноса, полученных при распространении волны конечной амплитуды и при нелинейном взаимодействии волновых гармоник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weitz M., Keller J.B.* Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1950. — 3, № 3. — P. 305–318.
2. *Peters A.S.* The effect of a floating mat on water waves // *Ibid.* — № 4. — P. 319 – 354.
3. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеиздат, 1967. — 215 с.
4. *Букатов А.Е., Черкесов Л.В.* Влияние ледяного покрова на волновые движения // *Морские гидрофизические исследования.* — 1971. — № 2(52). — С. 113 – 144.
5. *Wadhams P.* Attenuation of swell by sea ice // *J. Geophys. Res.* — 1973. — 78, № 18. — P. 3552 – 3563.
6. *Fox C., Squire V.A.* Reflection and transmission characteristics at the edge of shore of fast sea ice // *Ibid.* — 1990. — 95, № C7. — P. 11629 – 11639.
7. *Букатов А.Е., Жарков В.В.* Влияние битого льда на распространение поверхностных волн над уступом дна // *Изв. РАН. МЖГ.* — 1998. — № 6. — С. 106 – 115.
8. *Ильичев А.Т., Марченко А.В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1989. — № 1. — С. 88 – 96.
9. *Гольдштейн Р.В., Марченко А.В.* О длинных волнах в системе ледяной покров-жидкость при наличии ледового сжатия // *Электрофизические и физико-механические свойства льда.* — Л.: Гидрометеиздат, 1989. — С. 188 – 205.

10. *Bukatov A.E., Bukatov A.A.* Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // *Int. J. Offsh. and Polar Engin.* — 1999. — 2, № 3. — P. 161 – 166.
11. *Bukatov A.E., Bukatov A.A.* Effect of the floating broken ice on the interaction of surface waves of finite amplitude// *Системы контроля окружающей среды.* — Севастополь: МГИ НАН Украины, 2002. — С. 396 – 405.
12. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Math. Phys. Pap.* — Cambr. Univ. Press. — 1847. — 1. — P. 197 – 229.
13. *Нестеров С.В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // *Изв. АН СССР. ФАО.* — 1968. — 4, № 10. — С. 1123 – 1125.
14. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. — Л.: Судостроение, 1985. — 386 с.
15. *Longuet-Higgins M.S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes Waves // *J. Fluid Mech.* — 1987. — 179. — P. 547 – 555.
16. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.-Л: ОНТИ, 1936. — 304 с.
17. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 319 с.
18. *Алешков Ю.З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. — 196 с.
19. *Longuet-Higgins M.S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. Part 2. Water of finite depth // *J. Fluid Mech.* — 1988. — 186. — P. 321 – 336.
20. *Букатов А.Е., Букатов А.А.* Перенос массы при нелинейном взаимодействии поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом// *Морской гидрофизический журнал.* — 2001. — № 2. — С. 3 – 10.
21. *Букатов А.Е., Букатов А.А.* Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом// *Там же.* — 2002. — № 5. — С. 34 – 47.
22. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 455 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 11.06.02

ABSTRACT By means of the method of multiple scales obtained are the asymptotic expansions up to the third order values for the basin surface elevation and the potential of the fluid particle motion velocity of the wave disturbance formed under the non-linear interaction of periodic running waves of the first and the second harmonics in the homogeneous ideal incompressible fluid of constant finite depth covered by broken ice. Dependence of the amplitude-phase structure of disturbances on the ice thickness, the basin depth and the parameters of interacting harmonics is analyzed. Estimated is the error of defining the parameters of the formed vertical deviation of the basin surface and non-linear mass transport resulted from the neglect of the wave profile curvature in the expression for the velocity potential while deducing kinematic and dynamic surface boundary conditions for non-linear approximations.