

Влияние пространственного распределения атмосферного давления на структуру свободной поверхности волн в бассейне переменной глубины

В рамках линейной теории длинных волн с использованием численных методов изучаются вынужденные колебания жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины. В качестве генератора волн рассматриваются периодические по времени изменения атмосферного давления. Учитывается действие силы Кориолиса, жидкость предполагается однородной и невязкой. Выполнен анализ зависимости структуры свободной поверхности волн (количества и расположения узловых линий) от периода и пространственного распределения возмущающих давлений.

1. Введение. Изучение свободных линейных колебаний однородной невязкой жидкости в кольцевых бассейнах постоянной глубины без учета действия силы Кориолиса проведено в [1]. Влияние вращения Земли и геометрических характеристик водоема на свободные колебания заполняющей его невязкой жидкости рассматривалось в [2 – 4]. Для кольцевых бассейнов переменной глубины решение задачи о вынужденных волнах, вызываемых действием поверхностных давлений линейного профиля, получено и подробно исследовано в [5, 6]. В настоящей работе продолжено исследование вынужденных колебаний (ВК) жидкости, генерируемых периодическими по времени изменениями атмосферного давления. Для кольцевых бассейнов переменной глубины проведено сравнение профилей свободной поверхности осесимметричных волн, возникающих в результате воздействия поверхностных возмущений, имеющих различное пространственное распределение. Проанализировано влияние периода и профиля вынуждающих давлений на структуру свободной поверхности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в цилиндрических координатах (r, θ, z) бассейн переменной глубины, заполненный однородной невязкой жидкостью. Бассейн имеет форму кольца: внутренняя граница кольца $r = a_1$, внешняя $r = a_2$. Профиль дна зависит только от одной пространственной координаты r . На жидкость действуют периодические по времени возмущения атмосферного давления, которые в выбранной системе координат имеют вид

$$p(r, \theta, t) = p_0 \psi(r) \sin \sigma t. \quad (1)$$

Здесь p_0 — амплитуда возмущений атмосферного давления, $\max |\psi(r)| = 1$, σ — частота вынужденных колебаний, t — время.

Предполагаем, что возникающие под воздействием (1) волны являются длинными, колебания — малыми, учитываем действие силы Кориолиса. При этих предположениях уравнения движения записываются следующим образом [7]:

$$u_t - fv = -g\zeta_r - \frac{1}{\rho} p_r, \quad (2)$$

$$v_t + fu = -\frac{1}{r} (g\zeta_\theta - \frac{1}{\rho} p_\theta), \quad (3)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{r} [(hur)_r + hv_\theta], \quad (4)$$

где ζ — возвышение свободной поверхности, u, v — нормальная и тангенциальная составляющие скорости, $h(r)$ — глубина бассейна, f — параметр Кориолиса, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, нижние индексы r, θ и t означают дифференцирование по пространственным координатам и времени.

Потребуем выполнения условия непротекания на вертикальных боковых стенках бассейна:

$$u(a_1, \theta, t) = 0, \quad u(a_2, \theta, t) = 0. \quad (5)$$

Будем искать решение системы уравнений (2) – (4) в виде, не зависящем от угла θ и периодически зависящем от времени:

$$\zeta(r, \theta, t) = \bar{\zeta}(r) \sin \sigma t, \quad (6)$$

$$u(r, \theta, t) = \bar{u}(r) \cos \sigma t, \quad (7)$$

$$v(r, \theta, t) = \bar{v}(r) \sin \sigma t. \quad (8)$$

Амплитуды нормальной и тангенциальной составляющих скорости жидкости находим, подставляя (1), (6) – (8) в (2) и (3):

$$\bar{u}(r) = -\frac{g\sigma}{\sigma^2 - f^2} (\bar{\zeta}_r + d\psi_r), \quad \bar{v}(r) = -\frac{gf}{\sigma^2 - f^2} (\bar{\zeta}_r + d\psi_r), \quad (9)$$

где $d = p_0/\rho g$.

Из (9) и (4) получаем уравнение для определения $\bar{\zeta}(r)$:

$$\begin{aligned} r^2 h \bar{\zeta}_{rr} + (r^2 h_r + rh) \bar{\zeta}_r + \frac{\sigma^2 - f^2}{g} r^2 \bar{\zeta} = \\ = -d [r^2 h \psi_{rr} + (r^2 h_r + rh) \psi_r]. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия (5) с учетом (6) и (9) перепишем так:

$$\left(\bar{\zeta}_r + d\psi_r \right)_{r=a_1} = 0, \quad \left(\bar{\zeta}_r + d\psi_r \right)_{r=a_2} = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$\bar{\zeta}(r) = c_1 \bar{\zeta}_1(r) + c_2 \bar{\zeta}_2(r) + \bar{\zeta}_3(r). \quad (12)$$

Здесь $\bar{\zeta}_1(r), \bar{\zeta}_2(r)$ — фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (10), c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

ные, которые находятся из граничных условий (11), $\bar{\zeta}_3(r)$ — частное решение уравнения (10).

3. Решение задачи. Функции $\bar{\zeta}_1(r)$, $\bar{\zeta}_2(r)$ и $\bar{\zeta}_3(r)$ определяем численно с использованием метода Рунге – Кутты 4-го порядка точности [8]. При этом выбираем профиль дна параболическим

$$h(r) = h_4(r - a_1)^2 + h_3(r - a_1) + h_1 \quad (13)$$

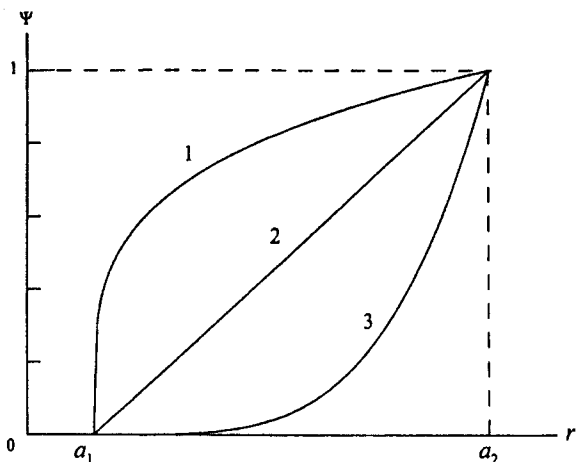
и считаем, что h_1, h_2 — глубины при $r = a_1$ и $r = a_2$ соответственно, h_0 — максимальная глубина бассейна, h_3, h_4 — постоянные величины, определяемые из условий $h(a_2) = h_2$ и $h((a_1 + a_2)/2) = h_0$.

С целью установления влияния профиля вынуждающего давления на волновой процесс рассмотрим следующие три вида амплитудной функции $\psi(r)$:

$$\psi(r) = (r - a_1)^{1/4} / (a_2 - a_1)^{1/4}, \quad (14)$$

$$\psi(r) = (r - a_1) / (a_2 - a_1), \quad (15)$$

$$\psi(r) = (r - a_1)^4 / (a_2 - a_1)^4. \quad (16)$$



Графики этих функций изображены на рис. 1. Здесь кривые 1, 2, 3 отвечают зависимостям (14), (15), (16) соответственно.

Перепад давления на границах бассейна принимается равным 5 гПа ($d = 5,0$ см).

3.1. Чтобы установить основные характеристики волновых процессов, возникающих под воздействием давлений (1) для указанных выше амплитудных функций, рассмотрим следующие бассейны, у которых геометрические параметры a_1, h_0, h_1 ,

h_2 одинаковы, а координата внешней границы a_2 — различна:

$$a_1 = 50 \text{ км}, \quad h_0 = 4 \text{ 000 м}, \quad h_1 = h_2 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 1 \text{ 000 км}; \quad (17)$$

$$a_1 = 50 \text{ км}, \quad h_0 = 4 \text{ 000 м}, \quad h_1 = h_2 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 3 \text{ 000 км}. \quad (18)$$

Параметр Кориолиса f соответствует 60° с.ш. (инерционный период равен 13 ч 51 мин).

Выясним, какое влияние оказывает изменение амплитудной функции и периода возмущающего давления на количество и расположение узловых точек (координат узловых линий) свободной поверхности в бассейнах (17), (18). Для каждого из видов атмосферного давления (1), (14) – (16) изменяем период вынужденных колебаний τ в пределах, включающих первые три моды свободных колебаний [5, 6].

Результаты расчетов для амплитудных функций (14), (15) и (16)
для бассейна (17) ($h_0 = 4\ 000\ \text{м}$, $a_2 = 1\ 000\ \text{км}$)

n	(14)		(15)		(16)	
	τ	r_{in}	τ	r_{in}	τ	r_{in}
1	9 ч 03 мин 00 с	56,1	13 ч 21 мин 00 с	668,3	4 ч 26 мин 00 с	992,7
	7 ч 27 мин 40 с	119,0	2 ч 55 мин 00 с	664,2	3 ч 42 мин 40 с	894,4
	5 ч 52 мин 40 с	275,2	1 ч 39 мин 10 с	548,8	2 ч 27 мин 40 с	650,2
	4 ч 14 мин 30 с	469,4	1 ч 37 мин 00 с	491,0	2 ч 04 мин 20 с	530,2
	2 ч 08 мин 40 с	722,0	1 ч 36 мин 50 с	483,1	1 ч 48 мин 30 с	432,8
2	2 ч 02 мин 20 с	56,2	1 ч 36 мин 40 с	482,5	1 ч 48 мин 20 с	432,7
	1 ч 53 мин 20 с	95,0	1 ч 36 мин 00 с	454,5	1 ч 44 мин 50 с	409,6
	1 ч 47 мин 40 с	152,1	1 ч 31 мин 30 с	235,1	1 ч 38 мин 10 с	368,7
	1 ч 38 мин 00 с	279,4	1 ч 29 мин 00 с	90,4	1 ч 22 мин 30 с	273,4
	1 ч 21 мин 00 с	473,2	1 ч 28 мин 30 с	57,8	1 ч 13 мин 20 с	222,3
3	1 ч 20 мин 40 с	56,5	1 ч 10 мин 10 с	370,6	1 ч 13 мин 10 с	222,2
	1 ч 16 мин 20 с	80,2	1 ч 10 мин 00 с	328,0	1 ч 10 мин 20 с	206,8
	1 ч 12 мин 40 с	130,5	1 ч 09 мин 30 с	252,3	1 ч 06 мин 50 с	190,4
	1 ч 07 мин 00 с	233,2	1 ч 08 мин 50 с	196,5	1 ч 00 мин 50 с	162,8
	1 ч 01 мин 00 с	329,1	1 ч 07 мин 20 с	128,1	0 ч 55 мин 10 с	139,3
						993,9
						926,9
						869,1
						798,5
						723,1

В табл. 1 для бассейна (17) представлены результаты численных расчетов для всех трех функций $\psi(r)$. В первом столбце данной таблицы указано число узловых точек профиля свободной поверхности жидкости ($n = 1, 2, 3$). Второй, третий и четвертый столбцы содержат результаты расчетов для амплитудных функций (14), (15) и (16). Каждый из них разделен на две колонки: первая содержит значения τ , для которых вычислено отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня, а вторая — координаты ее узлов ($r_{in}, i = 1, \dots, n$) при данном τ .

Рассмотрим второй столбец таблицы. Для амплитудной функции (14) вынуждающего давления свободная поверхность в интервале $2 \text{ ч } 08 \text{ мин } 40 \text{ с} \leq \tau \leq 9 \text{ ч } 03 \text{ мин } 00 \text{ с}$ имеет один узел ($n = 1$). При $\tau = 9 \text{ ч } 03 \text{ мин } 00 \text{ с}$ этот (первый) узел находится у внутренней границы кольца бассейна ($r_{11} = 56,1 \text{ км}$), и с убыванием τ в указанном диапазоне его координата увеличивается. При $\tau = 2 \text{ ч } 08 \text{ мин } 40 \text{ с}$ первый узел смещается к $r_{11} = 722,0 \text{ км}$. Когда $\tau = 2 \text{ ч } 02 \text{ мин } 20 \text{ с}$, вблизи внутренней стенки кольца возникает второй узел ($n = 2, r_{22} = 56,2 \text{ км}$), а первая узловая точка имеет координату $r_{12} = 722,8 \text{ км}$. Оба узла с убыванием периода перемещаются в направлении внешней стенки кольца ($r = a_2$). Когда $\tau = 1 \text{ ч } 21 \text{ мин } 00 \text{ с}$, то $r_{12} = 888,1 \text{ км}$, $r_{22} = 473,2 \text{ км}$. С дальнейшим уменьшением τ у внутренней границы бассейна ($r = a_1$) появляется третья узловая точка, координата которой при $\tau = 1 \text{ ч } 20 \text{ мин } 40 \text{ с}$ равна $56,5 \text{ км}$ ($n = 3$). Первые два узла при данном τ имеют координаты $r_{13} = 889,0 \text{ км}$ и $r_{23} = 476,1 \text{ км}$. С убыванием периода каждая из узловых точек сдвигается в направлении внешней стенки кольца, и при $\tau = 1 \text{ ч } 01 \text{ мин } 00 \text{ с}$ расположение узлов таково: $r_{13} = 915,3 \text{ км}$, $r_{23} = 644,7 \text{ км}$ и $r_{33} = 329,1 \text{ км}$. Таким образом, при действии на жидкость давления с амплитудной функцией (14) каждая новая узловая точка свободной поверхности появляется в окрестности внутренней стенки бассейна ($r = a_1$). С увеличением периода вынуждающей силы от $2 \text{ ч } 08 \text{ мин } 40 \text{ с}$ до $9 \text{ ч } 03 \text{ мин } 00 \text{ с}$ все узлы смещаются в направлении наружной границы кольца ($r = a_2$).

Обратимся теперь к третьему столбцу таблицы. Для амплитудной функции (15) вынуждающего давления один узел ($n = 1$) свободная поверхность имеет в интервале $1 \text{ ч } 36 \text{ мин } 50 \text{ с} \leq \tau \leq 13 \text{ ч } 21 \text{ мин } 00 \text{ с}$. При $\tau = 13 \text{ ч } 21 \text{ мин } 00 \text{ с}$ первый узел находится в точке $r_{11} = 668,3 \text{ км}$, и с убыванием τ в указанном диапазоне координата r_{11} уменьшается. При $\tau = 1 \text{ ч } 36 \text{ мин } 50 \text{ с}$ первый узел перемещается в точку $r_{11} = 483,1 \text{ км}$. Когда $\tau = 1 \text{ ч } 36 \text{ мин } 40 \text{ с}$, вблизи внешней стенки бассейна возникает второй узел ($n = 2, r_{22} =$

= 993,0 км), а первый имеет координату $r_{12} = 482,5$ км. Оба узла с убыванием периода перемещаются в направлении внутренней стенки кольца ($r = a_1$). Когда $\tau = 1$ ч 28 мин 30 с, то $r_{12} = 56,2$ км, $r_{22} = 755,4$ км. С дальнейшим уменьшением τ до 1 ч 10 мин 10 с первый узел исчезает, но при этом появляются два новых ($n = 3$, $r_{13} = 370,6$ км, $r_{23} = 387,7$ км). Второй узел находится в точке $r_{33} = 832,6$ км, причем его координата r_{33} начинает расти с убыванием периода колебаний. В то же время узлы с координатами r_{13} и r_{23} расходятся в противоположные стороны: r_{13} перемещается в направлении $r = a_1$, а r_{23} — в направлении $r = a_2$. При $\tau = 1$ ч 07 мин 20 с координаты узловых точек таковы: $r_{13} = 128,1$ км, $r_{23} = 625,3$ км, $r_{33} = 994,6$ км. Итак, для $n = 1$ и $n = 2$ с уменьшением τ координаты узловых точек смещаются внутрь кольца. Для $n = 3$ один узел (имеющий наименьшую координату) перемещается в сторону $r = a_1$, а два других — в противоположном направлении.

Рассмотрим четвертый столбец таблицы. Когда амплитудная функция имеет вид (16), диапазон периодов, для которых $n = 1$, таков: 1 ч 48 мин 30 с $\leq \tau \leq$ 4 ч 26 мин 00 с. При $\tau = 4$ ч 26 мин 00 с координата узла $r_{11} = 992,7$ км, и с уменьшением τ до 1 ч 48 мин 30 с она становится равной 432,8 км. Второй узел ($n = 2$) возникает при $\tau = 1$ ч 48 мин 20 с, и его координата r_{22} составляет 992,9 км, в то время как координата первого узла $r_{12} = 432,7$ км. С уменьшением τ обе узловые точки «движутся» в направлении $r = a_1$, и при $\tau = 1$ ч 13 мин 20 с $r_{12} = 222,4$ км и $r_{22} = 635,4$ км. Третий узел ($n = 3$) на свободной поверхности появляется, когда $\tau = 1$ ч 13 мин 10 с, его координата $r_{33} = 993,9$ км. Все узлы с убыванием τ смещаются к внутренней стенке бассейна. Для $\tau = 0$ ч 55 мин 10 с их расположение таково: $r_{13} = 139,3$ км, $r_{23} = 401,8$ км, $r_{33} = 723,1$ км. Следовательно, в случае воздействия на жидкость атмосферного давления с амплитудной функцией (16) каждая новая узловая точка свободной поверхности появляется вблизи внешней стенки кольцевого бассейна. При уменьшении периода вынуждающей силы каждый из узлов смещается в направлении внутренней границы кольца. Установлено также, что наименьшее изменение координаты узловой точки при $n = 1$ происходит, когда на жидкость действует давление линейного по пространству профиля (15). За наибольший временной промежуток $|\Delta \tau| = 12$ ч 44 мин 10 с смещение узла с координатой r_{11} составляет 185,2 км. Для сравнения: при амплитуде давления (14) смещение равно 665,9 км за 6 ч 54 мин 20 с, а при давлении с амплитудной функцией (16) — 559,9 км за 2 ч 37 мин 30 с.

Результаты расчетов для амплитудных функций (14), (15) и (16)
для бассейна (18) ($h_0 = 4\ 000\ м, a_2 = 3\ 000\ км$)

n	(14)			(15)			(16)		
	τ	r_{in}	τ	r_{in}	τ	r_{in}	τ	r_{in}	
1	13 ч 00 мин 00 с	59,6	13 ч 00 мин 00 с	2000,4	9 ч 55 мин 10 с	2993,7			
	12 ч 18 мин 10 с	330,0	7 ч 00 мин 00 с	1994,0	8 ч 58 мин 20 с	2694,7			
	11 ч 53 мин 20 с	555,4	4 ч 48 мин 30 с	1911,7	7 ч 49 мин 40 с	2350,0			
	11 ч 00 мин 40 с	982,1	4 ч 37 мин 20 с	1791,5	6 ч 23 мин 00 с	1870,3			
	8 ч 52 мин 00 с	1622,1	4 ч 32 мин 50 с	1626,8	5 ч 41 мин 40 с	1590,0			
5 ч 50 мин 00 с	2140,1	4 ч 30 мин 50 с	1473,9	5 ч 04 мин 00 с	1310,2				
2	5 ч 49 мин 40 с	56,0	4 ч 30 мин 40 с	1472,5	2993,5	1309,6			
	5 ч 17 мин 00 с	247,6	4 ч 27 мин 30 с	1088,8	2554,1	1188,0			
	5 ч 02 мин 40 с	449,7	4 ч 24 мин 50 с	658,1	2368,3	1017,9			
	4 ч 44 мин 00 с	764,9	4 ч 23 мин 00 с	324,5	2294,0	882,9			
	4 ч 23 мин 00 с	1100,8	4 ч 22 мин 00 с	125,2	2264,5	771,8			
4 ч 01 мин 10 с	1372,6	4 ч 21 мин 40 с	57,5	2255,6	667,3				
3	4 ч 01 мин 00 с	57,8	3 ч 22 мин 50 с	1035,3	2516,5	666,9			
	3 ч 41 мин 40 с	199,0	3 ч 22 мин 30 с	899,5	2554,1	616,9			
	3 ч 32 мин 20 с	361,2	3 ч 21 мин 40 с	701,1	2652,4	555,9			
	3 ч 24 мин 00 с	537,1	3 ч 20 мин 50 с	556,0	2752,6	502,8			
	3 ч 12 мин 40 с	778,4	3 ч 19 мин 00 с	346,0	2963,1	444,6			
3 ч 04 мин 20 с	929,3	3 ч 18 мин 40 с	312,1	2992,0	392,0				

Библиотека
Морского гидрофизического
института НАН Украины

Результаты численных расчетов для различных функций $\psi(r)$ (бассейн (18)) представлены в табл. 2. Первый столбец данной таблицы содержит количество узловых точек профиля свободной поверхности жидкости ($n = 1, 2, 3$). Каждый из столбцов 2 – 4 соответствует одной из функций (14) – (16) и разделен на две колонки. Первая из них содержит значения τ , для которых вычислен профиль свободной поверхности $\zeta(r)$, а вторая — координаты его узлов ($r_{in}, i = 1, \dots, n$) при данном τ . Из анализа данных, приведенных во втором столбце таблицы, видно, что для амплитудной функции (14) вынуждающего давления свободная поверхность в интервале 5 ч 50 мин 00 с $\leq \tau \leq 13$ ч 00 мин 00 с имеет один узел ($n = 1$). При $\tau = 13$ ч 00 мин 00 с этот (первый) узел находится у внутренней границы кольца бассейна ($r_{11} = 59,6$ км), и с убыванием τ в указанном диапазоне его координата возрастает. При $\tau = 5$ ч 50 мин 00 с $r_{11} = 2140,1$ км. Когда $\tau = 5$ ч 49 мин 40 с, вблизи внутренней стенки кольца возникает второй узел ($n = 2, r_{22} = 56,0$ км), а первая узловая точка имеет координату $r_{12} = 2141,2$ км. Оба узла с убыванием периода перемещаются в направлении внешней стенки кольца ($r = a_2$). Когда $\tau = 4$ ч 01 мин 10 с, то $r_{12} = 2652,6$ км, $r_{22} = 1372,6$ км. С дальнейшим уменьшением τ до 4 ч 01 мин 00 с у внутренней границы бассейна ($r = a_1$) появляется еще одна (третья) узловая точка ($r_{33} = 57,8$ км). Первые два узла при данном τ имеют координаты $r_{13} = 2653,4$ км и $r_{23} = 1374,4$ км. С убыванием периода каждая из узловых точек сдвигается в направлении внешней стенки кольца, и при $\tau = 3$ ч 04 мин 20 с $r_{13} = 2740,4$ км, $r_{23} = 1905,6$ км, $r_{33} = 929,3$ км. Таким образом, при действии на жидкость давления с амплитудной функцией (14) каждый новый узел свободной поверхности возникает в окрестности внутренней стенки кольца ($r = a_1$). С уменьшением периода вынуждающей силы все узловые точки смещаются в направлении наружной стенки кольцевого бассейна ($r = a_2$).

Рассмотрим третий столбец таблицы. Для амплитудной функции (15) вынуждающего давления один узел ($n=1$) свободная поверхность имеет в интервале периодов 4 ч 30 мин 50 с $\leq \tau \leq 13$ ч 00 мин 00 с. При $\tau = 13$ ч 00 мин 00 с первый узел находится в точке $r_{11} = 2\,000,4$ км, и с убыванием τ в указанном диапазоне координата r_{11} уменьшается. При $\tau = 4$ ч 30 мин 50 с $r_{11} = 1473,9$ км. Когда $\tau = 4$ ч 30 мин 40 с, то вблизи внешней стенки бассейна возникает второй узел ($n = 2, r_{22} = 2993,5$ км), а первый имеет координату $r_{12} = 1472,5$ км. Оба узла с уменьшением периода перемещаются в направлении внутренней стенки кольца $r = a_1$. Когда $\tau = 4$ ч 21 мин 40 с, то $r_{12} = 57,5$ км, а $r_{22} = 2255,6$ км. С дальнейшим убыванием τ до 3 ч 22 мин 50 с первый узел исчезает, но при этом появляются два новых ($n = 3, r_{13} = 1035,3$ км, $r_{23} = 1392,7$ км). Второй узел находится в точке $r_{33} = 2516,5$ км, и его координата r_{33} растет с уменьшением периода колебаний. В то же время узлы с координатами r_{13} и r_{23} «расходятся»: r_{13} перемещается в направлении $r = a_1$, а r_{23} — в направлении $r = a_2$. При $\tau = 3$ ч 18 мин 40 с координаты узловых точек таковы: $r_{13} = 312,1$ км, $r_{23} = 1865,2$ км, $r_{33} = 2992,0$ км. Итак, для $n = 1$ и $n = 2$ с убыванием τ узловые точки «движутся» внутрь кольца. Для $n = 3$

узел с наименьшей координатой перемещается в сторону $r = a_1$, а два других – в противоположном направлении.

Обратимся к четвертому столбцу таблицы (амплитудная функция вида (16)). Диапазон периодов, для которых $n = 1$, таков: 5 ч 04 мин 00 с $\leq \tau \leq$ 9 ч 55 мин 10 с. При $\tau = 9$ ч 55 мин 10 с координата узла $r_{11} = 2993,7$ км и с уменьшением τ до 5 ч 04 мин 00 с она становится равной 1310,2 км. Второй узел ($n = 2$) образуется при $\tau = 5$ ч 03 мин 50 с, и его координата r_{22} составляет 2991,8 км, в то время как $r_{12} = 1309,6$ км. С убыванием τ обе узловые точки сдвигаются в направлении $r = a_1$, и при $\tau = 3$ ч 32 мин 00 с $r_{12} = 667,3$ км, $r_{22} = 1921,0$ км. Третий узел ($n = 3$) на свободной поверхности появляется, когда $\tau = 3$ ч 31 мин 50 с, его координата $r_{33} = 2992,3$ км. Все узлы с уменьшением τ смещаются к внутренней стенке бассейна. Для $\tau = 2$ ч 43 мин 10 с их расположение таково: $r_{13} = 392,0$ км, $r_{23} = 1209,6$ км, $r_{33} = 2172,5$ км. Следовательно, когда на жидкость действует атмосферное давление с амплитудной функцией (16), каждая новая узловая точка свободной поверхности появляется вблизи внешней стенки бассейна. При убывании периода вынуждающей силы каждый из узлов смещается в направлении внутренней границы кольца. Наименьшее изменение координаты узловой точки для $n = 1$ имеет место при действии на жидкость давления с линейным по пространству профилем (15). За промежуток $|\Delta \tau| = 8$ ч 29 мин 10 с смещение узла с координатой r_{11} составляет 526,5 км. Для сравнения: при амплитуде давления (14) смещение равно 2080,5 км за 7 ч 10 мин 00 с, а при давлении с амплитудной функцией (16) – 1683,5 км за 4 ч 51 мин 10 с.

Аналогичные вычисления были проведены еще для двух кольцевых бассейнов с параболическим профилем дна:

$$a_1 = 50 \text{ км}, \quad h_0 = 1 \text{ 000 м}, \quad h_1 = h_2 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 1 \text{ 000 км}; \quad (19)$$

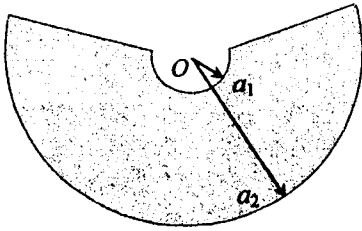
$$a_1 = 50 \text{ км}, \quad h_0 = 1 \text{ 000 м}, \quad h_1 = h_2 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 3 \text{ 000 км}. \quad (20)$$

В процессе сравнительного анализа результатов этих вычислений и данных по бассейнам (17), (18) приходим к следующим заключениям:

– увеличение максимальной глубины бассейна в четыре раза (от 1000 м до 4000 м) и ширины бассейна от 1000 км до 3000 км приводит к изменению координат r_{in} ($i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, 3$) узловых точек свободной поверхности для одних и тех же значений τ . С уменьшением периода колебаний порядок появления и расположение узловых точек свободной поверхности друг относительно друга для бассейнов с различными геометрическими характеристиками сохраняются;

– при воздействии давлений (1), (14) на жидкость, заполняющую каждый из рассматриваемых бассейнов, узлы свободной поверхности возникают в окрестности $r = a_1$ и с убыванием периода колебаний перемещаются в направлении $r = a_2$. Когда атмосферное воздействие имеет вид (1), (15), в каждом из указанных бассейнов с убыванием периода первая и вторая узловые точки появляются последовательно в окрестности внешней границы ($r = a_2$). Координаты этих узлов уменьшаются, пока один из них не «уйдет» за пределы внутренней границы кольца ($r = a_1$). При этом на поверхности жидкости

возникают две новые узловые точки ($n = 3$), и узел с наименьшей координатой r_{13} смещается в направлении $r = a_1$. Два других узла «движутся» в сторону внешней границы бассейна. Если воздействие на жидкость имеет вид (1), (16), то с уменьшением τ все узловые точки свободной поверхности ($n = 1, 2, 3$) сдвигаются к внутренней границе кольца. При этом узлы появляются вблизи $r = a_2$, а исчезают в окрестности $r = a_1$.



Р и с. 2. Схема бассейна (21)

3.2. Пренебрегая в (9) действием силы Кориолиса, получаем, что тангенциальная составляющая скорости жидкости v равна нулю. Поэтому любые две радиальные линии можно принять в качестве твердых стенок (рис. 2). Для бассейна подобного вида выбираем геометрические параметры, характерные для Черного моря:

$$a_1 = 150 \text{ км}, \quad h_0 = 2 \text{ 000 м}, \quad a_2 = 450 \text{ км}, \quad h_1 = h_2 = 1 \text{ м}. \quad (21)$$

Полагаем, что на жидкость в данном случае воздействуют те же давления (1) с амплитудными функциями (14) – (16).

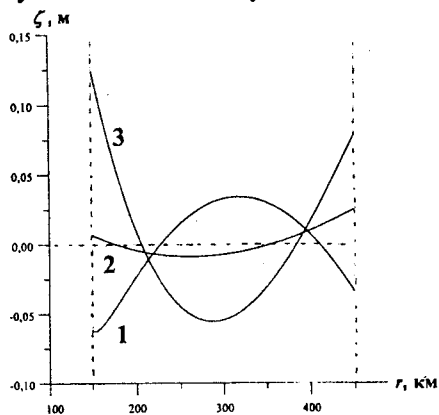
В результате вычислений, проведенных с использованием указанных предположений, для бассейна (21) получены данные о количестве и расположении узловых точек профиля свободной поверхности при различных периодах вынуждающей силы (табл. 3). Структура таблицы та же, что и для бассейнов (17), (18). Для амплитудной функции вынуждающего давления (14) свободная поверхность в интервале 4 ч 11 мин 00 с $\leq \tau \leq$ 0 ч 57 мин 10 с имеет один узел ($n = 1$). При $\tau = 4$ ч 11 мин 00 с этот (первый) узел находится у внутренней границы кольца бассейна ($r_{11} = 153,2$ км), и с убыванием τ в указанном диапазоне его координата возрастает. При $\tau = 0$ ч 57 мин 10 с первый узел смещается в $r_{11} = 355,7$ км. Когда $\tau = 0$ ч 57 мин 00 с, вблизи внутренней стенки кольца возникает второй узел ($n = 2$, $r_{22} = 151,8$ км), а первая узловая точка находится в $r_{12} = 356,1$ км. Оба узла с убыванием периода перемещаются в направлении внешней стенки кольца ($r = a_2$). Когда $\tau = 0$ ч 37 мин 20 с, то $r_{12} = 431,2$ км, $r_{22} = 272,9$ км. С дальнейшим уменьшением τ до 0 ч 37 мин 10 с у внутренней границы бассейна ($r = a_1$) появляется еще одна узловая точка с координатой $r_{33} = 151,9$ км. Первые два узла при данном τ имеют координаты $r_{13} = 411,5$ км и $r_{23} = 273,9$ км. С убыванием периода каждая из узловых точек сдвигается в направлении внешней стенки кольца, и при $\tau = 0$ ч 27 мин 40 с $r_{13} = 423,3$ км, $r_{23} = 335,2$ км, $r_{33} = 229,7$ км. Таким образом, при действии на жидкость давления с амплитудной функцией (14) каждый новый узел свободной поверхности возникает в окрестности внутренней стенки кольца ($r = a_1$). С уменьшением периода вынуждающей силы все узловые точки смещаются в направлении наружной стенки кольцевого бассейна ($r = a_2$).

Результаты расчетов для амплитудных функций (14), (15) и (16)
для бассейна (21) ($a_1 = 150$ км, $a_2 = 450$ км, $h_0 = 2000$ м, $f = 0$)

n	(14)		(15)		(16)	
	τ	r_{in}	τ	r_{in}	τ	r_{in}
1	4 ч 11 мин 00 с	153,2	13 ч 00 мин 00 с	325,0	2 ч 23 мин 20 с	446,9
	3 ч 20 мин 00 с	173,3	7 ч 15 мин 20 с	324,9	2 ч 00 мин 20 с	415,3
	2 ч 24 мин 30 с	228,1	1 ч 17 мин 40 с	320,4	1 ч 34 мин 20 с	365,9
	1 ч 17 мин 40 с	318,3	1 ч 15 мин 20 с	319,9	1 ч 17 мин 00 с	321,7
	1 ч 15 мин 20 с	321,9	0 ч 53 мин 20 с	299,8	1 ч 12 мин 40 с	308,7
0 ч 57 мин 10 с	355,7	0 ч 48 мин 10 с	264,5	0 ч 54 мин 10 с	247,7	
2	0 ч 57 мин 00 с	151,8	0 ч 48 мин 00 с	262,4	0 ч 54 мин 00 с	247,4
	0 ч 50 мин 00 с	184,3	0 ч 46 мин 50 с	246,4	0 ч 50 мин 40 с	236,6
	0 ч 46 мин 10 с	212,9	0 ч 44 мин 40 с	209,6	0 ч 46 мин 40 с	224,2
	0 ч 42 мин 30 с	225,7	0 ч 43 мин 30 с	187,5	0 ч 42 мин 30 с	211,0
	0 ч 40 мин 30 с	253,5	0 ч 42 мин 30 с	174,5	0 ч 38 мин 00 с	199,9
0 ч 37 мин 20 с	272,9	0 ч 41 мин 40 с	154,4	0 ч 34 мин 30 с	191,3	
3	0 ч 37 мин 10 с	151,9	0 ч 32 мин 30 с	222,2	0 ч 34 мин 20 с	190,2
	0 ч 35 мин 00 с	161,0	0 ч 32 мин 20 с	198,3	0 ч 33 мин 00 с	187,8
	0 ч 33 мин 10 с	176,4	0 ч 32 мин 00 с	174,8	0 ч 30 мин 40 с	182,7
	0 ч 30 мин 50 с	199,9	0 ч 31 мин 50 с	166,6	0 ч 28 мин 40 с	178,6
	0 ч 29 мин 10 с	216,3	0 ч 31 мин 40 с	154,4	0 ч 25 мин 00 с	172,9
0 ч 27 мин 40 с	229,7	0 ч 30 мин 40 с	141,5	0 ч 25 мин 00 с	136,7	

В третьем столбце таблицы представлены данные численных расчетов для амплитудной функции (15) атмосферного давления. Один узел ($n = 1$) свободная поверхность имеет, когда период вынуждающей силы располагается в интервале $0 \text{ ч } 48 \text{ мин } 10 \text{ с} \leq \tau \leq 13 \text{ ч } 00 \text{ мин } 00 \text{ с}$. При $\tau = 13 \text{ ч } 00 \text{ мин } 00 \text{ с}$ первый узел находится в точке $r_{11} = 325,0 \text{ км}$, и с убыванием τ в указанном диапазоне значение r_{11} уменьшается. При $\tau = 0 \text{ ч } 48 \text{ мин } 10 \text{ с}$ первый узел перемещается в точку $r_{11} = 264,5 \text{ км}$. Когда $\tau = 0 \text{ ч } 48 \text{ мин } 00 \text{ с}$, вблизи внешней стенки бассейна возникает второй узел ($n = 2$, $r_{22} = 262,4 \text{ км}$), а первый имеет координату $r_{12} = 447,6 \text{ км}$. Оба узла с уменьшением периода смещаются в направлении внутренней стенки кольца ($r = a_1$). Когда $\tau = 0 \text{ ч } 41 \text{ мин } 40 \text{ с}$, то $r_{12} = 154,4 \text{ км}$, а $r_{22} = 351,8 \text{ км}$. С дальнейшим убыванием τ до $0 \text{ ч } 32 \text{ мин } 30 \text{ с}$ первый узел исчезает, но при этом появляются два новых ($n = 3$, $r_{13} = 222,2 \text{ км}$, $r_{23} = 266,7 \text{ км}$); второй узел находится в точке $r_{33} = 391,7 \text{ км}$, и его координата r_{33} растет с уменьшением периода колебаний. В то же время узловая точка с координатой r_{13} перемещается в направлении $r = a_1$, а с r_{23} — в направлении $r = a_2$. При $\tau = 0 \text{ ч } 31 \text{ мин } 50 \text{ с}$ координаты узловых точек таковы: $r_{13} = 166,6 \text{ км}$, $r_{23} = 317,7 \text{ км}$, $r_{33} = 446,2 \text{ км}$. Следовательно, для $n = 1$ и $n = 2$ с убыванием τ узловые точки смещаются внутрь кольца. При $n = 3$ узел с наименьшей координатой перемещается в сторону $r = a_1$, а остальные два — в противоположном направлении.

Рассмотрим четвертый столбец таблицы (амплитудная функция давления имеет вид (16)). Диапазон периодов, для которых $n = 1$, следующий: $0 \text{ ч } 54 \text{ мин } 10 \text{ с} \leq \tau \leq 2 \text{ ч } 23 \text{ мин } 20 \text{ с}$. При $\tau = 2 \text{ ч } 23 \text{ мин } 20 \text{ с}$ координата узла $r_{11} = 446,9 \text{ км}$, и с уменьшением τ до $0 \text{ ч } 54 \text{ мин } 10 \text{ с}$ она становится равной $247,7 \text{ км}$. Второй узел ($n = 2$) возникает при $\tau = 0 \text{ ч } 54 \text{ мин } 00 \text{ с}$, и его координата $r_{22} = 448,2 \text{ км}$, в то время как координата первого узла $r_{12} = 247,4 \text{ км}$. С убыванием τ обе узловые точки сдвигаются в направлении $r = a_1$ и при



Р и с. 3. Графики функций $\zeta(r)$ при $\tau = 0 \text{ ч } 27 \text{ мин } 30 \text{ с}$ (бассейн (21)) для профилей вынуждающего давления вида (14) — кривая 1, (15) — кривая 2, (16) — кривая 3

бассейна. С убыванием периода вынуждающей силы каждый из узлов смещается в направлении внутренней границы кольца.

$\tau = 0 \text{ ч } 34 \text{ мин } 30 \text{ с}$ находятся в $r_{12} = 191,3 \text{ км}$ и $r_{22} = 322,9 \text{ км}$. Третий узел ($n = 3$) на свободной поверхности появляется, когда $\tau = 0 \text{ ч } 34 \text{ мин } 20 \text{ с}$, его координата $r_{33} = 447,7 \text{ км}$. Другие два узла при данном τ находятся в точках $r_{13} = 190,2 \text{ км}$ и $r_{23} = 322,8 \text{ км}$. С уменьшением τ все узлы смещаются к внутренней стенке бассейна. Для $\tau = 0 \text{ ч } 25 \text{ мин } 00 \text{ с}$ их расположение таково: $r_{13} = 172,9 \text{ км}$, $r_{23} = 255,3 \text{ км}$, $r_{33} = 360,7 \text{ км}$. Итак, при воздействии на жидкость атмосферного давления с амплитудной функцией (16) каждый новый узел свободной поверхности появляется вблизи внешней стенки

Изменение координаты узловой точки при $n = 1$ минимально при действии на жидкость давления с линейным по пространству профилем (15) и составляет всего 60,5 км за 12 ч 11 мин 50 с. Для сравнения: для амплитуды давления (14) смещение равно 202,5 км за 3 ч 13 мин 50 с, а при давлении с амплитудной функцией (16) – 199,2 км за 1 ч 29 мин 10 с.

Графики функций $\zeta(r)$ для всех трех видов профиля вынуждающего давления представлены на рис.3 ($n = 2$, $\tau = 0$ ч 27 мин 30 с). Здесь кривые 1, 2, 3 отвечают амплитудной функции $\psi(r)$ вида (14), (15) и (16) соответственно. Координаты узловых точек функций $\zeta(r)$ указаны в табл. 3. Наибольших величин $|\zeta(r)|$ достигает при воздействии на жидкость атмосферного давления с амплитудной функцией (16), наименьших — при линейном профиле вынуждающей силы (15).

4. Выводы. Для одного и того же периода τ вынужденных колебаний, но для различных пространственных профилей атмосферного давления (14) – (16) координаты узловых точек свободной поверхности неодинаковы.

С ростом τ координаты узловых точек свободной поверхности изменяются.

Процесс увеличения количества узлов свободной поверхности с возрастанием τ для всех рассмотренных профилей вынуждающей силы качественно одинаков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 304 с.
2. *Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В.* Сейши в кольцевом бассейне переменной глубины // Морской гидрофизический журнал. — 1999. — №1. — С. 11 – 20.
3. *Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В.* Исследование пространственной структуры и изменчивости сейшевых колебаний в бассейне переменной глубины // Допов. НАН України. — 2000. — №5. — С. 114 – 118.
4. *Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В.* Исследование влияния геометрии бассейна на структуру сейшевых колебаний // Морской гидрофизический журнал. — 2000. — №1. — С. 19 – 30.
5. *Маркова Н.В., Черкесов Л.В.* Влияние геометрических характеристик бассейна на пространственную структуру вынужденных колебаний // Там же. — 2003. — №5. — С. 14 – 19.
6. *Маркова Н.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В.* Исследование пространственной структуры профиля свободной поверхности вынужденных осесимметричных волн в кольцевом бассейне // Системы контроля окружающей среды: Докл. Междунар. науч.-техн. семина. «Системы контроля окружающей среды-2002». Ч. 2. — Севастополь: МГИ НАН Украины, 2003. — С. 30 – 32.
7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Гостехиздат, 1955. — 560 с.
8. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. — М.: Мир, 1977. — 584 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 08.12.03

ABSTRACT Within the framework of the linear theory of long waves the forced fluid oscillations in a ring-like basin of variable depth are studied using the numerical methods. Temporally periodic variations of the atmospheric pressure are considered as a wave generator. The Coriolis force effect is taken into account. Fluid is assumed to be homogeneous and inviscid. Dependence of the fluid surface profile structure (quantity and location of nodal lines) upon the period and the space distribution of disturbing pressures is analyzed.