

Транспорт наносов захваченными топографическими волнами

В приближении Буссинеска для захваченных наклонным дном топографических волн определены средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности, при учете турбулентной вязкости и диффузии. Определяются толщина придонного погранслоя, коэффициенты вертикального турбулентного обмена, а также турбулентные напряжения на верхней границе погранслоя в зависимости от параметров волны. В диффузионном приближении находятся вертикальное распределение концентрации наносов, взвешенных волной, и расход наносов вдоль и поперек изобат.

Исследование динамических процессов у дна приобрело особую актуальность в связи с взвешиванием и переносом донного осадочного материала на шельфе. Ветровое волнение является важным фактором аккумуляции и размыва наносов непосредственно в прибрежной зоне моря. Влияние поверхностных волн прослеживается до глубин, составляющих половину длины волны [1]. На больших глубинах преобладает влияние внутренних и топографических волн. Захваченные наклонным дном топографические волны, энергия которых сконцентрирована у дна, оказывают активное воздействие на дно. В придонном слое моря на шельфе и континентальном склоне существует важный класс захваченных топографических волн типа Кельвина, нормальная ко дну компонента волновой орбитальной скорости у которых равна нулю [2 – 6].

Если турбулентные тангенциальные напряжения у дна превышают критические значения, соответствующие началу движения наносов, волна взмучивает донный осадочный материал, осуществляя его горизонтальный перенос средними течениями, индуцированными придонными топографическими волнами.

В этой связи актуальным является определение средних течений, индуцированных захваченными наклонным дном топографическими волнами за счет нелинейных эффектов в присутствии турбулентной вязкости и диффузии над склоном произвольной ориентации. Исходные нелинейные уравнения гидродинамики для волновых возмущений решаются в слабонелинейном приближении методом возмущений [7, 8]: в первом порядке малости по амплитуде волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение, во втором порядке малости — средние течения, индуцированные волнами после осреднения исходных уравнений по периоду волны. Коэффициенты турбулентного обмена в настоящей работе зависят от расстояния до дна. Выше придонного слоя, толщина которого определяется параметрами волны, коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии полагаются постоянными, равными значениям на верхней границе придонного слоя. В

придонном слое вертикальное (вдоль оси Z) распределение коэффициентов турбулентного обмена определяется ниже.

Систему уравнений гидродинамики для волновых возмущений запишем в системе координат, плоскость XOY которой совпадает с плоскостью дна. Ось X параллельна свободной невозмущенной поверхности моря и составляет с западным направлением угол β , ось Z совпадает с направлением внешней нормали. Положительному значению угла β соответствует поворот параллели к оси X против часовой стрелки. Вектор угловой скорости вращения Земли имеет проекции на оси Z , Y и X соответственно:

$$\Omega_z = \Omega (\sin\varphi \cos\gamma - \cos\varphi \cos\beta \sin\gamma),$$

$$\Omega_y = \Omega (\cos\varphi \cos\gamma \cos\beta + \sin\varphi \sin\gamma),$$

$$\Omega_x = \Omega \cos\varphi \sin\beta,$$

где $\Omega = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли, φ — широта, γ — наклон дна. Турбулентные напряжения в данной работе параметризуются через сдвиги волновых скоростей по гипотезе Сент-Гелли с введением коэффициентов горизонтальной K_1, M_1 и вертикальной K_3, M_3 турбулентной вязкости и диффузии [9]. Введем безразмерные переменные $x = \tilde{x}/H$, $y = \tilde{y}/H$, $z = \tilde{z}/H$ (H — характерная глубина), $t = \tilde{t} \omega$ (ω — характерная частота волны), размерные величины отмечены волнистой чертой сверху. Определим безразмерные величины компонент волновых возмущений скорости (u, v, w), давления P , плотности ρ , коэффициентов вертикальной K_3, M_3 и горизонтальной K_1, M_1 турбулентной вязкости и диффузии следующим образом:

$$u = \tilde{u}/(\omega \cdot H), \quad v = \tilde{v}/(\omega \cdot H), \quad w = \tilde{w}/(\omega \cdot H), \quad P = \tilde{P}/[\rho_{01}(\omega \cdot H)^2],$$

$$K_3 = \tilde{K}_3/\mu, \quad M_3 = \tilde{M}_3/\mu, \quad K_1 = \tilde{K}_1/\mu, \quad M_1 = \tilde{M}_1/\mu, \quad \rho = \tilde{\rho}g/(\rho_{01}H\omega^2)$$

$$\Omega_x = \tilde{\Omega}_x/\omega_*, \quad \Omega_y = \tilde{\Omega}_y/\omega_*, \quad \Omega_z = \tilde{\Omega}_z/\omega_*,$$

где μ — значение горизонтальной турбулентной вязкости на верхней границе придонного слоя, ρ_{01} — характерная средняя плотность воды, g — ускорение свободного падения. Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в безразмерных переменных в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + 2(\Omega_y w - \Omega_z v) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u = - \partial P / \partial x + \varepsilon^2 Qu + \\ + \varepsilon^2 \partial K_1 / \partial z \cdot \partial w / \partial x + \varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial u / \partial z, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\partial v / \partial t + 2(\Omega_z u - \Omega_x w) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})v = - \partial P / \partial y - \rho \sin\gamma + \varepsilon^2 Qv +$$

$$+ \varepsilon^2 \partial K_1 / \partial z \cdot \partial w / \partial y + \varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial v / \partial z, \quad (16)$$

$$\partial w / \partial t + 2(\Omega_x v - \Omega_y u) + (\bar{u} \bar{\nabla}) w =$$

$$= - \partial P / \partial z + \varepsilon^2 Q w + 2\varepsilon^2 \partial w / \partial z \cdot \partial K_3 / \partial z - \rho \cos \gamma, \quad (1в)$$

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0, \quad (1г)$$

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + (\bar{u} \bar{\nabla}) \rho + v \partial \rho_o / \partial y + w \partial \rho_o / \partial z = \varepsilon^2 (M_1 \partial^2 \rho / \partial x^2 + \\ + M_1 \partial^2 \rho / \partial y^2 + M_3 \partial^2 \rho / \partial z^2 + \partial M_3 / \partial z \cdot \partial \rho / \partial z), \end{aligned} \quad (1д)$$

где $\varepsilon^2 = \mu / (\omega \cdot H^2)$, $\rho_o(z \cos \gamma + y \sin \gamma)$ — безразмерная средняя плотность, u, w, v — волновые возмущения скорости течения вдоль осей X, Z, Y соответственно; ρ, P — волновые возмущения плотности и давления. Оператор $(\bar{u} \bar{\nabla})$ раскрывается по формуле $(\bar{u} \bar{\nabla}) = u \partial / \partial x + v \partial / \partial y + w \partial / \partial z$. Дифференциальный оператор Q определяется по формуле $Q = K_1 \partial^2 / \partial x^2 + K_1 \partial^2 / \partial y^2 + K_3 \partial^2 / \partial z^2$.

Уравнение (1д) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + (\bar{u} \bar{\nabla}) \rho - N^2 [\nu \sin(\gamma) + w \cos(\gamma)] = \\ = \varepsilon^2 (M_1 \partial^2 \rho / \partial x^2 + M_1 \partial^2 \rho / \partial y^2 + M_3 \partial^2 \rho / \partial z^2 + \partial M_3 / \partial z \cdot \partial \rho / \partial z). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $N^2 = -d\rho_o / dz_1$ — частота Брента — Вайсяля, $d\rho_o / dz_1$ — градиент средней плотности, $z_1 = z \cos \gamma + y \sin \gamma$. Очевидно, что вектор градиента средней плотности коллинеарен вектору g .

Граничные условия у дна:

$$u(0) = w(0) = v(0) = 0, \quad \rho(0) = 0. \quad (3)$$

В качестве решения в линейном приближении рассмотрим волну типа Кельвина, у которой $w = 0$. Волновые возмущения скорости выражаются через функцию тока:

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = - \partial \psi / \partial x. \quad (4)$$

Решение системы (1) в линейном приближении будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1(z) \cdot A \exp(ikx + i ly - i \sigma t) + \text{k.c.}, \\ \rho &= \rho_1(z) \cdot A \exp(ikx + i ly - i \sigma t) + \text{k.c.}, \\ P &= P_1(z) \cdot A \exp(ikx + i ly - i \sigma t) + \text{k.c.}, \end{aligned} \quad (5)$$

где к.с. — комплексно-сопряженные слагаемые; $A(x, t)$ — амплитудная функция, медленно меняющаяся на масштабе волны.

Из уравнения (1а) найдем $P_1(z)$:

$$P_1(z) = [i\sigma l - 2\Omega_z k - \varepsilon^2 l (k^2 K_1 + l^2 K_1 - K_3 d^2 / dz^2)] \psi_1 / k + \varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial \psi_1 / \partial z \cdot l / k. \quad (6)$$

Из (2) следует уравнение для $\rho_1(z)$:

$$[-i\sigma - \varepsilon^2 \partial M_3 / \partial z \cdot \partial / \partial z + \varepsilon^2 (k^2 M_1 + l^2 M_1 - M_3 \partial^2 / \partial z^2)] \rho_1 = -i N^2 k \psi_1 \sin \gamma. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (1в) и исключая $\rho_1(z)$, получим уравнение для $\psi_1(z)$:

$$\begin{aligned} & [i\sigma + \varepsilon^2 \partial M_3 / \partial z \cdot \partial / \partial z - \varepsilon^2 (k^2 M_1 + l^2 M_1 - M_3 \partial^2 / \partial z^2)] [2i \psi_1 (k\Omega_x + l\Omega_y)] = \\ & = [i\sigma + \varepsilon^2 \partial M_3 / \partial z \cdot \partial / \partial z - \varepsilon^2 (k^2 M_1 + l^2 M_1 - M_3 \partial^2 / \partial z^2)] d / dz \{ [il\sigma - \\ & - 2\Omega_z k + \varepsilon^2 l \partial K_3 / \partial z \cdot \partial / \partial z - \varepsilon^2 l (k^2 K_1 + l^2 K_1 - K_3 d^2 / dz^2)] \psi_1 / k \} + \\ & + 0,5 N^2 k i \psi_1 \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия у дна для функций $\rho_1(z)$ и $\psi_1(z)$ имеют вид:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \rho_1(0) = 0. \quad (9)$$

Аналогично [10], следуя асимптотическому методу Люстерника — Вишика [11, 12], функции $\psi_1(z)$ и $\rho_1(z)$ и частоту волны σ будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \psi_{10}(z) + \varepsilon^2 \psi_{12}(z) + \psi_{11}(z / \varepsilon), \\ \rho_1(z) &= \rho_{10}(z) + \varepsilon^2 \rho_{12}(z) + \rho_{11}(z / \varepsilon), \\ \sigma &= \sigma_0 + \varepsilon^2 \sigma_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\psi_{10}(z)$ и $\rho_{10}(z)$ — «невязкие» решения, т. е. решения при $\varepsilon = 0$, $\psi_{11}(z / \varepsilon)$ и $\rho_{11}(z / \varepsilon)$ — «погранслоиные» решения, быстро убывающие (по сравнению с $\psi_{10}(z)$) при удалении от дна. Приведем выражения для $\psi_{10}(z)$ и $\rho_{10}(z)$, которые потребуются в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \psi_{10}(z) &= \exp(mz), \\ \rho_{10}(z) &= N^2 k \sin \gamma \cdot \psi_{10}(z) / \sigma_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma_0^2 = N^2 k^2 \sin^2 \gamma / (k^2 + l^2)$ — дисперсионное соотношение при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии; $\varepsilon^2 \sigma_2$ в (10) — поправка к частоте, обусловленная турбулентной вязкостью и диффузией [10],

$$m = [2\sigma_0 (k\Omega_x + l\Omega_y) + 0,5 N^2 k \sin 2\gamma] / [2i\sigma_0 \Omega_z + k l N^2 (\sin^2 \gamma) / k_h^2].$$

Уравнение для ψ_{11} имеет вид

$$\partial/\partial\eta(M_3\partial/\partial\eta\psi_{11})+i\sigma\psi_{11}=0, \quad \eta=z/\varepsilon. \quad (12)$$

Выше придонного слоя толщиной h величину коэффициента турбулентного обмена будем считать постоянной, равной M_{30} ; внутри придонного слоя при $z < h$ коэффициент турбулентного обмена зависит от z по линейному закону [13, 14]:

$$M_3(z) = (M_{30} - \nu)z/h + \nu,$$

где ν — молекулярная вязкость. Решение уравнения (12) при $z \geq h$ имеет вид: $\psi_{11}(\eta) = \exp(\lambda\eta)C$, $\lambda = -\sqrt{(\sigma_0/(2M_{30}))(1-i)}$ и соответственно

$$\rho_{11}(z) = C \exp(\lambda\eta) N^2 k \sin \gamma / \sigma_0.$$

В области $z < h$ уравнение (12) решалось численно по неявной схеме Адамса второго порядка при условии непрерывности функции ψ_{11} и ее производной при $z = h$. Постоянная C находилась из условия $\psi_{10}(0) + \psi_{11}(0) = 0$.

Амплитудная функция $A(x, t)$ является медленно меняющейся функцией на масштабах волны. Умножим обе части уравнения (1а) на u , уравнения (1б) — на v и сложим эти уравнения; после осреднения по периоду волны в линейном приближении получим уравнение для огибающей $A(x, t)$:

$$\partial|A^2|/\partial t + C_{gx} \partial|A^2|/\partial x + C_{gy} \partial|A^2|/\partial y = \alpha|A^2|, \quad (13)$$

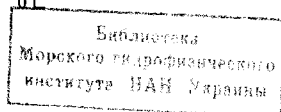
где

$$C_{gx} = l^2/k \left\{ \int_0^H [(\sigma + \varepsilon^2 k_h^2 K_1) \psi_1 \psi_1^* - \frac{\varepsilon^2}{2} K_3 (\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial z^2} + \psi_1^* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}) - \right. \\ \left. - i \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial K_3}{\partial z} (\psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial z} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial z})] dz \right\} \left[k_h^2 \int_0^H \psi_1 \psi_1^* dz \right]^{-1},$$

$$C_{gy} = -C_{gx} k/l$$

— компоненты групповой скорости волны,

$$\alpha = - \left\{ \int_0^H \left[2k_h^4 K_1 \psi_1 \psi_1^* - k_h^2 K_3 \left(\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial z^2} + \psi_1^* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + k^2 N^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\sigma^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(2k_h^2 M_1 \psi_1 \psi_1^* - M_3 \left(\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial z^2} + \psi_1^* \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) \right) \right] dz + \int_0^H \left[-k_h^2 \frac{\partial K_3}{\partial z} \frac{\partial(\psi_1 \psi_1^*)}{\partial z} - \right. \right. \quad (14)$$



$$-k^2 N^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\sigma^2} \frac{\partial M_3}{\partial z} \frac{\partial(\psi_1 \psi_1^*)}{\partial z} \left] dz \right\} \left[k_h^2 \int_0^H \psi_1 \psi_1^* dz \right]^{-1}$$

— коэффициент затухания волны, $k_h^2 = k^2 + l^2$. Будем полагать, что $K_3 = M_3$, $K_1 = M_1 = M_3 |m/k_h|^{1,1}$ [15].

В стационарном случае уравнение (13) преобразуется к виду:

$$C_g \partial |A^2| / \partial \xi = \alpha |A^2|, \quad (15)$$

где ξ — координата вдоль луча, C_g — групповая скорость.

Пространственные производные функции $|A^2|$ следующим образом выражаются через градиент $\partial |A^2| / \partial \xi$:

$$\partial |A^2| / \partial x = C_{gx} / C_g \cdot \partial |A^2| / \partial \xi, \quad (16)$$

$$\partial |A^2| / \partial y = C_{gy} / C_g \cdot \partial |A^2| / \partial \xi.$$

Осредним исходные уравнения движения по периоду волны, получим с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, уравнения для средних полей, индуцированных волной в слабонелинейном приближении (черта сверху означает осреднение по периоду волны):

$$\begin{aligned} \partial \bar{u} / \partial t + \overline{\bar{u} \nabla u} + 2\Omega_y \bar{w} - 2\Omega_z \bar{v} = -\partial \bar{P} / \partial x + \varepsilon^2 Q \bar{u} + \\ + \varepsilon^2 \partial K_1 / \partial z \cdot \partial \bar{w} / \partial x + \varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial \bar{u} / \partial z, \end{aligned} \quad (17 \text{ а})$$

$$\begin{aligned} \partial \bar{v} / \partial t + \overline{\bar{u} \nabla v} + 2\Omega_z \bar{u} - 2\Omega_x \bar{w} = -\partial \bar{P} / \partial y + \varepsilon^2 Q \bar{v} - \bar{\rho} \sin \gamma + \\ + \varepsilon^2 \partial K_1 / \partial z \cdot \partial \bar{w} / \partial y + \varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial \bar{v} / \partial z, \end{aligned} \quad (17 \text{ б})$$

$$\begin{aligned} \partial \bar{w} / \partial t + \overline{\bar{u} \nabla w} + 2\Omega_x \bar{v} - 2\Omega_y \bar{u} = -\partial \bar{P} / \partial z - \bar{\rho} \cos \gamma + \varepsilon^2 Q \bar{w} + \\ + 2\varepsilon^2 \partial K_3 / \partial z \cdot \partial \bar{w} / \partial z, \end{aligned} \quad (17 \text{ в})$$

$$\begin{aligned} \partial \bar{\rho} / \partial t + \overline{\bar{u} \nabla \rho} - N^2 (\bar{v} \sin \gamma + \bar{w} \cos \gamma) = \\ = M_1 \varepsilon^2 \partial^2 \bar{\rho} / \partial x^2 + M_1 \varepsilon^2 \partial^2 \bar{\rho} / \partial y^2 + M_3 \varepsilon^2 \partial^2 \bar{\rho} / \partial z^2 + \varepsilon^2 \partial M_3 / \partial z \cdot \partial \bar{\rho} / \partial z, \end{aligned} \quad (17 \text{ г})$$

$$\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z = 0. \quad (17 \text{ д})$$

Волновые напряжения $\overline{\bar{u} \nabla u}$, $\overline{\bar{u} \nabla v}$, $\overline{\bar{u} \nabla w}$ выражаются через ψ_1 , ρ_1 :

$$\overline{\bar{u} \nabla u} = l^2 \psi_1 \psi_1^* \partial(AA^*) / \partial x - kl \psi_1 \psi_1^* \partial(AA^*) / \partial y, \quad (18 \text{ а})$$

$$\overline{u \nabla v} = -kl \psi_1 \psi_1^* \partial(AA^*)/\partial x + k^2 \psi_1 \psi_1^* \partial(AA^*)/\partial y, \quad (18 \text{ б})$$

$$\overline{u \nabla \rho} = i(\rho_1 \psi_1^* - \rho_1^* \psi_1)[k \partial(AA^*)/\partial y - l \partial(AA^*)/\partial x]/2. \quad (18 \text{ в})$$

Из анализа системы (17) с учетом (16), (18) следует, что индуцируемые волной средние поля плотности $\bar{\rho}$, давления $\bar{P}$ и скорости течения $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{v}$ необходимо искать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_{20}(z)AA^*, & \bar{P} &= P_{20}(z)AA^*, & \bar{u} &= u_{20}(z)AA^*, \\ \bar{v} &= v_{20}(z)AA^*, & \bar{w} &= w_{20}(z)\partial(AA^*)/\partial \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений для функций $P_{20}(z), \rho_{20}(z), u_{20}(z), v_{20}(z), w_{20}(z)$ следует из (17) после подстановки (18), (19) при использовании соотношений (15), (16) и сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка.

$$dY/dz = AY + F, \quad (20)$$

где A — матрица размерностью 8×8 , элементы которой определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{41} &= -C_{gx}/C_g, \quad a_{42} = -C_{gy}/C_g, \quad a_{15} = a_{26} = a_{37} = 1, \quad a_{54} = 2\Omega_y \alpha / (C_g K_3) - \\ &\quad - C_{gx} \alpha^2 / (C_g^3 K_3) \cdot \partial K_1 / \partial z, \\ a_{55} &= a_{66} = -\partial K_3 / \partial z / K_3, \quad a_{77} = -\partial M_3 / \partial z / M_3, \\ a_{52} &= -2\Omega_z / K_3, \quad a_{58} = \alpha C_{gx} / (K_3 C_g^2), \quad a_{51} = a_{62} = -(K_1 / K_3)(\alpha / C_g)^2, \\ a_{61} &= 2\Omega_z / K_3, \quad a_{63} = \sin \gamma / K_3, \quad a_{64} = -2\Omega_x \alpha / (K_3 C_g) - C_{gy} \alpha^2 / (C_g^3 K_3) \cdot \partial K_1 / \partial z, \\ a_{68} &= C_{gy} \alpha / (C_g^2 K_3), \\ a_{73} &= -(M_1 / M_3)(\alpha / C_g)^2, \quad a_{84} = K_1(\alpha / C_g)^3, \quad a_{72} = -N^2 \sin(\gamma) / M_3, \\ a_{74} &= -N^2 \alpha \cos(\gamma) / (M_3 C_g), \quad a_{81} = 2\Omega_y - 2\alpha C_{gx} / C_g^2 \partial K_3 / \partial z, \end{aligned} \quad (21)$$

$$a_{82} = -2\Omega_x - 2\alpha C_{gy} / C_g^2 \partial K_3 / \partial z,$$

$$a_{85} = -\alpha K_3 C_{gx} / C_g^2, \quad a_{83} = -\cos\gamma, \quad a_{86} = -\alpha K_3 C_{gy} / C_g^2.$$

Все остальные элементы матрицы A равны 0. Столбцы Y и F имеют вид:

$$Y = \begin{pmatrix} u_{20} \\ v_{20} \\ \rho_{20} \\ w_{20} \\ \partial u_{20} / \partial z \\ \partial v_{20} / \partial z \\ \partial \rho_{20} / \partial z \\ P_{20} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{10} \psi_1 \psi_1^* \\ f_{20} \psi_1 \psi_1^* \\ f_{30} (\rho_1 \psi_1^* - \rho_1^* \psi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\text{где } f_{10} = \alpha l (l C_{gx} - k C_{gy}) / (C_g^2 K_3), \quad f_{20} = \alpha k (k C_{gy} - l C_{gx}) / (C_g^2 K_3), \\ f_{30} = \alpha i (k C_{gy} - l C_{gx}) / (2 C_g^2 M_3).$$

Система дифференциальных уравнений (20) решается аналитически в области $z \geq h$ при условии $u_{20}, v_{20}, w_{20}, \rho_{20} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. В области $z < h$ она решается численно по неявной схеме Адамса при граничных условиях $u_{20}(0) = v_{20}(0) = w_{20}(0) = \rho_{20}(0) = 0$ и при условии непрерывности решения $Y(z)$ на верхней границе придонного слоя ($z = h$).

Окончательно индуцируемые волной поля скорости течения $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ и плотности $\bar{\rho}$ определяются по формулам

$$\bar{u}(z) = |A^2| y_1(z), \quad \bar{v}(z) = |A^2| y_2(z), \quad \bar{w}(z) = |A^2|_\xi y_4(z), \quad \bar{\rho}(z) = |A^2| y_3(z). \quad (23)$$

Амплитудный множитель $|A^2|$ найдем из условия нормировки, которое состоит в следующем. Пусть U_0 – максимальная амплитуда волновой орбитальной скорости.

Тогда

$$|A^2| = U_0^2 / J, \quad (24)$$

где $J = 4k_h^2 \max(\psi_1 \psi_1^*)$.

Пусть

$$\tau = \rho_0 K_3 \sqrt{(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2} \quad (25)$$

— осредненное за период волны тангенциальное напряжение на верхней границе придонного слоя. Следуя [16, 17, 18], введем коэффициент донного трения $c_d = \tau / [\rho_0(u^2 + v^2)]$. При заданном c_d коэффициент вертикального турбулентного обмена для данной волны находится из (25), а толщина придонного слоя — по формуле $h = \alpha_0 \kappa u_* / \sigma_0$ [14, 19], здесь u_* — динамическая скорость, $u_*^2 = \tau / \rho_0$, $\kappa = 0,4$ — постоянная Кармана, $\alpha_0 = 0,5$. Если тангенциальное напряжение у дна превышает критическое значение τ_0 , соответствующее началу движения наносов, то волна взмучивает наносы, осуществляя их горизонтальный перенос.

В стационарном и горизонтально-однородном случае уравнение вертикальной диффузии для средней концентрации наносов имеет вид [17]:

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\bar{w} - w_s)C(z)] = \frac{\partial}{\partial z}[M_3(z)\frac{\partial}{\partial z}C(z)], \quad (26)$$

где $w_s = \omega_s \cos \gamma$, ω_s — гидравлическая крупность наносов [17]. Решение уравнения (26), затухающее при удалении от дна, имеет вид

$$C(z) = C_0 \exp\left[\int_{z_0}^z (\bar{w} - w_s)/M_3(z') dz'\right], \quad (27)$$

где $z_0 = \exp(-\kappa / \sqrt{c_d})$ — шероховатость морского дна [16].

Величина придонной концентрации i -й фракции наносов пропорциональна превышению тангенциального напряжения над критическим значением для данной фракции [17, 18]:

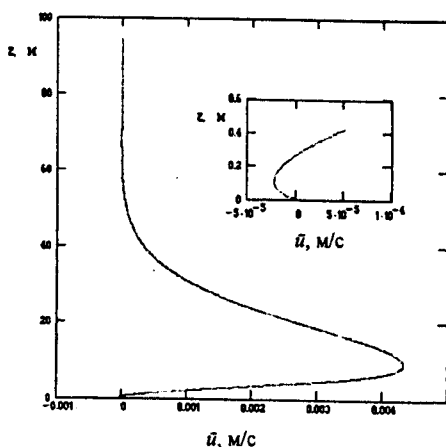
$$C_0 = M(\tau - \tau_0) / w_s.$$

Величина M для i -й фракции определяется по формуле $M_i = B \tau^{1/2} \rho_0^{-3/2} g^{-1} (v^2 / g)^{-1/3} s^{-4/3} p_i$, где $s = (\rho_n - \rho_0) / \rho_0$, ρ_n — плотность материала наносов, p_i — содержание частиц i -й фракции в материале дна, $B = 3,4 \cdot 10^{-5}$. Для смеси фракций вертикальное распределение концентрации наносов определяется суммой решений (27) для каждой фракции.

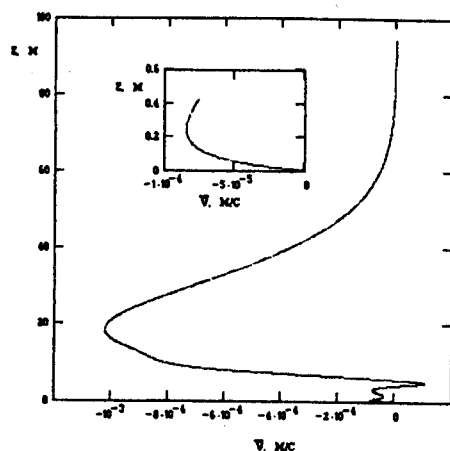
Найдем расход наносов вдоль и поперек изобат:

$$G_x = \int_0^H \bar{u}(z) C(z) dz, \\ G_y = \int_0^H \bar{v}(z) C(z) dz - \sum_{i=1}^n \int_0^H c_i(z) \omega_{si} \sin \gamma dz, \quad (28)$$

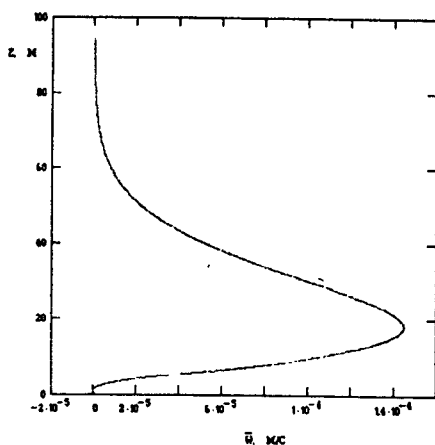
где $C(z) = \sum_{i=1}^n c_i(z)$, $c_i(z)$ — распределение массовой концентрации i -й фракции, ω_{si} — гидравлическая крупность i -й фракции.



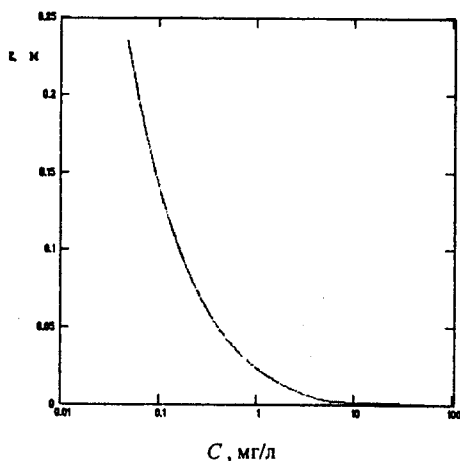
Р и с. 1. Вертикальный профиль компоненты $\bar{u}(z)$ скорости среднего течения, индуцированного за счет нелинейности волны (на врезке — профиль скорости у дна)



Р и с. 2. Вертикальный профиль компоненты $\bar{v}(z)$ скорости среднего течения, индуцированного за счет нелинейности волны (на врезке — профиль скорости у дна)



Р и с. 3. Вертикальный профиль компоненты $\bar{w}(z)$ скорости среднего течения, индуцированного за счет нелинейности волны



Р и с. 4. Вертикальное распределение концентрации наносов, взвешенных волной

Расчет индуцируемых полей скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ будем проводить для континентального склона Южного берега Крыма между мысами Ай-Тодор и Аю-Даг, где $\phi = 44^\circ 20'$, $\beta = 44^\circ 30'$, средний уклон дна $\gamma = 0,14$, при типичном значении частоты Брента — Ваясяля глубже главного пикноклина $\sim 1,5$ цикл/ч [19], $k = -0,006$, $l = 0,002 \text{ м}^{-1}$, частота волны $\sigma_0 = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Коэффициент придонного трения принимался равным $c_d = 0,0025$ [19], соответствующим наиболее типичным условиям шероховатости морского дна на рассматриваемых масштабах. Нормирующий множитель A определялся таким образом, чтобы максимальная амплитуда горизонтальной скорости равнялась $U_0 \sim 0,15 \text{ м/с}$, т. е. A находился из соотношения (24). Коэффициент вертикального турбулентного обмена K_{30} на верхней границе придонного слоя определялся из соотношения (25) и составил $K_{30} = M_{30} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Толщина придонного слоя составила 4,2 м. При столь значительном уклоне дна необходим учет в тангенциальном напряжении гравитационной составляющей, обусловленной наклоном дна:

$$\tau = \rho_0 \sqrt{[gd(\rho_n / \rho_0 - 1)\sin(\gamma)]^2 + K_3^2[(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2]}. \quad (29)$$

Для алевроитовой фракции с размером d частиц 0,03 — 0,1 мм величина $\rho_n \sim 2,65 \text{ г/см}^3$, критическое тангенциальное напряжение, соответствующее началу движения наносов, $\tau_0 \sim 1 \text{ дин/см}^2$ [20, 21]. У фракций с размером частиц 0,04 — 0,1 мм величина $\tau > \tau_0$. Доля частиц указанных размеров составляет в донных осадках континентального склона $p = 12\%$ [22]. Доля фракций $> 0,1 \text{ мм}$ не превышает 1% [22, 23]. Скорости гравитационного осаждения частиц фракций 0,04 — 0,1 мм находились по формуле Гиббса [24] и составили $w_{0,04} = 0,137 \text{ см/с}$, $w_{0,05} = 0,210 \text{ см/с}$, $w_{0,06} = 0,298 \text{ см/с}$, $w_{0,07} = 0,398 \text{ см/с}$, $w_{0,08} = 0,508 \text{ см/с}$, $w_{0,09} = 0,629 \text{ см/с}$, $w_{0,1} = 0,758 \text{ см/с}$.

Донная концентрация взвешенных волной наносов $C_0 = 51,2 \text{ г/м}^3$ (или мг/л) при равномерном распределении рассматриваемых частиц по размерам $p_i = p/7$. На рис. 1, 2, 3 показаны вертикальные профили компонент $\bar{u}(z)$, $\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$ скорости среднего течения, индуцированного за счет нелинейности волны. Вертикальное распределение концентрации наносов, взвешенных волной, показано на рис. 4. Расходы наносов (28) вдоль и поперек склона соответственно равны: $G_x = -4,8 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $G_y = -1,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$. Поперечный расход наносов отрицателен, т. е. наносы переносятся вниз по склону. Вдоль изобат поток наносов также отрицателен, сонаправлен с проекцией горизонтального волнового вектора и меньше поперечного расхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ястребов В.С., Парамонов А.Н., Онищенко Э.Л. и др. Исследование придонного слоя буксируемыми аппаратами. — М.: ИО АН СССР, 1989. — 128 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 1. — М.: Мир, 1981. — 478 с.
3. Brink K.H. A comparison of long coastal trapped waves theory with observation off Peru // *J. Phys. Oceanogr.* — 1982. — 12, N 8. — P. 897–913.
4. Rhines P. Edge-, bottom-, and Rossby waves in a rotating stratified fluid // *Geophys. Fluid Dyn.* — 1970. — 1. — P. 273–302.
5. Ou H.-W. On the propagation of free topographic Rossby waves near continental margins. Part 1. Analytical model for a wedge // *J. Phys. Oceanogr.* — 1980. — 10, N 7. — P. 1051–1060.
6. Пантелеев Н.А., Слепышев А.А. Воздействие мелкомасштабной турбулентности на придонные топографические волны // *Морской гидрофизический журнал.* — 2000. — № 1. — С. 3–18.
7. Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И. и др. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. ФАО.* — 1976. — 12, № 3. — С. 293–301.
8. Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // *Stud. Appl. Math.* — 1977. — 56. — P. 241–266.
9. Дворянинов Г.С. Эффекты волн в пограничных слоях атмосферы и океана. — Киев: Наук. думка, 1982. — 176 с.
10. Слепышев А.А. Транспортные свойства придонных топографических волн на шельфе и континентальном склоне // *Изв. РАН. ФАО.* — 2002. — 38, № 6. — С. 841–847.
11. Задорожный А.И. Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море // *Морские гидрофизические исследования.* — Севастополь: МГИ АН УССР. — 1975. — № 3. — С. 96–110.
12. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. — Киев: Наук. думка, 1980. — 259 с.
13. Grant W.D., Madsen O.S. Combined waves and current interaction with rough bottom // *J. Geophys. Res.* — 1979. — 84, № C4. — P. 1797–1808.
14. Lee T.N., Henes D.M. Comparison of field observation of the vertical distribution of suspended sediment and its prediction by models // *Ibid.* — 1996. — 101, № C2. — P. 3561–3572.
15. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. — Л.: Гидрометеониздат, 1986. — 280 с.
16. Green M.O., McCave I.N. Seabed drag coefficient under tidal currents in the Eastern Irish // *J. Geophys. Res.* — 1995. — 100, № C8. P. 16057–16069.
17. Шатило Г.И., Аквис Т.М., Пыхов Н.В. и др. Перенос мелкодисперсного осадочного материала мезомасштабными течениями в шельфово-склоновой зоне моря // *Океанология.* — 2000. — 40, № 3. — С. 333–339.
18. Анциферов С.М., Дебольский В.К. Распределение концентрации взвесей в стационарном потоке над размываемым дном // *Водные ресурсы.* — 1997. — 24, № 3. — С. 270–276.
19. Блатов А.С., Иванов В.А. Гидрология и гидродинамика шельфовой зоны Черного моря. — Киев: Наук. думка, 1992. — 237 с.
20. Uncles R.J., Stephens J.A. Distribution of suspended sediment at high water in a macrotidal estuary // *J. Geophys. Res.* — 1989. — 94, № C2. — P. 14395–14405.
21. Van Rijn L. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. — Amsterdam: Aqual Publ. — 1993. — 390 p.
22. Щербаков Ф.А., Куприн П.Н., Потапова Л.И. и др. Осадконакопление на континентальной окраине Черного моря. — М.: Наука, 1978. — 210 с.
23. Айтбулатов Н.А. Динамика твердого вещества в шельфовой зоне. — Л.: Гидрометеониздат, 1990. — 271 с.
24. Онищенко Э.Л., Ямпольский В.А. Современное состояние вопроса определения гидравлической крупности // *Современные процессы осадконакопления на шельфах Мирового океана.* — Л.: Наука, 1990. — С. 193–207.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 19.11.03
После доработки 16.06.04

ABSTRACT Mean flows induced by a wave due to non-linearity with allowance for the eddy viscosity and diffusion are defined in the Boussinesque approximation for the topographic waves entrained by a slope bottom. The bottom boundary layer thickness, the vertical turbulent exchange coefficients and the bed shear stress depending on the wave parameters are found. Vertical distribution of the wave-weighted sediment concentration and sediment consumption along and across the isobaths are obtained in the diffusion approximation.