

Исследование влияния шельфовой зоны на периоды сейшевых колебаний

В предположении теории длинных волн аналитическими и численными методами исследуются сейшевые колебания жидкости в ограниченном бассейне переменной глубины. Показано, в частности, что увеличение размеров шельфа приводит к росту периодов свободных колебаний.

1. Пусть ограниченный бассейн без вертикальных стенок заполнен однородной невязкой несжимаемой жидкостью.

В рамках линейной теории длинных волн (плоское движение) для нахождения горизонтальной скорости $u(x, t)$ и профиля свободной поверхности $\zeta(x, t)$ имеем систему двух дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (2)$$

где $h(x)$ — глубина бассейна, g — ускорение свободного падения. Умножая левую и правую части (1) на $h(x)$ и дифференцируя затем по t , находим

$$\frac{\partial^2(uh)}{\partial t^2} = -gh \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Учитывая (1), получим такое дифференциальное уравнение в частных производных для определения $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2(uh)}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2(uh)}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

При этом граничные условия зависят от конкретного вида профиля дна бассейна. Уравнение (4) допускает решение вида

$$hu = f(x) \sin \sigma t, \quad (5)$$

представляющее собой стоячие волны. Для определения $f(x)$ имеем из (4) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$hf'' + \frac{\sigma^2}{g} f = 0. \quad (6)$$

Найдем выражение профиля свободной поверхности через функцию $f(x)$. Подставляя в правую часть (1) вместо hu его представление (5), запишем:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f'(x) \sin \sigma t. \quad (7)$$

Интегрируя (7), получим

$$\zeta(x, t) = \sigma^{-1} f'(x) \cos \sigma t. \quad (8)$$

Для горизонтальной составляющей скорости из (5) имеем

$$u(x, t) = h^{-1}(x) f'(x) \sin \sigma t. \quad (9)$$

Таким образом, задача о стоячих волнах (сейшах) в ограниченном бассейне переменной глубины $h(x)$ сводится к решению уравнения (6) с двумя граничными условиями для функции $f(x)$, зависящими от наличия или отсутствия вертикальных стенок. При этом профиль свободной поверхности и горизонтальная составляющая скорости определяются выражениями (8), (9).

2. Проведем исследование стоячих волн в бассейне, глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_0(1 - x^2 a^{-2}), \quad -a \leq x \leq a. \quad (10)$$

Для определения $f(x)$ из (6) получим

$$(a^2 - x^2) f'' + b f = 0, \quad b = \sigma^2 a^2 (g h_0)^{-1}. \quad (11)$$

Требуя ограниченности горизонтальной составляющей скорости на границах бассейна ($x = \pm a$) и учитывая, что $h(\pm a) = 0$, находим из (5) такие граничные условия для $f(x)$:

$$f(\pm a) = 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что дифференциальное уравнение (11) допускает решение в виде многочлена n -й степени ($n \geq 2$).

2.1. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Многочлен второй степени, удовлетворяющий граничным условиям (12), запишем так:

$$f(x) = A_1(x^2 - a^2), \quad (13)$$

где A_1 — произвольный множитель. Подставляя (13) в (11), получим

$$(b - 2)(x^2 - a^2) = 0.$$

Отсюда видим, что решение в форме многочлена второй степени возможно только при $b = 2$, т.е. при

$$\sigma = \sigma_1 = a^{-1} \sqrt{2gh_0}, \quad \tau = \tau_1 = 2\pi a / \sqrt{2gh_0}. \quad (14)$$

Из уравнений (8), (9), (13) и (14) имеем

$$\zeta(x, t) = 2A_1 x \cos \sigma_1 t, \quad u(x, t) = -A_1 a^2 \sigma_1 h_0^{-1} \sin \sigma_1 t.$$

Отсюда следует, что свободная поверхность в любой момент времени представляет собой прямую линию (плоскость), проходящую через начало координат (ось y). Угол наклона этой линии к оси x является периодической функцией времени с периодом τ_1 . Максимальное отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня отмечается на границах бассейна (у берега). В такт колебаниям свободной поверхности происходит горизонтальное движение жидкости. При этом горизонтальная составляющая скорости не зависит от x и достигает максимальных значений в те моменты времени, когда свободная поверхность горизонтальна.

2.2. Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Многочлен третьей степени, удовлетворяющий граничным условиям (12), запишем в виде

$$f(x) = A_2(x^2 - a^2)(xa^{-1} + \delta_1), \quad (15)$$

где A_2 — произвольная постоянная. Подставляя (15) в (11), приходим к равенству

$$xa^{-1}(6 - b) + \delta_1(2 - b) = 0,$$

которое при любых $-a \leq x \leq a$ может быть выполнено только если $b = 6$, $\partial_1 = 0$, т.е.

$$\sigma = \sigma_2 = a^{-1} \sqrt{6gh_0}, \quad \tau = \tau_2 = 2\pi a / \sqrt{6gh_0}, \quad (16)$$

$$f(x) = A_2 x a^{-1} (x^2 - a^2). \quad (17)$$

Из (8), (9), (17) получим

$$\zeta(x, t) = A_2 (3x^2 - a^2) a^{-1} \cos \sigma_2 t, \quad u(x, t) = -A_2 a \sigma_2 h_0^{-1} x \sin \sigma_2 t.$$

Таким образом, профиль волны в рассматриваемом случае представляет собой параболу с двумя узловыми точками $x_{1,2} = \pm a / \sqrt{3}$. Наибольшее отклонение свободной поверхности от оси x происходит на границах бассейна (у берега), оно в два раза превышает максимальное отклонение в центре бассейна ($x = 0$). Горизонтальная скорость является линейной функцией x , и жидкость периодически движется то к центру бассейна, то от него.

2.3. Представим теперь функцию $f(x)$ в виде многочлена 4-й степени и запишем ее следующим образом:

$$f(x) = A_3 (x^2 - a^2) (x^2 a^{-2} + \delta_2 x a^{-1} + \delta_3). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (11), приходим к равенству

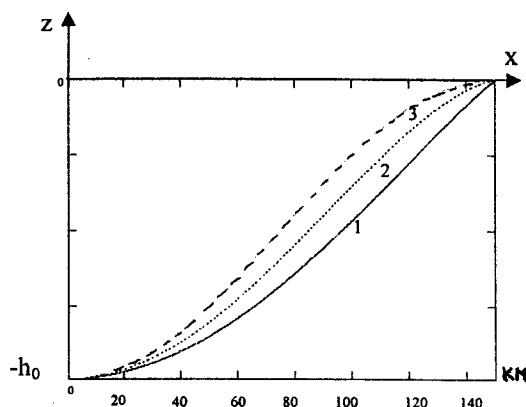
$$(12 - b)x^2 a^{-2} + (6 - b)\delta_2 x + (2 - b)\delta_3 - 2 = 0$$

и делаем вывод, что решение в форме многочлена 4-й степени возможно только при $b = 12$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = -0,2$, т.е.

$$\sigma = \sigma_3 = 2a^{-1} \sqrt{3gh_0}, \quad \tau = \tau_3 = \pi a / \sqrt{3gh_0}. \quad (19)$$

Из (8), (9), (18) находим:

$$\zeta(x, t) = 2,5 A_3 a^{-1} x (x^2 a^{-2} - 0,6) \cos \sigma_3 t, \quad u(x, t) = -A_3 a \sigma_3 (8h_0)^{-1} (5x^2 a^{-2} - 1) \sin \sigma_3 t.$$



Р и с. 1. Профили глубины бассейна шириной 300 км для значений $\gamma = 1; 1,5; 2$ (линии 1, 2, 3 соответственно)

Свободная поверхность является кубической параболой с тремя узловыми точками: $x_1 = 0$, $x_2 = a\sqrt{0,6}$, $x_3 = -a\sqrt{0,6}$. Наибольшее отклонение свободной поверхности от горизонтальной оси имеет место на границах бассейна. Максимальная скорость достигается в центре бассейна, а минимальная — на его границах.

Найденные три решения представляют собой одно-, двух- и трехузловые сейши с периодами τ_1 , τ_2 , τ_3 .

3. Исследуем периоды свободных длинных волн в ограниченном бассейне переменной глубины, профиль дна которого имеет вид

$$h(x) = h_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a} \right), \quad -a \leq x \leq a. \quad (20)$$

Пусть максимальная глубина бассейна h_0 равна 2 км, ширина $2a$ — 300 км. На рис. 1 представлены профили глубины бассейна для значений $\gamma = 1; 1,5; 2$ (линии 1, 2, 3 соответственно). Видно, что с увеличением γ протяженность шельфовой зоны (расстояние от берега до глубины 100 м) увеличивается и составляет 5, 14 и 22 км для γ , равных 1, 1,5 и 2 соответственно.

Аналитическое решение задачи о стоячих волнах в бассейне с профилем дна вида (20) не известно. Поэтому решение уравнения (6) ищем методом Рунге-Кутты [2, 3]. Учитывая, что глубина бассейна на его границах равна нулю ($h(\pm a) = 0$), требуем ограниченности горизонтальной составляющей скорости для $x = \pm a$.

При нахождении периодов свободных колебаний τ выполним граничные условия (12) и ограничимся нахождением первых трех мод, представляющих собой одно-, двух- и трехузловые сейши.

Т а б л и ц а 1

Значения периодов свободных колебаний для бассейна шириной 300 км и профилей дна вида (20) при γ , изменяющихся от 1 до 2

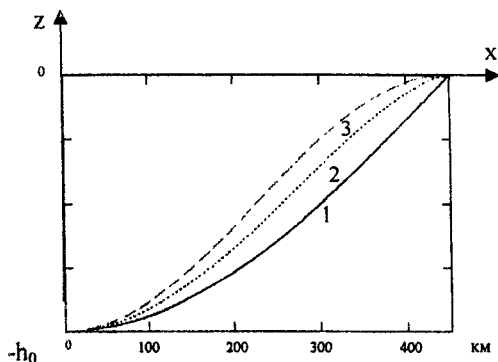
Профиль дна (γ)	Длина шельфа, км	Номер моды		
		1	2	3
1	5	1 ч 21 мин 16 с	0 ч 48 мин 15 с	0 ч 34 мин 51 с
1,1	6,25	1 ч 22 мин 49 с	0 ч 50 мин 26 с	0 ч 36 мин 1 с
1,2	8	1 ч 24 мин 33 с	0 ч 52 мин 57 с	0 ч 38 мин 25 с
1,3	9,5	1 ч 26 мин 32 с	0 ч 55 мин 53 с	0 ч 41 мин 06 с
1,4	11	1 ч 28 мин 49 с	0 ч 59 мин 24 с	0 ч 44 мин 19 с
1,5	13,75	1 ч 30 мин 31 с	1 ч 03 мин 42 с	0 ч 48 мин 21 с
1,6	15	1 ч 34 мин 50 с	1 ч 09 мин 05 с	0 ч 53 мин 30 с
1,7	16,5	1 ч 39 мин 02 с	1 ч 16 мин 11 с	1 ч 0 мин 31 с
1,8	18	1 ч 45 мин 39 с	1 ч 25 мин 59 с	1 ч 10 мин 31 с
1,9	20	1 ч 53 мин 17 с	1 ч 40 мин 55 с	1 ч 24 мин 53 с
2	22	2 ч 09 мин 50 с	2 ч 03 мин 11 с	1 ч 41 мин 11 с

П р и м е ч а н и е: то же — для профиля дна вида (10): длина шельфовой зоны равна 4 км, периоды для первой, второй и третьей мод соответственно равны 1 ч 19 мин 17 с; 0 ч 46 мин 46 с; 0 ч 32 мин 22 с.

В табл. 1 для указанных мод приведены значения периодов свободных колебаний для профилей дна вида (10) и (20) при γ , изменяющихся от 1 до 2. Анализируя результаты численных расчетов, приведенные в табл. 1, приходим к следующим выводам:

- значения периодов колебаний уменьшаются с увеличением номера моды для профилей дна вида (10) и (20) при всех рассмотренных γ ;
- период второй моды уменьшается по сравнению с периодом первой моды на 41, 30 и 5 % при γ , равных 1; 1,5 и 2 соответственно;
- период третьей моды по сравнению с периодом второй моды уменьшается на 27, 25 и 18 % при γ , принимающих значения 1; 1,5 и 2;
- период третьей моды по сравнению с периодом первой моды уменьшается на 58, 47 и 22 % при γ , равных 1; 1,5 и 2 соответственно;

— периоды всех трех мод увеличиваются с ростом длины шельфовой зоны;



Р и с. 2. Профили глубины бассейна шириной 900 км для значений $\gamma = 1; 1,5; 2$ (линии 1, 2, 3 соответственно)

го бассейна, профиль дна которого изменяется по закону (20), а ширина $2a$ принята равной 900 км. Глубина бассейна $h_0 = 2$ км. На рис. 2 изображены профили глубины бассейна для γ , равных 1; 1,5 и 2 (линии 1, 2, 3 соответственно), а в табл. 2 приведены значения периодов свободных колебаний для первых трех мод.

— периоды первой, второй и третьей мод при увеличении шельфовой зоны от 5 до 11 км возросли на 9, 23 и 29 % соответственно;

— периоды указанных выше мод с ростом длины шельфа от 11 до 22 км увеличились на 47, 108 и 129 %;

— периоды первой, второй и третьей мод с ростом шельфа от 5 до 22 км увеличились на 59, 156 и 197 % соответственно.

4. Были проведены также исследования периодов свободных колебаний для ограниченно-

Т а б л и ц а 2

Значения периодов свободных колебаний для бассейна шириной 900 км и профилей дна вида (20) при γ , изменяющихся от 1 до 2

Профиль дна (γ)	Длина шельфа, км	Номер моды		
		1	2	3
1	14	3 ч 56 мин 27 с	2 ч 29 мин 00 с	1 ч 42 мин 14 с
1,1	19	4 ч 00 мин 23 с	2 ч 34 мин 22 с	1 ч 47 мин 53 с
1,2	23,5	4 ч 12 мин 29 с	2 ч 41 мин 41 с	1 ч 55 мин 16 с
1,3	28,5	4 ч 17 мин 21 с	2 ч 47 мин 16 с	2 ч 03 мин 15 с
1,4	34	4 ч 22 мин 31 с	2 ч 53 мин 04 с	2 ч 12 мин 51 с
1,5	39	4 ч 28 мин 01 с	2 ч 59 мин 05 с	2 ч 24 мин 36 с
1,6	44	4 ч 33 мин 49 с	3 ч 05 мин 18 с	2 ч 39 мин 06 с
1,7	50	4 ч 39 мин 58 с	3 ч 11 мин 45 с	2 ч 57 мин 05 с
1,8	54	4 ч 46 мин 27 с	3 ч 18 мин 26 с	3 ч 18 мин 59 с
1,9	60	4 ч 53 мин 18 с	3 ч 25 мин 22 с	3 ч 44 мин 35 с
2	65	5 ч 00 мин 30 с	3 ч 32 мин 32 с	4 ч 12 мин 45 с

П р и м е ч а н и е: то же — для профиля дна вида (10): длина шельфовой зоны равна 19 км, периоды для первой, второй и третьей мод соответственно равны 3 ч 51 мин 14 с; 2 ч 16 мин 01 с; 1 ч 36 мин 39 с.

Анализ результатов численных экспериментов, данных в табл. 2, позволяет сделать следующие выводы:

— значения периодов колебаний уменьшаются с увеличением номера моды для профилей дна вида (10) и (20) при всех указанных γ ;

— период второй моды уменьшается по сравнению с периодом первой моды на 37, 33 и 30 % при γ , равных 1; 1,5 и 2 соответственно;

— период третьей моды по сравнению с периодом второй моды уменьшается на 32, 19 и 19 % при γ , принимающих значения 1; 1,5 и 2;

— период третьей моды по сравнению с периодом первой моды уменьшается на 57, 47 и 16 % при γ , равных 1; 1,5 и 2 соответственно;

— периоды всех трех мод увеличиваются с ростом длины шельфовой зоны;

— периоды первой, второй и третьей мод при увеличении шельфовой зоны от 5 до 11 км возросли на 9, 23 и 29 % соответственно;

— периоды указанных выше мод с ростом длины шельфа от 14 до 34 км увеличились на 11, 16 и 30 % соответственно;

— периоды первой, второй и третьей мод с ростом шельфа от 34 до 65 км увеличились на 14, 22 и 54 % соответственно;

— периоды указанных выше мод с ростом длины шельфа от 14 до 65 км увеличились на 27, 43 и 147 % соответственно.

Сравнивая результаты численных экспериментов для бассейнов шириной 300 и 900 км, видим, что с увеличением ширины бассейна сохраняются (качественно) зависимости периодов свободных колебаний от номера моды и длины шельфа, а величины самих периодов существенно возрастают. При неизменной ширине и максимальной глубине бассейна периоды сейш первых трех мод увеличиваются с ростом длины шельфовой зоны (расстояние от берега до глубины 100 метров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В. Основы динамики несжимаемой жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — С. 152 – 162.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы анализа. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963. — 400 с.
3. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1955. — 236 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 25.09.03

ABSTRACT Seiche oscillations of fluid in a limited basin with the variable depth are studied by the analytical and numerical methods in the assumption of the theory of long waves. It is shown that the increase of the shelf size results in the growth of free oscillations periods.