

УДК 551.465

И.И. Карпатович, Г.К. Коротаев

Исследование абсолютной неустойчивости течений в океанических круговоротах

В приближении геометрической оптики исследуется абсолютная неустойчивость течений в океанических круговоротах. Показано, что абсолютная неустойчивость имеет место при стационарности наиболее неустойчивой моды волнового движения. Получено качественное соответствие с численным экспериментом по моделированию синоптической изменчивости крупномасштабных океанических круговоротов.

Введение

Как известно, неустойчивость в физических системах бывает двух типов — конвективная и абсолютная [1]. Для абсолютной неустойчивости характерен неограниченный рост начального возмущения в каждой фиксированной точке пространства, а при конвективной неустойчивости рост амплитуды начального возмущения будет виден наблюдателю, движущемуся вместе с волновым пакетом. При этом в каждой фиксированной точке пространства амплитуда возмущения затухает со временем. Наибольший интерес при исследовании представляет случай абсолютной неустойчивости, т.к. в районах ее локализации, как отмечено в [2], имеет место интенсивная генерация вихрей.

Классический метод исследования абсолютной неустойчивости, описанный в [3], состоит в поиске точек ветвления модуля функции волнового вектора, определяемого дисперсионным соотношением. В общем случае это довольно сложная аналитическая задача, которую удастся решить до конца лишь для простых дисперсионных уравнений невысокого порядка. В связи с этой трудностью на практике используется другой подход к исследованию неустойчивости течений, который мы будем применять в настоящей работе. Он связан с использованием концепции групповой скорости [4 – 6]. При этом, как будет показано ниже, можно определить условие возникновения абсолютной неустойчивости без анализа ветвей дисперсионного соотношения.

Рассмотрим эволюцию начального возмущения, локализованного в некоторой малой области, однородной физической системы

$$\varphi(x, y, t) = \int_{-\infty - \infty}^{\infty} \int_{-\infty - \infty}^{\infty} A(k, l) \exp[2\pi i(kx + ly - \omega t)] dk dl,$$

где k, l — компоненты волнового вектора; ω — частота волны; функция $A(k, l)$ определяется начальными условиями. Асимптотика начального возмущения в соответствии с методом стационарной фазы для больших t имеет вид:

© И.И. Карпатович, Г.К. Коротаев, 2004

$$\varphi(x, y, t) \cong \frac{1}{t} A(k_0, l_0) \exp[2\pi i(k_0 x + l_0 y - \omega(k_0, l_0)t)]$$

где

$$x = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0, l_0} t = C_x t, \quad y = \frac{\partial \omega}{\partial l} \Big|_{k_0, l_0} t = C_y t.$$

Групповая скорость неустойчивых волн в общем случае является величиной комплексной. Мнимая часть частоты волны $\omega_i = \text{Im } \omega(k_0, l_0)$ дает коэффициент роста амплитуды начального возмущения, а действительная компонента частоты волны определяет эволюцию возмущения вдоль траектории луча:

$$x = \frac{\partial \omega_r}{\partial k} \Big|_{k_0, l_0} t, \quad y = \frac{\partial \omega_r}{\partial l} \Big|_{k_0, l_0} t.$$

Особый интерес при исследовании неустойчивости течений представляет наиболее неустойчивая мода, т.е. значения $k_0 = k_m$ и $l_0 = l_m$, при которых функция ω_i имеет максимум. Для нахождения наиболее неустойчивой моды имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_i}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial l} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Групповая скорость наиболее неустойчивой моды

$$\vec{C}_m = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_m, l_m}, \frac{\partial \omega}{\partial l} \Big|_{k_m, l_m} \right) = \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \Big|_{k_m, l_m}, \frac{\partial \omega_r}{\partial l} \Big|_{k_m, l_m} \right)$$

— величина действительная, она является скоростью пика неустойчивого волнового пакета [1, 5, 7]. Если групповая скорость отлична от нуля, то это случай конвективной неустойчивости, т. к. пик волнового возмущения будет сноситься течением. Если $\vec{C}_m = 0$, то будет иметь место абсолютная неустойчивость, т.к. пик волнового возмущения будет смещаться в пространстве. При этом из-за дисперсии начальное возмущение будет постепенно охватывать всю систему, что в рамках линейной теории приведет к неограниченному росту возмущения в каждой точке пространства. Таким образом, абсолютная неустойчивость будет иметь место при таком соотношении параметров задачи, при котором наиболее неустойчивая мода будет стационарна.

Для неоднородной морской среды с переменными по пространству течениями, если характерный масштаб крупномасштабных океанических течений существенно больше характерного масштаба Россби, хорошо выполняется приближение геометрической оптики. Эволюция волновых возмущений описывается известной системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = C_x = \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{dy}{dt} = C_y = \frac{\partial \omega}{\partial l} \\ \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

Для нахождения наиболее неустойчивой моды k_m и l_m и места ее локализации x_m и y_m получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_l}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \omega_l}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial \omega_l}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \omega_l}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Так же, как и для однородной среды, абсолютная неустойчивость будет иметь место в случае стационарности наиболее неустойчивой моды, т. е. при

$$\vec{C}_m = \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \Big|_{k_m, l_m, x_m, y_m}, \frac{\partial \omega_r}{\partial l} \Big|_{k_m, l_m, x_m, y_m} \right) = 0.$$

В дальнейшем в приближении геометрической оптики исследуем абсолютную неустойчивость крупномасштабных океанических течений. Учет стратификации проведем на примере двухслойной модели океана.

Уравнения движения, описывающие синоптическую изменчивость крупномасштабных океанических течений

Такие уравнения в рамках двухслойной модели стратификации океана имеют, согласно [6], вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \varphi_1 - F_1(\varphi_1 - \varphi_2)) + V_1 \frac{\partial \Delta \varphi_1}{\partial y} + U_1 \frac{\partial \Delta \varphi_1}{\partial x} + \\ + (\beta - F_1 U_2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + F_1 V_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + F_1 U_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - F_1 V_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \varphi_2 - F_2(\varphi_2 - \varphi_1)) + V_2 \frac{\partial \Delta \varphi_2}{\partial y} + U_2 \frac{\partial \Delta \varphi_2}{\partial x} + \\ + (\beta - F_2 U_1) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + F_2 V_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + F_2 U_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - F_2 V_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\varphi_{1,2}$ — флуктуационные функции тока в верхнем и нижнем слоях; $U_{1,2}$ и $V_{1,2}$ — компоненты скорости средних течений; $F_1 = \frac{f_0^2 L^2}{g h_0 \Delta \rho / \rho_1}$; $F_2 = \frac{f_0^2 L^2}{g H_0 \Delta \rho / \rho_1}$; $\beta = \beta_0 L^2 / U$; $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ — разность плотностей воды в нижнем и верхнем слоях; f_0 — параметр Кориолиса; U — масштаб для горизонтальной скорости; L — масштаб для переменных x и y ; $\beta_0 = \partial f_0 / \partial y_*$; h_0 и H_0 — глубина верхнего и нижнего слоев соответственно.

Выбрав для переменных x и y масштаб $L = 100$ км, масштаб скорости жидких частиц $U = 10$ см/с; для средних широт $f_0 \cong 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $h_0 \cong 500$ м, $H_0 \cong 5$ км, $\Delta \rho / \rho = 2 \cdot 10^{-3}$, получим характерные значения безразмерных параметров $F_1 \cong 10$, $F_2 \cong 1$, $\beta \cong 1,5$.

Анализ дисперсионного соотношения

Отыскивая волновое решение системы уравнений (4), получим дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} & \omega^2 K^2 (K^2 + F_1 + F_2) + \omega (\beta k (2K^2 + F_1 + F_2) - E_1 K^2 (K^2 + 2F_2) - \\ & - E_2 K^2 (K^2 + 2F_1)) + (\beta k - K^2 E_1)(\beta k - F_2 E_1) - \beta k (F_1 E_2 + K^2 E_2) + \\ & + K^2 E_2 (K^2 E_1 + F_1 E_2) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где ω — частота волны; K — модуль волнового вектора; $K^2 = k^2 + l^2$; $E_1 = kU_1 + lV_1$; $E_2 = kU_2 + lV_2$. Для частоты волны ω получим из (5) следующее соотношение:

$$\omega = - \frac{\beta k (2K^2 + F_1 + F_2) - E_1 K^2 (K^2 + 2F_2) - E_2 (K^2 + 2F_1) K^2 \pm \sqrt{\det}}{2K^2 (K^2 + F_1 + F_2)},$$

где

$$\det = \beta^2 k^2 (F_1 + F_2)^2 + 2\beta k (E_1 - E_2) K^4 (F_1 - F_2) - K^4 (E_1 - E_2)^2 (4F_1 F_2 - K^4).$$

Неустойчивость течений будет иметь место при $\det < 0$. Необходимые и достаточные условия неустойчивости находятся из анализа подкоренного выражения. Следуя [8], где проведен аналогичный анализ подкоренного выражения, получим условия неустойчивости

$$U_s > \beta / F_2 \text{ при } U_s > 0,$$

$$U_s < -\beta / F_1 \text{ при } U_s < 0, \quad U_s = \frac{k(U_1 - U_2) + l(V_1 - V_2)}{k}.$$

В случае неустойчивости соотношение для ω имеет вид $\omega = \omega_r + i \omega_i$, где

$$\omega_r = -\frac{\beta k(2K^2 + F_1 + F_2) - E_1 K^2(K^2 + 2F_2) - E_2(K^2 + 2F_1)K^2}{2K^2(K^2 + F_1 + F_2)},$$

$$\omega_i = \frac{\pm \sqrt{|\det|}}{2K^2(K^2 + F_1 + F_2)} \quad \text{— действительная и мнимая компоненты частоты волны.}$$

Абсолютная неустойчивость однородных течений

Исследуем сначала абсолютную неустойчивость однородных по пространству течений. Ввиду сложности дисперсионного соотношения определить условия, при которых имеет место абсолютная неустойчивость, удастся только численными методами. Рассмотрим для простоты абсолютную неустойчивость зональных течений ($U_{1,2} \neq 0$, $V_{1,2} = 0$). В этом случае для мнимой компоненты частоты волны получим выражение

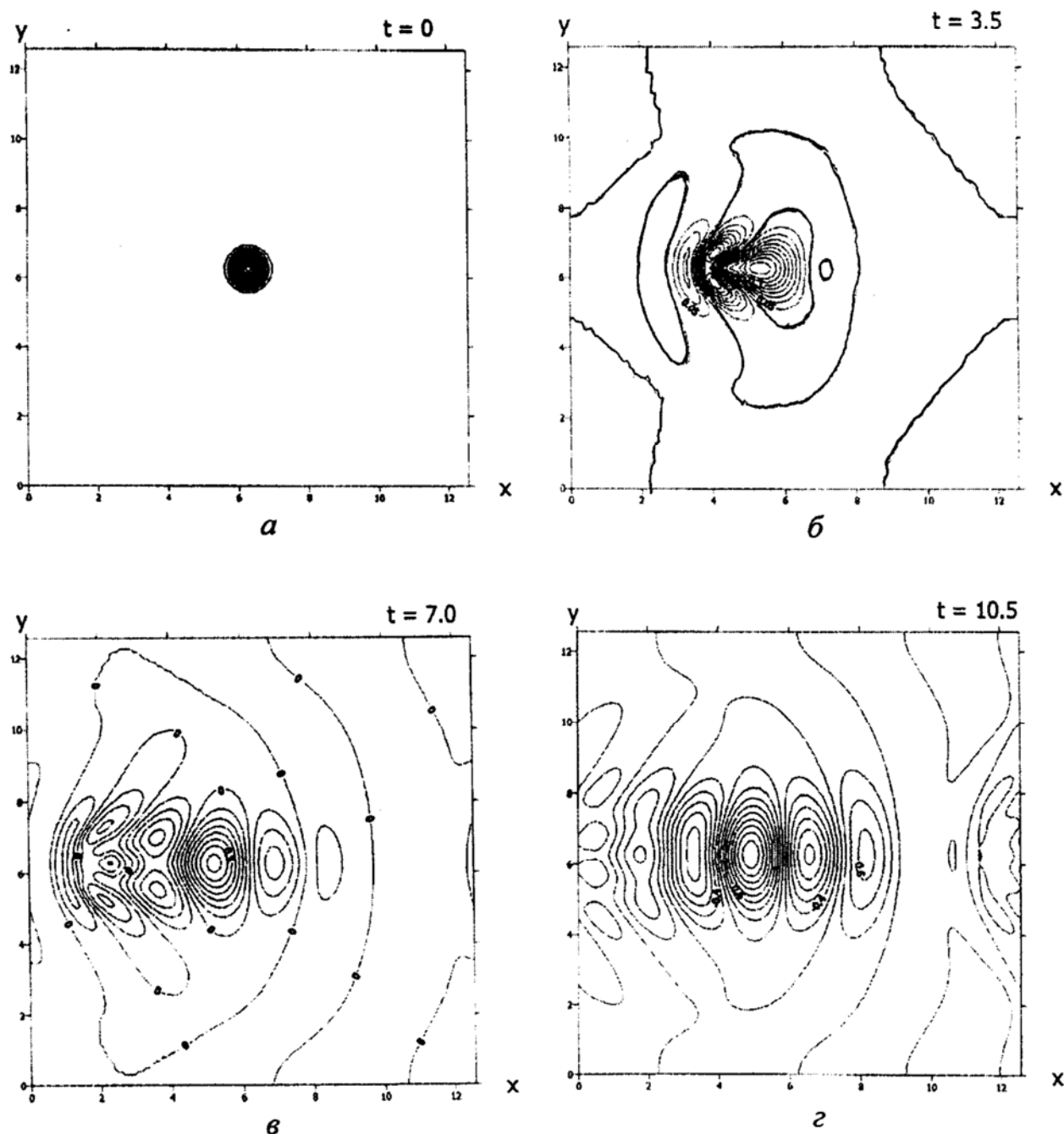
$$\omega_i = \pm \frac{|k| \sqrt{\beta^2(F_1 + F_2)^2 + 2\beta(U_1 - U_2)K^4(F_1 - F_2) - K^4(U_1 - U_2)^2(4F_1F_2 - K^4)}}{2K^2(K^2 + F_1 + F_2)}.$$

Характерные значения параметров задачи выберем следующими: $\beta = 1$, $F_1 = 10$, $F_2 = 1$. При $U_1 = -1$, $U_2 = 0$, решая численными методами систему уравнений (1) (например итерационным методом Ньютона [9]), получим: $k_m = \pm 1,99$, $l_m = 0$, $\omega_i(k_m, l_m) = \pm 0,39$, $\vec{C}_m = \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \Big|_{k_m, l_m}, \frac{\partial \omega_r}{\partial l} \Big|_{k_m, l_m} \right) = (-0,25; 0)$.

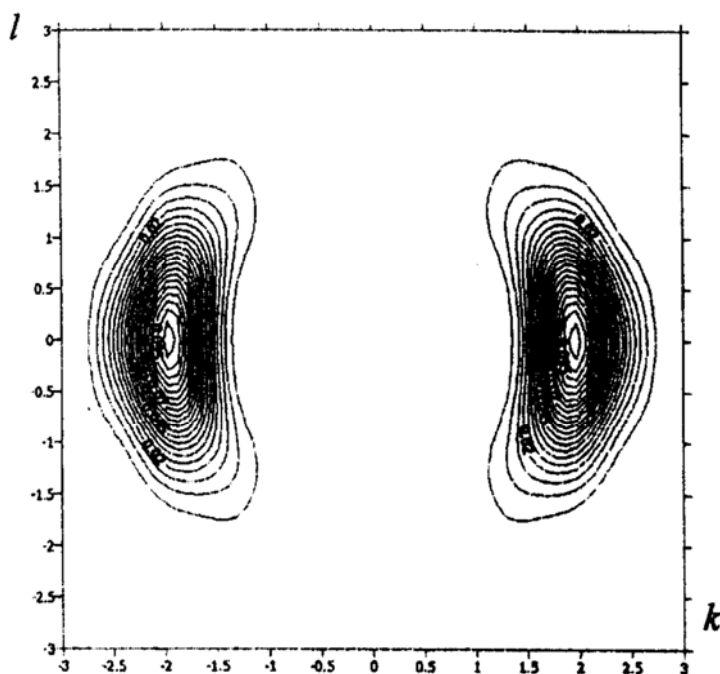
Т.к. $\vec{C}_m \neq 0$, то будет иметь место конвективная неустойчивость и пик любого начального возмущения будет смещаться в пространстве. Будем теперь изменять значения U_1 и U_2 так, чтобы сдвиг течений $\delta U = U_1 - U_2$ был величиной постоянной и равной -1 . При этом значения k_m и l_m останутся теми же, а при $U_1 = -0,75$, $U_2 = 0,25$, $\vec{C}_m = 0$ и наиболее неустойчивая мода будет стационарной. Аналогичным образом для незональных течений можно определить соотношение параметров задачи, при котором будет иметь место абсолютная неустойчивость.

На рис. 1, а–г показана временная эволюция начального возмущения в верхнем слое для двухслойной модели синоптического океана при $\beta = 1$, $F_1 = 10$, $F_2 = 1$, $U_1 = -0,75$, $U_2 = 0,25$. Численное интегрирование системы уравнений (4) при периодических граничных условиях выполнено центральными разностями по времени и координатам с разрешением 128×128 . Начальное возмущение в верхнем слое выбрано в виде гауссо-

вой функции, в нижнем слое — равно нулю. Абсолютная неустойчивость проявляется в виде неограниченно растущего по пространству стационарного вихревого возмущения. Как показывает спектральный анализ функции тока в верхнем слое, при достаточно большом временном интервале интегрирования максимум спектра функции возмущения (рис. 2) имеет место при $k_m = \pm 2,00$, $l_m = 0$, т. е., как показано выше, соответствует стационарной моде.



Р и с. 1. Временная эволюция начального возмущения в верхнем слое для двухслойной модели оксана ($\beta = 1$, $F_1 = 10$, $F_2 = 1$, $U_1 = -0,75$, $U_2 = 0,25$, $V_1 = V_2 = 0$) при: $t = 0$ — а; $t = 3,5$ — б; $t = 7,0$ — в; $t = 10,5$ — з



Р и с. 2. Спектр флуктуационной функции тока φ_1 при $t = 10,5$

Абсолютная неустойчивость неоднородных течений

Рассмотрим следующие функции тока средней циркуляции, качественно моделирующие крупномасштабные океанические круговороты:

$$\psi_{01} = \Psi_{01} \exp \left[-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) / R_0^2 \right],$$

$$\psi_{02} = \Psi_{02} \exp \left[-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) / R_0^2 \right].$$

Для скоростей течений в верхнем и нижнем слоях получим:

$$U_{1,2} = \Psi_{01,02} \frac{2(y - y_0)}{R_0^2} \exp \left[-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) / R_0^2 \right],$$

$$V_{1,2} = -\Psi_{01,02} \frac{2(x - x_0)}{R_0^2} \exp \left[-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) / R_0^2 \right].$$

Случай $\Psi_{01} > 0, \Psi_{02} > 0$ соответствует антициклоническому круговороту, случай $\Psi_{01} < 0, \Psi_{02} < 0$ — циклоническому. В центре круговорота (x_0, y_0) скорость течений равна нулю, при

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R_0 / \sqrt{2}$$

модуль вектора течений

$$W_{1,2} = \sqrt{U_{1,2}^2 + V_{1,2}^2}$$

достигает максимального значения

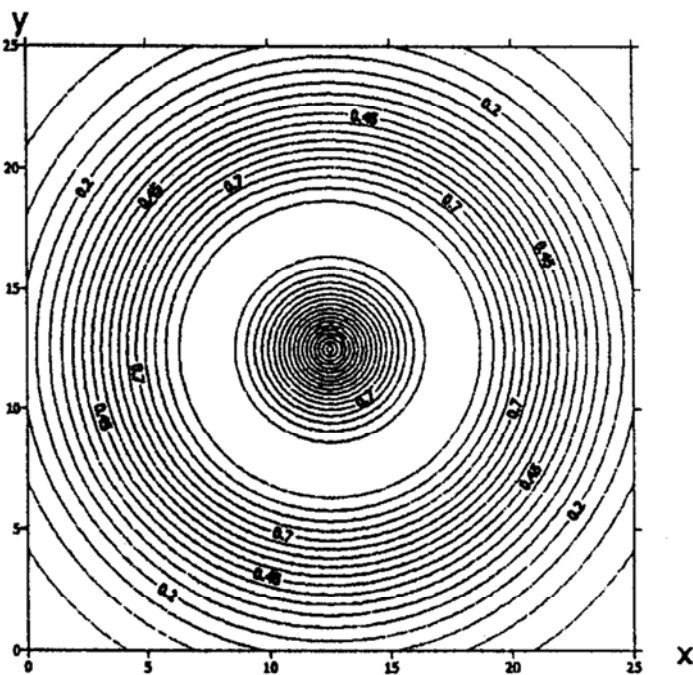
$$W_{01,02} = \sqrt{2} / \sqrt{e} \Psi_{01,02} / R_0$$

и экспоненциально убывает при больших r (рис. 3). Значения параметров задачи вы-

берем следующими: $\beta = 1$,

$$F_1 = 10, F_2 = 1, R_0 = 7,05.$$

При



Р и с. 3. Изолинии модуля вектора среднего течения в верхнем слое при $x_0 = 12,5, y_0 = 12,5, R_0 = 7,05, \Psi_{01} = -7,8$

$\Psi_{01} = -10,5$ (циклонический круговорот в верхнем слое) и $\Psi_{02} = 0$, решая численными методами систему уравнений (3), определим место локали-

зации наиболее неустойчивых возмущений, которое будет расположено в северной части круговорота, в точке максимума бароклинности: $x_m = x_0$, $y_m = y_0 + 5,00$, $k_m = \pm 1,93$, $l_m = 0$, $\omega_l = 0,49$.

Групповая скорость наиболее неустойчивой моды будет отлична от нуля, поэтому будет иметь место конвективная неустойчивость. Будем теперь изменять значения параметров Ψ_{01} и Ψ_{02} так, что $\delta\Psi = \Psi_{01} - \Psi_{02} = \text{const} = -10,5$ (при этом значения k_m, l_m, x_m, y_m не будут меняться). При $\Psi_{01} = -7,8$, $\Psi_{02} = 2,7$ групповая скорость наиболее неустойчивой моды будет равна нулю, т.е. будет иметь место абсолютная неустойчивость. Аналогичным образом можно определить условия возникновения абсолютной неустойчивости при других значениях параметров задачи.

Следует также отметить, что система уравнений (3) имеет еще одно решение, которое соответствует локальному минимуму функции ω_l в южной части круговорота:

$$x_m = x_0, y_m = y_0 - 5,00, k_m = \pm 1,77, l_m = 0, \omega_l = 0,23.$$

При $\Psi_{01} = -6,0$ и $\Psi_{02} = 4,5$ эта мода волнового движения (в данном случае наименее неустойчивая мода) будет стационарна. В этом случае, по-видимому, будет иметь место смешанный тип неустойчивости, т. к., с одной стороны, в соответствии с методом стационарной фазы возмущение будет неограниченно возрастать со временем в фиксированной точке пространства, а с другой, — пик волнового возмущения будет сноситься, т. к. близлежащие моды нестационарны и имеют больший коэффициент роста ω_l .

Абсолютная неустойчивость средних течений в приближении слабосвязанных волн рассматривалась ранее в работе [6]. Было показано, что для циклонического кольцевого профиля средних течений абсолютная неустойчивость развивается только в южной части круговорота. Анализ, проведенный в приближении слабосвязанных волн для рассматриваемого в настоящей работе гауссового профиля средней циркуляции, показывает, что абсолютная неустойчивость будет иметь место как в южной, так и в северной частях круговорота.

Можно также показать, что при $\Psi_{01} = 7,8$ и $\Psi_{02} = -2,7$, т. е. при антициклоническом круговороте в верхнем слое и циклоническом круговороте в нижнем слое при тех же параметрах задачи, абсолютная неустойчивость будет в южной части круговорота, в месте максимума бароклинности. Смешанный тип неустойчивости будет при $\Psi_{01} = 6,0$ и $\Psi_{02} = -4,5$ в северной части круговорота, в месте максимума бароклинности.

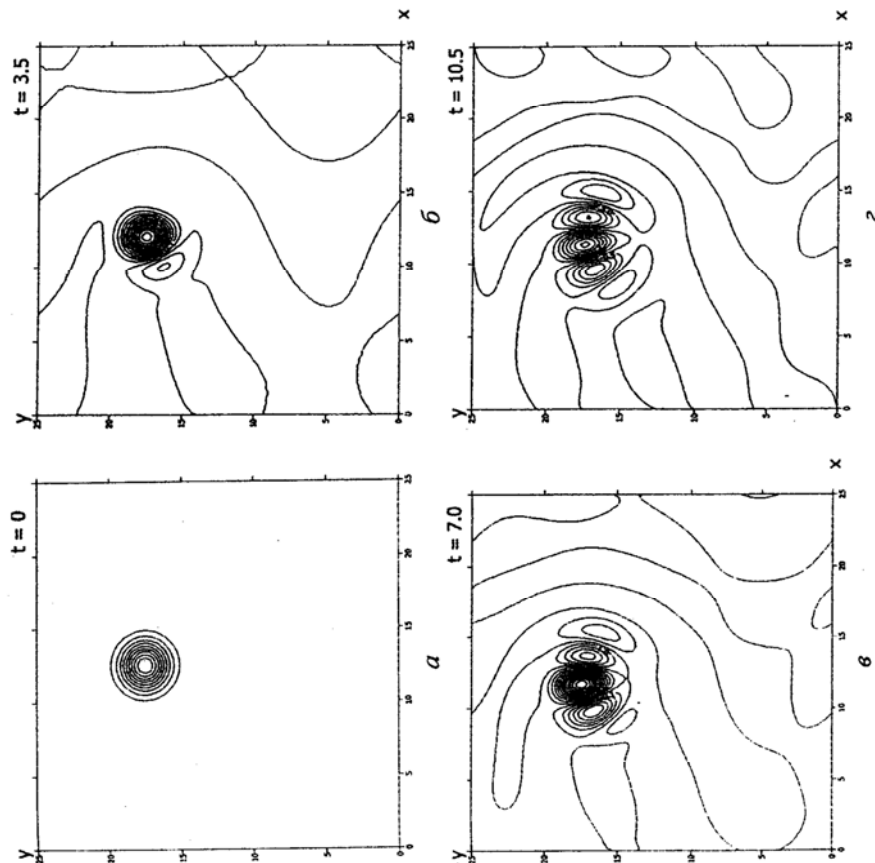
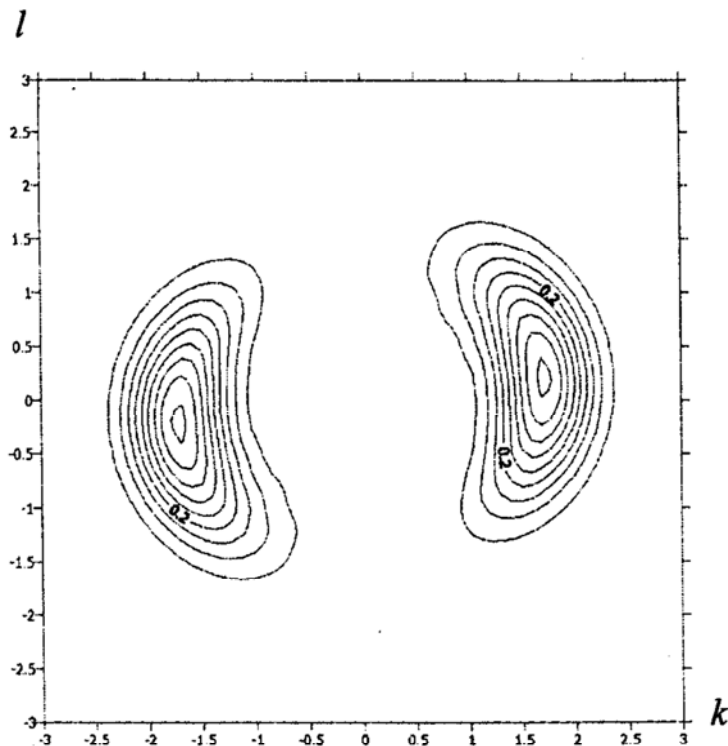


Рис. 4. Временная эволюция начального возмущения в верхнем слое для двухслойной модели океана ($\beta = 1$, $F_1 = 10$, $F_2 = 1$, $x_0 = y_0 = 12,5$, $R_0 = 7,05$, $\Psi_{01} = -7,8$, $\Psi_{02} = 2,7$) при: $t = 0$ — а; $t = 3,5$ — б; $t = 7,0$ — в; $t = 10,5$ — г

На рис. 4, а — г показана временная эволюция начального возмущения в верхнем слое для двухслойной модели синоптического океана при следующих значениях параметров задачи: $\beta = 1$, $F_1 = 10$, $F_2 = 1$, $x_0 = 12,5$, $R_0 = 7,05$, $\Psi_{01} = -7,8$, $\Psi_{02} = 2,7$. Так же, как и выше, численное интегрирование системы уравнений (4) выполнено центральными разностями по времени и координатам с разрешением 128×128 . Начальное возмущение в верхнем слое взято в виде гауссовой функции с центром в северной части циклонического круговорота в месте максимума бароклинности, в нижнем слое начальное возмущение равно нулю. Изолинии модуля вектора средней циркуляции в верхнем слое показаны на рис. 3. Абсолютная неустойчивость проявляется в виде растущего стационарного вихревого образования. Как показывает спектральный анализ функции тока, при большом временном интервале интегрирования максимум спек-

тра возмущения соответствует $k = \pm 1,69$, $l = \pm 0,19$ (рис. 5), что приблизительно равно рассчитанному значению в приближении геометрической оптики для абсолютной неустойчивости. В отличие от однородной модели течений начальное возмущение с течением времени не охватывает всю систему, а оказывается пространственно локализованным в северной части круговорота, в месте максимума бароклинности.



Р и с. 5. Спектр флуктуационной функции тока φ_1 при $t = 10,5$

ченно растущего по пространству возмущения, а в рамках неоднородной модели — в виде локализованного по пространству возмущения в месте максимума бароклинности.

Выводы

Таким образом, численные эксперименты по моделированию синоптической изменчивости океана подтверждают существование абсолютной неустойчивости при стационарности наиболее неустойчивой моды. Абсолютную неустойчивость можно также рассматривать как частный случай конвективной неустойчивости, если групповая скорость наиболее неустойчивой моды равна нулю. В рамках однородной модели средних течений абсолютная неустойчивость проявляется в виде неограни-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — С. 148.
2. Merkin L.O. Convective and absolute instability of baroclinic eddies // J. Geophys. Astrophys. Flu. Dyn. — 1977. — 9. — P. 129 – 157.
3. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
4. Merkin L., Shafranek M. The spatial and temporal evolution of localized unstable baroclinic disturbances // J. Geophys. Astrophys. Flu. Dyn. — 1980. — 16. — P. 174 – 206.
5. Pierrehumbert R. Local and global baroclinic instability of zonally varying flow // J. Atmos. Sci. — 1984. — 41. — P. 2141 – 2162.
6. Карпатович И.И., Коротаев Г.К. Абсолютная и конвективная неустойчивость океанических течений // Морской гидрофизический журнал. — 2001. — № 1. — С. 3 – 11.

7. *Briggs R.* Electron-stream interaction with plasma. — Res. Monograph, 29. — The MIT press. — P. 8 – 46.
8. *Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С.* Синоптические вихри в океане. — Л.: Гидрометеониздат, 1982. — 264 с.
9. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 05.09.02
После доработки 20.12.02

ABSTRACT Absolute instability of currents in the oceanic gyres is investigated in approximation of the geometric optics. It is shown that absolute instability exists if the most unstable wave motion mode is stationary. Qualitative correspondence with the numerical simulation of synoptic variability of large-scale oceanic gyres is obtained.