

Капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности однородной жидкости

Методом многих масштабов получены уравнения для трех нелинейных приближений капиллярно-гравитационных возмущений свободной поверхности слоя однородной жидкости постоянной глубины, в которых учтены пространственно-временные изменения волнового профиля в выражении потенциала скорости на поверхности жидкости. На их основе построены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для потенциала скорости и возвышения поверхности жидкости, формируемого бегущей периодической волной конечной амплитуды. Проведен анализ зависимости амплитудно-фазовых характеристик волновых возмущений от силы поверхности натяжения, глубины жидкости, длины и крутизны волны основной гармонике.

Введение. В линейной постановке влияние поверхностного натяжения на волновые процессы в однородной жидкости рассмотрено в работах [1 – 3]. Теоретический анализ развития волн малой амплитуды в двухслойной жидкости с учетом капиллярных сил на свободной поверхности и на границе раздела слоев приведен в [4]. Исследование капиллярно-гравитационных поверхностных периодических бегущих волн конечной амплитуды выполнено в работе [5] методом многомасштабных разложений без оценки изменений амплитудно-фазовых характеристик, обусловленных зависимостью потенциала скорости движения жидких частиц на свободной поверхности от ее пространственно-временных деформаций.

В настоящей работе методом многомасштабных асимптотических разложений получены уравнения для нелинейных приближений, в которых учтены пространственно-временные изменения волнового профиля в выражении потенциала скорости на границе жидкость — воздух.

На основе полученных уравнений выполнено исследование влияния поверхностного натяжения на распространение периодических волн конечной амплитуды. Дана оценка изменений, вносимых в структуру возмущений в результате учета пространственно-временных деформаций поверхности жидкости в выражении потенциала скорости при выводе кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений.

Постановка задачи. Рассмотрим влияние поверхностного натяжения на распространение периодических волн конечной амплитуды в однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H . В предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg} t_1$, где k — волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H < z < \zeta \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = \zeta$)

$$\zeta - \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) - \alpha_1 k^2 \zeta_{xx} (1 + \zeta_x^2)^{-3/2} = 0 \quad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\varphi_z = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \zeta_t = 0. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha/(\rho g)$, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности бассейна ζ при $z = \zeta$ связаны кинематическим условием

$$\zeta_t - \zeta_x \varphi_x + \varphi_z = 0. \quad (5)$$

Уравнения для нелинейных приближений. Решение задачи (1) — (5) найдем методом многих масштабов [6]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε — малое, но конечное, и предположим справедливость выражений

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \zeta_0(x, t), \quad \varphi = \varepsilon \varphi_0(x, z, t), \quad f = \varepsilon f_0(x), \\ \zeta_0 &= \zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \varepsilon^2 \zeta_3 + O(\varepsilon^3), \quad \varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_3 + O(\varepsilon^3), \\ f_0 &= f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив φ из (6) в (1) и (3), с точностью до величин третьего порядка малости получим

$$\varepsilon \Delta \varphi_1 + \varepsilon^2 \Delta \varphi_2 + \varepsilon^3 \Delta \varphi_3 = 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь динамическое (2), кинематическое (5) и начальное (4) условия. В силу малости ε представим потенциал скорости $\varphi(k, z, t)$ на поверхности жидкости $z = \varepsilon \zeta_0$ в виде

$$\varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0) = \varphi(x, t, 0) + \varepsilon \zeta_0 \varphi_z(x, t, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta_0^2 \varphi_{zz}(x, t, 0) + \dots \quad (8)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon \zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, t, \varepsilon \zeta_0)$ в условия (2), (3), (4), (5), имея в виду при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2},$$

и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (8). Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю из (2) — (5), (7), найдем

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H < z < 0, \quad (9)$$

$$\zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} - \alpha_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial x^2} = F_n^*, \quad z = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n^*, \quad z = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (12)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad L_n^* = L_n + L_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = L_1^0 = L_2^0 = G_1 = 0,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right],$$

$$L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} - \frac{3}{2} \alpha_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2,$$

$$L_3 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right) - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3},$$

$$F_2^0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad L_3^0 = - \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

$$F_3^0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \zeta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0 , входящие в правые части уравнений (10), (11), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t в (8) при выводе поверхностных граничных условий для нелинейных приближений [7]. Что касается выражений $F_{2,3}, L_{2,3}, G_{2,3}$, то они аналогичны полученным в [5]. Из (10),

(11) видно, что зависимость ζ_0 от x и t в (8) не проявляется в выражениях для приближения порядка ε ($F_1^0 = L_1^0 = 0$). В приближениях же ε^2 такое слагаемое (F_2^0) входит только в динамическое условие, а в приближении ε^3 — в динамическое (F_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

Выражения для потенциала скорости и возвышения поверхности жидкости. Задача (9) — (13) сформулирована для общего случая неустановившихся возмущений конечной амплитуды. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн, задавая $f_n(x)$ в соответствующем виде. В таком случае выберем первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности бассейна ζ_1 в форме

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2). \quad (14)$$

Тогда из кинематического условия (11) находим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sin \theta, \quad z = 0. \quad (15)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (12) на дне бассейна, запишем φ_1 в форме

$$\varphi_1 = b_0 \cosh(z + H) \sin \theta. \quad (16)$$

После подстановки (16) в (15) получим $b_0 = \tau (\sinh H)^{-1}$. В результате

$$\varphi_1 = b_1 \sin \theta, \quad b_1 = \tau (\sinh H)^{-1} \cosh(z + H). \quad (17)$$

Подставляя (14) и (17) в динамическое условие (10), найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = (1 + \alpha_1 k^2 \tanh H). \quad (18)$$

Выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (14), получим из последующих приближений. Чтобы найти второе приближение (решение задачи при $n = 2$), определим правые части уравнений (10), (11), используя (14), (17). Тогда с учетом требования отсутствия основной гармоник получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta, \quad \varphi_2 = b_2 \cosh 2(z + H) \sin 2\theta + \varphi_2^*, \quad (19)$$

где

$$a_2 = \tau^2 \left[(1 + 4\alpha_1 k^2) \tanh 2H - 2\tau^2 \right]^{-1} \mu_2,$$

$$b_2 = \left(a_2 - \frac{1}{2} \coth H \right) \tau \cosh 2(z + H) \sinh^{-1} 2H,$$

$$\mu_2 = \tanh 2H - \coth H - \frac{1}{4} \tanh 2H (\coth^2 H - 1), \quad \varphi_2^* = \frac{1}{4} \tau^2 (\coth^2 H + 1) T_0.$$

При этом оказывается, что θ не зависит от T_1 . Поэтому $\beta = \beta_2(T_2)$. Полученные решения для первого (14), (17) и второго (19) приближений опреде-

ляют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность для ζ_3 , φ_3 , найдем

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta, \quad \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta + \varphi_3^*, \quad \beta = \tau \sigma_0 T_2.$$

Здесь

$$a_3 = \tau^2 \left[(1 + 9\alpha_1 k^2) \tanh 3H - 3\tau^2 \right]^{-1} (l_4 \tanh 3H - l_6),$$

$$b_3 = \tau \left(a_3 - \frac{1}{3} l_6 \right) \cosh 3(z + H) \sinh^{-1} 3H,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} (l_5 - l_3 \tanh H),$$

$$\varphi_3^* = \tau \left[\frac{1}{2} (l_5 - l_3 \tanh H) - l_5 \right] \cosh(z + H) \sinh^{-1} H \sin \theta,$$

$$l_3 = \frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \coth H \left(\coth H \coth 2H - \frac{5}{4} \right) - a_2 \left(\frac{1}{2} + \coth H \coth 2H \right),$$

$$l_4 = -\frac{3}{8} \alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \coth H \left(\coth H \coth 2H - \frac{15}{4} \right) + a_2 \left(\frac{11}{2} - \coth H \coth 2H \right),$$

$$l_5 = l_2 + \frac{9}{8}, \quad l_6 = 3l_2 + \frac{1}{8}, \quad l_2 = \frac{1}{2} [a_2 (\coth H + 2 \coth 2H) - \coth H \coth 2H].$$

Следовательно, возвышение поверхности бассейна ζ и потенциал скорости движения жидкости φ до величин третьего порядка малости определяется из выражений

$$\zeta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n a_n \cos n\theta, \quad \varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n (b_n \sin n\theta + \varphi_n^*), \quad (20)$$

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau (1 + \varepsilon^2 \sigma_0), \quad a_1 = 1, \quad \varphi_1^* = 0.$$

В размерных величинах ($\zeta = \zeta/k$, $\Phi = \varphi \sqrt{kg}/k^2$, $\varepsilon = ak$, где a — амплитуда начальной гармоники)

$$\zeta = a \cos \theta + a^2 k a_2 \cos 2\theta + a^3 k^2 a_3 \cos 3\theta,$$

$$\Phi = a \sqrt{g/k} b_1 \sin \theta + a^2 \sqrt{kg} b_2 \sin 2\theta + a^3 k \sqrt{kg} b_3 \sin 3\theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \Phi_n^*,$$

где $\theta = kx + \sigma_1 (1 + a^2 k^2 \sigma_0) t$, $\sigma_1 = \tau \sqrt{kg}$, $\Phi_n^* = \varphi_n^* \sqrt{kg}/k^2$, а индекс 1 у x и t здесь и далее опущен.

Фазовую скорость волновых возмущений определим из формул

$$\nu = \nu_1 \left(1 + \varepsilon^2 \sigma_0 \right), \quad \nu_1 = \tau \sqrt{g/k}.$$

Анализ волновых характеристик. Из полученных выражений следует, что частота и фазовая скорость возмущений зависят не только от коэффициента поверхностного натяжения, но и от амплитуды начальной волновой гармоник. Фазовая скорость ν_1 основной линейной гармоник как функция волнового числа k имеет минимум при значении $k = k^*$, удовлетворяющем условию $V_1(k) = \nu_1(k)$, где

$$V_1 = \frac{g}{2\sigma} \left[(1 + 3\alpha_1 k^2) \tanh kH + (1 + \alpha_1 k^2) (1 - \tanh^2 kH) kH \right]$$

характеризует групповую скорость линейных гравитационно-капиллярных волн.

Для глубокой воды ($kH \gg 1$) решение упрощается, так как

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, & a_3 &= \frac{3}{16} \alpha_1 k^2 (1 - 3\alpha_1 k^2)^{-1}, & \sigma_0 &= \frac{6 + 3\alpha_1 k^2}{16(1 + \alpha_1 k^2)}, \\ \tau &= \sqrt{1 + \alpha_1 k^2}, & \sigma_1 &= \sqrt{kg(1 + \alpha_1 k^2)}, & \nu &= \sqrt{(1 + \alpha_1 k^2)g/k}, \\ k^* &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}, & \lambda(k^*) &= 2\pi\sqrt{\alpha_1}, & \sigma(k^*) &= \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt[4]{\alpha_1}}, & \nu_1(k^*) &= \sqrt{2g} \sqrt[4]{\alpha_1}, \\ V_1 &= \frac{1}{2} g \sigma^{-1} (1 + 3\alpha_1 k^2). \end{aligned}$$

Причем V_1 и ν_1 связаны соотношением

$$V_1 = \frac{1}{2} \nu_1 (1 + 3\alpha_1 k^2) (1 + \alpha_1 k^2)^{-1}.$$

Минимальное значение имеет и V_1 как функция k в точке $k = k^0$. Если $kH \gg 1$, то

$$\begin{aligned} k^0 &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} k^*, & \lambda(k^0) &= \sqrt[4]{\frac{3}{7 - 4\sqrt{3}}} \lambda(k^*), & \sigma(k^0) &= \sqrt[4]{\frac{2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}} \sigma(k^*), \\ V_1(k^0) &= g(\sqrt{3} - 1)/\sigma(k^0), & V_1(k^0) &= 0,768 \nu_1(k^*). \end{aligned}$$

Минимальные значения групповой $V_1(k^0)$ и фазовой $\nu_1(k^*)$ скоростей линейных гравитационно-капиллярных волн равны соответственно 17,82 и 23,21 см/с для коэффициента поверхностного натяжения воды на границе с воздухом $\alpha = 74$ дин/см. Коэффициенту поверхностного натяжения бензола на границе с воздухом $\alpha = 30$ дин/см [8] отвечают значения $V_1(k^0) = 14,22$ см/с и $\nu_1(k^*) = 18,52$ см/с.

Волновое число $k = k^*$ и соответствующие ему длина волны и частота колебаний равны 3,639 см⁻¹, 1,726 см, 84,453 с⁻¹ для $\alpha = 74$ дин/см и 5,715 см⁻¹, 1,099 см, 105,841 с⁻¹ для $\alpha = 30$ дин/см. Величины k^0 , $\lambda(k^0)$, $\alpha(k^0)$, отвечающие минимуму $V_1(k)$, равны 1,431 см⁻¹, 4,387 см, 40,245 с⁻¹ при $\alpha = 74$ дин/см и 2,248 см⁻¹, 2,794 см, 50,436 с⁻¹ при $\alpha = 30$ дин/см.

Если при выводе кинематического и динамического поверхностных условий для нелинейных приближений пренебречь зависимостью ζ_0 от x и t в (8) (полагая F_2^0, F_3^0, L_3^0 равными нулю в (10), (11)), то в формулах (20) – (22), определяющих решение задачи, следует учесть, что

$$l_3 = \frac{3}{8}\alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \coth H \left(\coth H \coth 2H - \frac{9}{4} \right) + a_2 \left(\frac{3}{2} - \coth H \coth 2H \right),$$

$$l_4 = -\frac{3}{8}\alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2} \coth H \left(\coth H \coth 2H - \frac{11}{4} \right) + a_2 \left(\frac{7}{2} - \coth H \coth 2H \right),$$

$$l_5 = l_2 + \frac{3}{8}, \quad l_6 = 3l_2 + \frac{3}{8}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \tanh 2H - \frac{1}{4} \tanh 2H (\coth^2 H - 1) - \coth H.$$

В этом случае [5] на глубокой воде

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha_1 k^2}{1 - 2\alpha_1 k^2}, \quad a_3 = \frac{3}{16} \frac{2 + 7\alpha_1 k^2 + 2(\alpha_1 k^2)^2}{(1 - 2\alpha_1 k^2)(1 - 3\alpha_1 k^2)}, \quad \sigma_0 = \frac{8 + \alpha_1 k^2 + 2(\alpha_1 k^2)^2}{16(1 - 2\alpha_1 k^2)(1 + \alpha_1 k^2)}.$$

Отсюда при $\alpha = 0$ найдем значения $a_2 = 1/2$, $a_3 = 3/8$, $\sigma_0 = 1/2$, совпадающие с полученными в [9] при обычном разложении по малому параметру.

Отметим, что полученное решение (20) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел k_2 и k_3 , удовлетворяющих уравнению

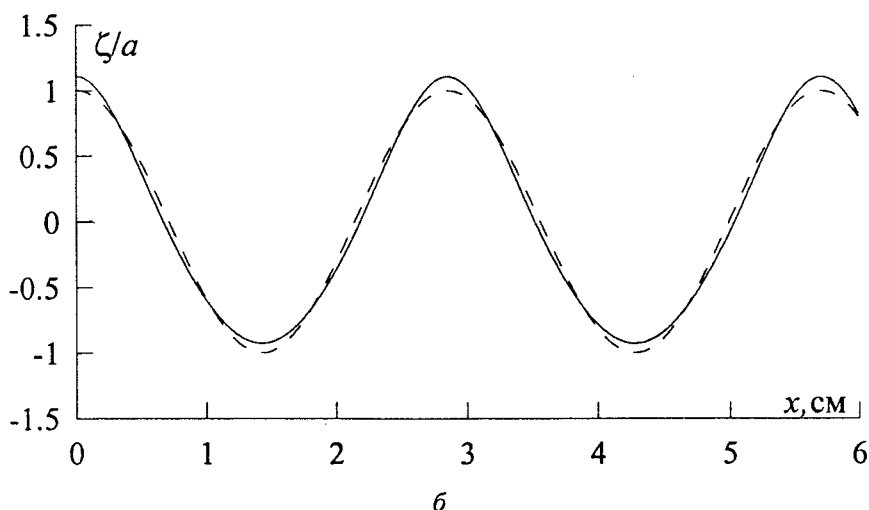
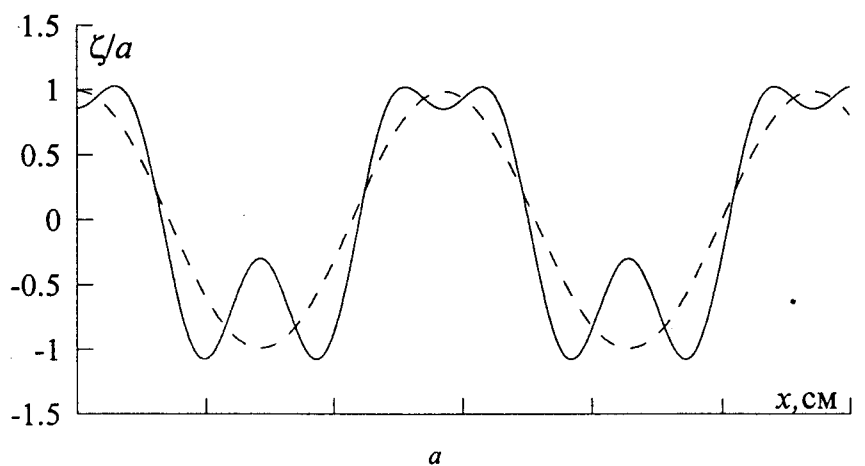
$$(1 + n^2 \alpha_1 k^2) \tanh nH - n\tau^2 = 0$$

при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

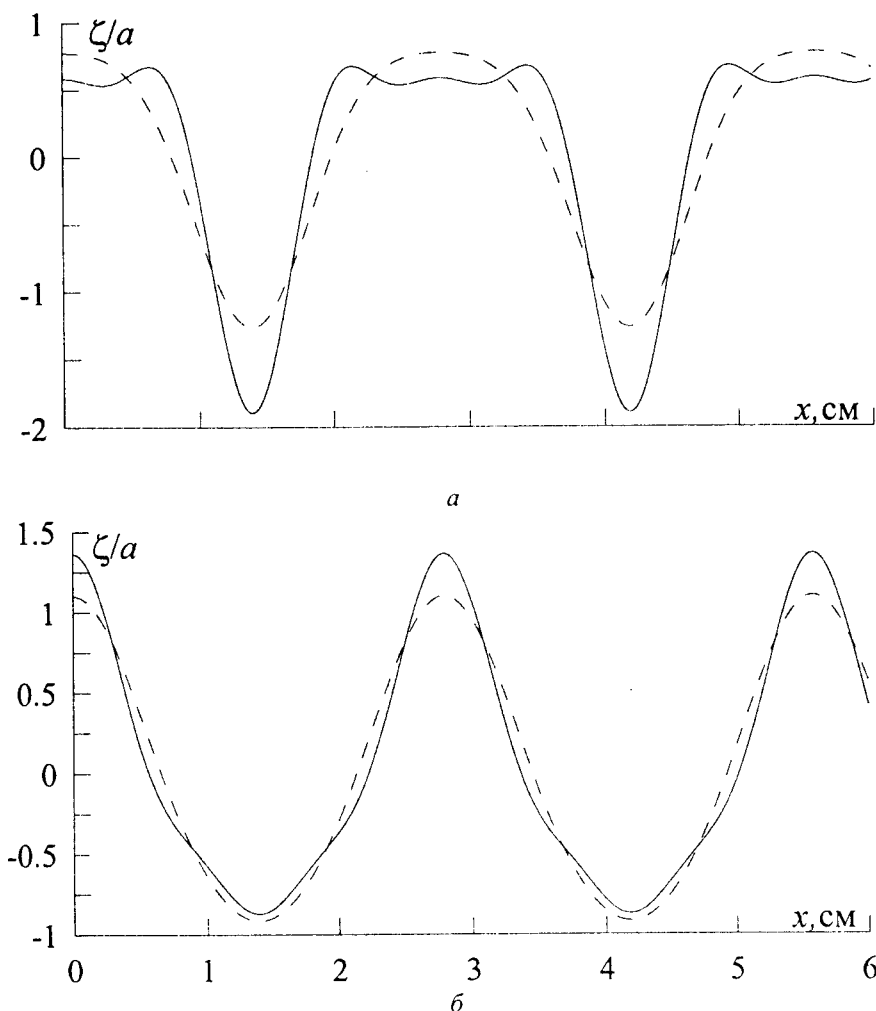
Если $kH \gg 1$, то $k_n = 1/\sqrt{n\alpha_1}$. Указанные точки остаются сингулярными как при учете, так и без учета слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 . Значения резонансных волновых чисел увеличиваются с ростом толщины слоя жидкости H . Для оценки влияния этих слагаемых на структуру волновых профилей вне зон сингулярности проводились численные расчеты при $t = 0$.

Анализ результатов расчетов показал, что пренебрежение слагаемыми F_2^0, F_3^0, L_3^0 может привести к существенным деформациям профиля капиллярно-гравитационных волн. Это иллюстрируют графики $\zeta(x)$, представленные на рис. 1 для случая $kH \gg 1$, $k = 2,2$ см⁻¹, $a = 0,05$ см сплошными и штриховыми линиями соответственно без учета и с учетом указанных слагаемых при $\alpha = 74$ дин/см (рис. 1, а) и $\alpha = 30$ дин/см (рис. 1, б). В качественном отношении аналогичные изменения распределений ζ по x при $kH \gg 1$ за счет слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0 могут иметь место и при других значениях крутизны и

длины волны (вне малых окрестностей резонансных значений) основной гармонике. В случае полного учета кривизны волнового профиля в уравнениях для нелинейных приближений возвышение поверхности бассейна, формируемое капиллярно-гравитационными волнами, имеет вид, близкий к гармоническому. Нелинейный характер этого распределения заметно проявляется лишь в случае малой толщины слоя жидкости, что иллюстрируют графики на рис. 2 при $h = 0,55$ см, $k = 2,25$ см⁻¹, $a = 0,05$ см, $\alpha = 74$ дин/см (рис. 2, а) и $\alpha = 30$ дин/см (рис. 2, б). Сплошным и штриховым линиям соответствуют здесь $\zeta(x)$, полученные при равных нулю и отличных от нуля слагаемых F_2^0 , F_3^0 , L_3^0 .



Р и с. 1. Профили волновых возмущений с учетом (штриховые линии) и без учета (сплошные) слагаемых F_2^0 , F_3^0 , L_3^0 для случая $kH \gg 1$, $k = 2,2$ см⁻¹, $a = 0,05$ см, $t = 0$ при $\alpha = 74$ дин/см (а) и $\alpha = 30$ дин/см (б)



Р и с. 2. Профили волновых возмущений с учетом (штриховые линии) и без учета (сплошные) слагаемых F_2^0 , F_3^0 , L_3^0 для случая $h = 0,55$ см, $k = 2,25$ см⁻¹, $a = 0,05$ см, $t = 0$ при $\alpha = 74$ дин/см (а) и $\alpha = 30$ дин/см (б)

Закключение. Методом многих масштабов получены уравнения для трех нелинейных приближений решения задачи о влиянии капиллярных сил на распространение произвольного начального возмущения поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины. В них учтены пространственно-временные изменения волнового профиля в выражении потенциала скорости на границе жидкость — воздух. В случае периодической бегущей волны найдены решения полученных уравнений, позволяющие представить потенциал скорости и возвышение поверхности жидкости в виде асимптотических разложений до величин третьего порядка малости. На основе этих разложений проведен анализ зависимости амплитудно-фазовых ха-

рактистик волновых возмущений от силы поверхностного натяжения, глубины жидкости, длины и крутизны волны основной гармоника.

Показано, что пренебрежение кривизной волнового профиля в выражении потенциала скорости при выводе кинематического и динамического поверхностных граничных условий для нелинейных приближений может привести к заметным изменениям пространственного распределения вертикальных смещений поверхности жидкости, формируемых капиллярно-гравитационными волнами конечной амплитуды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 304 с.
2. *Федосенко В.С.* Неустановившиеся капиллярно-гравитационные корабельные волны // Морские гидрофизические исследования. — Севастополь: МГИ АН УССР. — 1970. — № 3(49). — С. 78 – 91.
3. *Murray J.C.* On the linear capillary-gravity waves problem // *Acta mech.* — 1975. — 23, № 3. — P. 229 – 238.
4. *Букатов А.Е., Черкесов Л.В.* Волны в неоднородном море. — Киев: Наук. думка, 1983. — 224 с.
5. *Nayfeh A.H.* Finite amplitude surface waves in a liquid layer // *J. Fluid Mech.* — 1970. — 40, № 4. — P. 671 – 684.
6. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 455 с.
7. *Букатов А.Е., Букатов А.А.* Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом // *Морской гидрофизический журнал.* — 2002. — № 5. — С. 34 – 46.
8. *Дейли Дж.* Механика жидкости. — М.: Энергия, 1971. — 480 с.
9. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. Press.* — 1847. — 1. — P. 197 – 229.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 11.02.04

ABSTRACT The equations for three non-linear approximations of capillary-gravitational disturbances of free surface of the uniform fluid layer of finite depth are obtained by the method of multiple scales. They take account of spatial-temporal variations of a wave profile in the expression of the velocity potential on the fluid surface. They constitute a basis for constructing asymptotic expansions up to the values of the third-order infinitesimal for the velocity potential and fluid surface rising resulting from a running periodic wave of finite amplitude. Dependence of the amplitude-phase characteristics of wave disturbances upon the surface tension, fluid depth, length and steepness of the main harmonic wave is analyzed.