

Математическое моделирование морских систем

УДК 551.464.4

С.Г. Демышев

Численные эксперименты по сопоставлению двух конечно-разностных схем для уравнений движения в дискретной модели гидродинамики Черного моря

На основе бокс-метода и метода неопределенных коэффициентов проведен анализ конечно-разностных схем, обладающих двумя инвариантами, для уравнений движения в баротропном приближении. Получена функциональная зависимость, которая позволяет строить разностные схемы, обладающие свойствами антисимметрии решения, сохранения энергии и/или энтропии. Проанализированы две аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнениях движения. Первая из них обеспечивает сохранение двух квадратичных инвариантов для баротропного дивергентного движения, вторая — для баротропного недивергентного течения. На основе прогностических (20 лет модельного времени) экспериментов показано, что первая схема более точно количественно описывает известные физические особенности крупномасштабной циркуляции в Черном море.

Введение. Для адекватного воспроизведения циркуляции в море необходимо правильно описывать энергетический обмен между движениями различных пространственных масштабов. В теории дифференциальных уравнений показано [1, 2], что существует взаимно однозначное соответствие между законами сохранения и свойствами решения систем гидродинамического типа. Следовательно, можно предположить, что лучшая аппроксимация свойств решения дифференциальной задачи достигается при соблюдении в численной модели законов сохранения (с точностью до ошибок округления).

Для уравнений адвекции – диффузии тепла и/или соли еще Лоренцем [3] была указана аппроксимация, обеспечивающая сохранение первого и высшего моментов. Для нелинейных уравнений движения в баротропном приближении были получены разностные аналоги, обеспечивающие выполнение закона сохранения полной энергии и энтропии (консервативные схемы). Впервые конечно-разностная схема, обладающая двумя квадратичными инвариантами (энергия, потенциальная энтропия), для движения баротропной двумерной жидкости выведена в [4]. В случае недивергентного течения при постоянной плотности она была получена для уравнений движения, записанных в форме Громеки – Лэмба на сетке C [5]. Затем эта схема с успехом применялась в атмосферных моделях прогноза погоды [6].

Целью работы является анализ различных типов консервативных схем для уравнений движения и проведение калибрационных численных экспериментов на основе трехмерной модели гидродинамики Черного моря [7].

© С.Г. Демышев, 2005

1. Конечно-разностная схема адвективных слагаемых. На примере уравнений мелкой воды рассмотрим конечно-разностные формулировки, которые могут использоваться при аппроксимации горизонтальных адвективных слагаемых в уравнениях движения. В качестве методологической основы построения численной модели используется бокс-метод [8]. Область интегрирования разбивается на элементарные ячейки-боксы, в каждом из которых проводится интегрирование системы дифференциальных уравнений. В результате получаем систему дифференциально-разностных уравнений (дифференциальных по времени), число неизвестных в которой превышает число уравнений. Для ее замыкания необходимо вводить «дополнительные» соотношения между неизвестными. Необходимыми условиями выбора таких соотношений служат минимальный разностный шаблон и требуемый второй порядок аппроксимации, достаточным условием – выполнение законов сохранения. Для нахождения этих соотношений используется метод неопределенных коэффициентов [5]. Подробно методология построения консервативных конечно-разностных схем анализируется в [9].

1.1. Дифференциально-разностная схема для нелинейных уравнений двумерного движения баротропной жидкости. Рассмотрим прямоугольный бассейн с твердыми боковыми границами. Введем оси x, y , направленные на восток и север. В баротропном приближении дифференциальные уравнения движения имеют две формы записи:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi v = -\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \xi u = -\frac{\partial G}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$, $G = P + E$. Остальные обозначения — общепринятые. Полагаем, что выполняется условие непротекания и дивергенция горизонтальной скорости равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Покажем, что для систем (1) и (2) в дискретном случае существуют преобразования, которые, не меняя порядок аппроксимации, переводят их друг в друга.

Прямоугольную область разобьем на элементарные боксы, которым соответствуют целочисленные значения индексов i, j ($i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$). Их грани совпадают с сушей.

Пусть $\Omega_{i,j}, \Sigma_i, \Sigma_j$ — площадь и горизонтальные грани бокса (i, j) , φ — интегрируемая функция. Введем следующие обозначения (для $\varphi_{i,j+1/2}$ — аналогично):

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{\Omega_{i,j}} \int_{\Omega_{i,j}} \varphi dx dy, \quad \varphi_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Sigma_i} \int_{\Sigma_i} \varphi dy.$$

Введем разностные операторы (для j – аналогично):

$$\bar{\varphi}_{i,j}^x = \frac{\varphi_{i+1/2,j} + \varphi_{i-1/2,j}}{2}, \quad \delta_x \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1/2,j} - \varphi_{i-1/2,j}}{h_x}, \quad \nabla_{x,y}^2 \varphi_{i,j} = \delta_x^2 \varphi_{i,j} + \delta_y^2 \varphi_{i,j},$$

где h_x, h_y — горизонтальные размеры бокса.

Интегрируя уравнения (1) – (3) по боксу (i, j) , получаем (целочисленные значения индексов здесь и в дальнейшем опускаем):

$$\frac{du}{dt} + u \delta_x \bar{u}^x + v \delta_y \bar{v}^y - f v = -\delta_x P, \quad (4 \text{ а})$$

$$\frac{dv}{dt} - u \delta_x \bar{v}^x + v \delta_y \bar{v}^y + f u = -\delta_y P, \quad (4 \text{ б})$$

$$\frac{du}{dt} - \xi v = -\delta_x G, \quad (5 \text{ а})$$

$$\frac{dv}{dt} + \xi u = -\delta_y G, \quad (5 \text{ б})$$

$$\delta_x u + \delta_y v = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (4), (6) неизвестные функции — $u_{i,j}, v_{i,j}, u_{i+1/2,j}, v_{i,j+1/2}, P_{i+1/2,j}, P_{i,j+1/2}$, в уравнениях (5), (6) — $u_{i,j}, v_{i,j}, u_{i+1/2,j}, v_{i,j+1/2}, G_{i+1/2,j}, G_{i,j+1/2}$.

Полагаем, что ξ выражается через параметр Кориолиса и горизонтальные скорости. Здесь и далее предполагается, что все функции непрерывно зависят только от времени.

Предположим, что выполняется (преимущество такой аппроксимации показано в [9])

$$u_{i,j} = \bar{u}_{i,j}^x, \quad v_{i,j} = \bar{v}_{i,j}^y.$$

Преобразуем уравнения (5). Для этого суммируем (5 а) по точкам $(i, j), (i+1, j)$, уравнение (5 б) по точкам $(i, j), (i, j+1)$. Полагаем в точке (i, j)

$$\bar{G}^x = G - \frac{h_x^2}{4} \frac{d}{dt}(\delta_x u), \quad \bar{G}^y = G - \frac{h_y^2}{4} \frac{d}{dt}(\delta_y v). \quad (7)$$

Тогда уравнения (4) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{du_{i+1/2,j}}{dt} - \overline{\xi_{i+1/2,j} v_{i+1/2,j}}^x = -\delta_x G_{i+1/2,j}, \quad (8 \text{ а})$$

$$\frac{dv_{i,j+1/2}}{dt} + \overline{\xi_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2}}^y = -\delta_y G_{i,j+1/2}, \quad (8 \text{ б})$$

$$\text{где } G_{i,j} = P_{i,j} + E_{i,j}, \quad E_{i,j} = \frac{\overline{u_{i,j}^2}^x + \overline{v_{i,j}^2}^y}{2}.$$

Уравнение (6) позволяет для скоростей на гранях бокса (i, j) ввести функцию тока:

$$u_{i+1/2,j} = -\delta_y \psi_{i+1/2,j}, \quad v_{i,j+1/2} = -\delta_x \psi_{i,j+1/2}.$$

Согласование с уравнением $\xi = \nabla^2 \psi + f$ дает следующую аппроксимацию вихря скорости:

$$\xi_{i+1/2,j+1/2} = \delta_x v_{i+1/2,j+1/2} - \delta_y u_{i+1/2,j+1/2} + f_{j+1/2}. \quad (9)$$

Тогда, чтобы из системы (4) получить уравнения (8), соотношения для давления в точке (i, j) с учетом (9) должны удовлетворять:

$$\bar{P}^x = P - \frac{h_x^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_x u) + u \delta_x^2 u + v \delta_x^2 v - \frac{(\delta_x u)^2}{2} - \frac{h_y^2}{h_x^2} \frac{(\delta_y v)^2}{2} \right], \quad (10 \text{ а})$$

$$\bar{P}^y = P - \frac{h_y^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_y v) + u \delta_y^2 u + v \delta_y^2 v - \frac{h_x^2}{h_y^2} \frac{(\delta_x u)^2}{2} - \frac{(\delta_y v)^2}{2} \right]. \quad (10 \text{ б})$$

Разностные аналоги уравнений движения (4), (5), естественно, не являются единственным способом аппроксимации уравнений движения. В силу уравнения неразрывности уравнения движения могут быть записаны в дивергентной форме. Кроме того, кориолисово слагаемое может аппроксимироваться двумя способами:

$$f v \rightarrow f_j v_{i,j}, \quad f v \rightarrow \overline{f_j v_{i,j}}^y, \quad f u \rightarrow f_j u_{i,j}, \quad f u \rightarrow \overline{f_j u_{i,j}}^x.$$

Тогда разностный аналог уравнения движения в дивергентной форме в боксе (i, j) имеет вид:

$$\frac{du}{dt} + \delta_x (u \bar{u}^x) + \delta_y (v \bar{u}^y) - \overline{f v}^y = -\delta_x P, \quad (11 \text{ а})$$

$$\frac{dv}{dt} + \delta_x (u \bar{v}^x) + \delta_y (v \bar{v}^y) + \overline{f u}^x = -\delta_y P. \quad (11 \text{ б})$$

Предположим, что выполняются следующие соотношения:

$$\bar{P}^x = P - \frac{h_x^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_x u) + \overline{u \delta_x^2 u}^x + \overline{v \delta_x^2 v}^y \right], \quad (12 \text{ а})$$

$$\bar{P}^y = P - \frac{h_y^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_y v) + \overline{u \delta_y^2 u}^x + \overline{v \delta_y^2 v}^y \right]. \quad (12 \text{ б})$$

Суммируем уравнение (11 а) по боксам $(i+1/2, j)$ и (i, j) , уравнение (11 б) — по боксам $(i, j+1/2)$ и (i, j) . С учетом (12) уравнения для скоростей на гранях бокса имеют вид:

$$\frac{du_{i+1/2, j}}{dt} - \overline{\xi_{i+1/2, j} v_{i+1/2, j}}^{xy} = -\delta_x G_{i+1/2, j}, \quad (13 \text{ а})$$

$$\frac{dv_{i, j+1/2}}{dt} + \overline{\xi_{i, j+1/2} u_{i, j+1/2}}^{xy} = -\delta_y G_{i, j+1/2}. \quad (13 \text{ б})$$

В полученных уравнениях (13) в нелинейные слагаемые входит относительная завихренность на границе области, что требует задания касательной скорости во внешних по отношению к области интегрирования точках. Такое требование не является следствием дифференциальной постановки и обусловлено принятыми аппроксимациями (10), (12). Так как в дальнейшем будет использоваться условие обтекания, полагаем на боковых стенках равенство нулю нормальной производной от касательной скорости. Отметим, что проведенные выкладки остаются верными и при условии прилипания.

Заменяя уравнения (11) на систему уравнений

$$\frac{du}{dt} - \overline{\xi v}^y = -\delta_x G, \quad (14 \text{ а})$$

$$\frac{dv}{dt} + \overline{\xi u}^x = -\delta_y G, \quad (14 \text{ б})$$

и вместо выражений (12 а), (12 б) используя (7), получим снова (13а), (13 б).

С учетом краевых условий схемы (4), (10) и (5), (7) обладают свойством сохранения энергии и приводят к следующему уравнению для вихря в точке $i+1/2, j+1/2$:

$$\frac{d\xi}{dt} + \delta_x (\overline{u \xi}^y) + \delta_y (\overline{v \xi}^x) = 0. \quad (15)$$

Напомним, что нелинейные слагаемые в уравнении вихря в терминологии работы [4] могут быть выражены через следующие разностные аналоги якобиана:

$$J_1 = \delta_x \overline{\psi}^x \delta_y \overline{\xi}^y - \delta_y \overline{\psi}^y \delta_x \overline{\xi}^x, \\ J_2 = \delta_x \left(\overline{\psi \delta_y \xi}^x \right) - \delta_y \left(\overline{\psi \delta_x \xi}^y \right), \quad (16)$$

$$J_3 = \delta_y \left(\overline{\xi \delta_x \psi^x}^y \right) - \delta_x \left(\overline{\xi \delta_y \psi^y}^x \right).$$

Различные аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнении (15) приводят к комбинациям разностных якобианов (16), которые обладают различными свойствами сохранения.

В соответствии с (16) в уравнении (15) мы получим

$$\delta_x \overline{u \xi}^y + \delta_y \overline{v \xi}^x = \frac{J_1 + J_2}{2}. \quad (17)$$

Следовательно, система уравнений (8) обладает свойством сохранения кинетической энергии. Но при этом не выполняются свойства антисимметрии якобиана и сохранения энтропии в уравнении (15).

В свою очередь, уравнения (13) приводят к уравнению для $\xi_{i+1/2, j+1/2}$, в котором имеем

$$\delta_x \overline{u \xi}^{xy} + \delta_y \overline{v \xi}^{xy} = \frac{J_2 + J_3}{2}. \quad (18)$$

В этом случае якобиан обладает свойством антисимметрии, но в схеме не сохраняются кинетическая энергия и энтропия.

И, наконец, третий якобиан получаем из дифференциально-разностного аналога (4) и следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \overline{P}^x &= P - \frac{h_x^2}{4} \left[\frac{d}{dt} \delta_x u + u \delta_x^2 u + v \delta_y \overline{\delta_x u}^y - \frac{(\delta_x u)^2}{2} - \frac{h_y^2}{h_x^2} \frac{(\delta_y v)^2}{2} \right], \\ \overline{P}^y &= P - \frac{h_y^2}{4} \left[\frac{d}{dt} \delta_y v + v \delta_y^2 v + u \delta_x \overline{\delta_y v}^x + \delta_y^2 v - \frac{h_x^2}{h_y^2} \frac{(\delta_x u)^2}{2} - \frac{(\delta_y v)^2}{2} - u \delta_y f \right]. \end{aligned}$$

Тогда нелинейные слагаемые приводятся к виду

$$\delta_x \overline{u}^y \xi + \delta_y \overline{v}^x \xi = \frac{J_1 + J_3}{2},$$

который обеспечивает сохранение энтропии. При этом не соблюдается свойство антисимметрии и адвекция дает ненулевой вклад в изменение кинетической энергии.

Таким образом, схему, обладающую двумя квадратичными инвариантами для двумерного движения баротропной несжимаемой жидкости, можно получить из разностных аналогов уравнения движения, записанных в форме Эйлера. Аналогичный результат имеет место, если уравнения движения представим в форме Громеки — Лэмба:

$$\frac{du}{dt} - \alpha_1 \xi v - \alpha_2 \xi \bar{v}^x = -\delta_x G, \quad (19 \text{ a})$$

$$\frac{dv}{dt} - \alpha_1 \xi u + \alpha_2 \xi \bar{u}^y = -\delta_y G, \quad (19 \text{ б})$$

$$\bar{G}^x = G - \frac{h_x}{4} \left(h_x \frac{d}{dt} \delta_x u - \gamma_1 h_x v \delta_x \xi + \gamma_2 h_y I \delta_y v \right), \quad (20 \text{ a})$$

$$\bar{G}^y = G - \frac{h_y}{4} \left(h_y \frac{d}{dt} \delta_y v - \gamma_1 h_y u \delta_y \xi + \gamma_2 h_x I \delta_x u \right), \quad (20 \text{ б})$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ — неопределенные коэффициенты, I — неизвестная функция.

Из (19) – (20) следует, что в общем виде уравнение для вихря в точке $i+1/2, j+1/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} + \alpha_1 \left(\delta_x u \bar{\xi}^y + \delta_y v \bar{\xi}^x \right) + \alpha_2 \left(\delta_x u \bar{\xi}^{xy} + \delta_y v \bar{\xi}^{xy} \right) - \gamma_1 \left[\frac{h_y^2}{4} \delta_x \delta_y (u \delta_y \xi) + \right. \\ \left. + \frac{h_x^2}{4} \delta_x \delta_y (v \delta_x \xi) \right] + \gamma_2 h_x h_y \delta_x \delta_y [I (\delta_x u + \delta_y v)] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При любых конечных γ_2 следующая таблица указывает на связь между $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ и выполнением некоторых свойств, соответствующих вышеприведенным разностным схемам [5, 9, 10]:

$(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,0,1)	(2/3, 1/3, 1/3)
$J(\psi, \xi)$	$\frac{J_1 + J_2}{2}$	$\frac{J_2 + J_3}{2}$	$\frac{J_1 + J_3}{2}$	$\frac{J_1 + J_2 + J_3}{3}$
$J(\psi, \xi) = -J(\xi, \psi)$	Нет	Да	Нет	Да
сохранение E	Да	Нет	Нет	Да
сохранение ξ^2	Нет	Нет	Да	Да

Присутствие последнего слагаемого в (20), (21) показывает, что для уравнений двумерного течения, существует бесконечное множество разностных схем, обладающих двумя квадратичными инвариантами.

1.2. Дифференциально-разностная схема для уравнений мелкой воды.
В предыдущем параграфе получено семейство разностных схем, обладаю-

ших двумя квадратичными инвариантами в случае движения баротропной двумерной жидкости. Для того чтобы выбрать из них лучшую, рассмотрим более сложную систему — нелинейные уравнения мелкой воды. Для нее выполняются законы сохранения потенциального вихря и потенциальной энтропии [5]. Как следует из метеорологических исследований [11, 12], лучшая аппроксимация свойств решения системы уравнений, описывающих движение бароклинной жидкости, достигается при использовании разностных схем, обладающих аналогами этих двух инвариантов в баротропном приближении.

Систему разностных уравнений в точке (i, j, k) запишем в виде:

$$\frac{du}{dt} - \frac{2}{3}\eta v^* - \frac{1}{3}\overline{\eta v^*}^y = -\delta_x G, \quad (22)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{2}{3}\eta u^* + \frac{1}{3}\overline{\eta v^*}^x = -\delta_y G, \quad (23)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} + \delta_x u^* + \delta_y v^* = 0. \quad (24)$$

Введены следующие обозначения:

$$\eta_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\xi_{i+1/2, j+1/2}}{h_{i+1/2, j+1/2}}, \quad (25)$$

$$u_{i,j}^* = \overline{u_{i,j}^*}^x = \overline{u_{i,j} \zeta_{i,j}}^x, \quad v_{i,j}^* = \overline{v_{i,j}^*}^y = \overline{v_{i,j} \zeta_{i,j}}^y.$$

Функции $h_{i+1/2, j}$, $h_{i, j+1/2}$ и $h_{i+1/2, j+1/2}$ пока не определены.

С учетом предыдущих результатов введем соотношения

$$\overline{G}^x = E + \zeta - \frac{h_x^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_x u) - \frac{1}{3} v^* \delta_x \eta + \gamma I \delta_y v \right], \quad (26 \text{ а})$$

$$\overline{G}^y = E + \zeta - \frac{h_y^2}{4} \left[\frac{d}{dt} (\delta_y v) - \frac{1}{3} u^* \delta_y \eta + \gamma I \delta_x u \right]. \quad (26 \text{ б})$$

Умножим уравнение (22) на $u_{i,j}^*$, (23) — на $v_{i,j}^*$, (24) — на $\zeta_{i,j}$, результат сложим и проинтегрируем по всей области. С учетом (26) получим

$$\sum_{i,j} \left[\frac{1}{2} \left(\zeta_{i+1/2, j} \frac{du_{i+1/2, j}^2}{dt} + \zeta_{i-1/2, j} \frac{du_{i-1/2, j}^2}{dt} + \zeta_{i, j+1/2} \frac{dv_{i, j+1/2}^2}{dt} + \zeta_{i, j-1/2} \frac{dv_{i, j-1/2}^2}{dt} \right) + \right.$$

$$+ \left(E_{i,j} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\zeta_{i,j}^2}{dt} \right) \Bigg] = 0. \quad (27)$$

Из условия (27) следуют выражения для $\zeta_{i+1/2,j}$, $\zeta_{i,j+1/2}$ и $E_{i,j}$. Действительно, получаем, что соотношение

$$\sum_{i,j} \left[E_{i,j} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} - \left(\overline{u_{i,j}^2} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} + \overline{v_{i,j}^2} \frac{d\zeta_{i,j}}{dt} \right) \right] = 0$$

выполняется тождественно, если

$$E_{i,j} = \frac{\overline{u_{i,j}^2} + \overline{v_{i,j}^2}}{2}, \quad \zeta_{i+1/2,j} = \overline{\zeta_{i+1/2,j}}^x, \quad \zeta_{i,j+1/2} = \overline{\zeta_{i,j+1/2}}^y. \quad (28)$$

Таким образом, первый квадратичный инвариант имеет вид

$$\zeta_{i,j} E_{i,j} + \frac{\zeta_{i,j}^2}{2}. \quad (29)$$

Заметим, что этот результат не зависит от величины γ и вида I .

Из системы (22) – (26) следует, что уравнение для потенциального вихря в точке $i+1/2, j+1/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\zeta\eta}{dt} + \frac{2}{3} \left(\delta_x \overline{u^* \eta}^x + \delta_y \overline{v^* \eta}^y \right) + \frac{1}{3} \left(\delta_x \overline{u^* \eta}^{xy} + \delta_y \overline{v^* \eta}^{xy} \right) - \\ & - \frac{1}{3} \left[\frac{h_y^2}{4} \delta_x \delta_y (u^* \delta_y \eta) + \frac{h_x^2}{4} \delta_x \delta_y (v^* \delta_x \eta) \right] + \gamma h_x h_y \delta_x \delta_y [I(\delta_x u + \delta_y v)] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Напомним, что $\zeta_{i+1/2,j+1/2}$ пока не определена. Полагаем, что $\eta_{i+1/2,j+1/2} = \text{const} = c$. В этом случае из (30) следует, что для дифференциально-разностной схемы (22) – (26) выполняется закон сохранения потенциального вихря, при условии

$$\zeta_{i+1/2,j+1/2} = \overline{\zeta_{i+1/2,j+1/2}}^{xy}, \quad I(c) = 0.$$

Теперь необходимо подобрать постоянную γ и функцию I так, чтобы наряду с сохранением энергии выполнялся закон сохранения потенциальной энтропии. Для этого умножим (30) на $\eta_{i+1/2,j+1/2}$ и приведем подобные члены.

В [9] показано, что в зависимости от величины γ и вида функции I для системы уравнений (22) – (26) в случае бездивергентных скоростей можно получить бесконечное множество различных схем, обладающих двумя квадратичными инвариантами. Среди этого множества существует локальная аппроксимация нелинейных слагаемых. Непосредственной подстановкой находится, что в этом случае

$$I_{i,j} = \delta_x \delta_y \eta_{i,j}, \quad \gamma = 1/3.$$

Окончательно нелинейные слагаемые имеют вид:

$$\begin{aligned} [\xi, v] &= -\frac{1}{3} \left\{ \overline{2v_{i+1/2,j}^{xy} \xi_{i+1/2,j}^y} + \frac{\overline{v_{i+1,j}^x \xi_{i+1/2,j}^y} + \overline{v_{i,j}^x \xi_{i-1/2,j}^y}}{2} \right\}, \\ [\xi, u] &= \frac{1}{3} \left\{ \overline{2u_{i,j+1/2}^{xy} \xi_{i,j+1/2}^x} + \frac{\overline{u_{i,j+1}^x \xi_{i,j+1/2}^x} + \overline{u_{i,j}^x \xi_{i,j-1/2}^x}}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

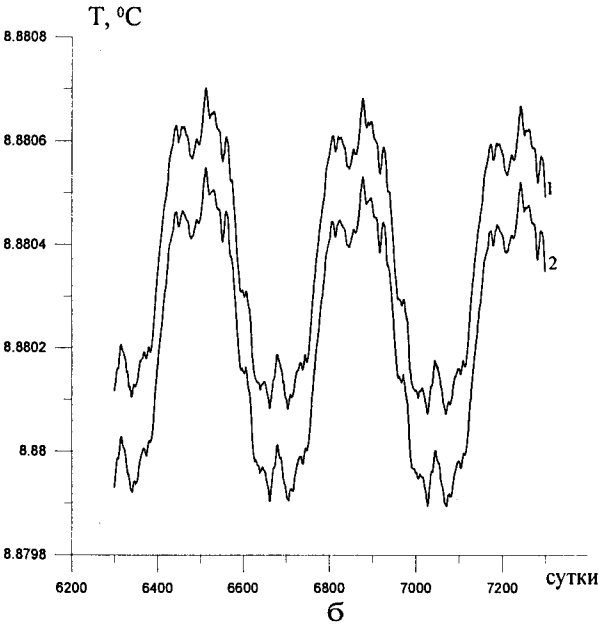
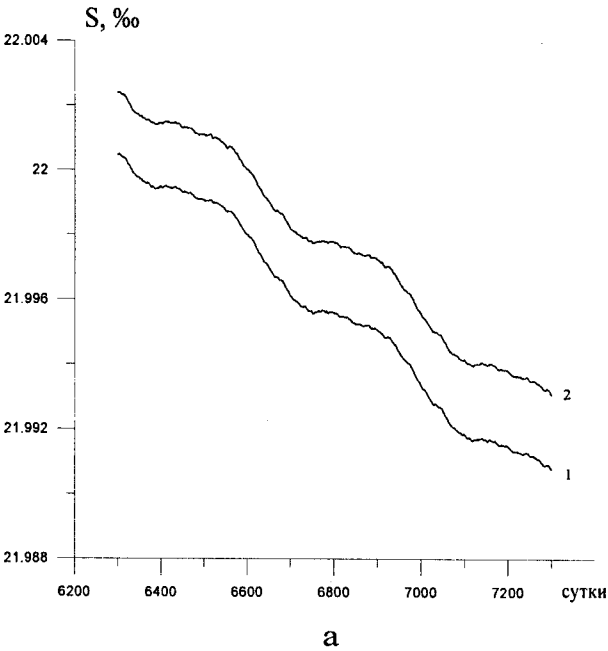
Первое слагаемое в выражениях (31) соответствует схеме Садурни (Soudoury, 1975), обеспечивающей сохранение энтрофии.

Для того чтобы получить разностную схему, обладающую двумя квадратичными инвариантами ((28) и $h_{i+1/2,j+1/2} \eta_{i+1/2,j+1/2}^2 / 2$) для скоростей, горизонтальная дивергенция которых не равна нулю, необходимо использовать другую аппроксимацию уравнений (22), (23) [5]. Такая схема получена в [5] и в наших обозначениях записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} [\xi, v] &= -\overline{v_{i+1/2,j}^y \xi_{i+1/2,j}^{xy^x}} + \frac{1}{12} \left\{ [\delta_x (u_{i+1/2,j} \delta_y \xi_{i+1/2,j}^x)] - \frac{1}{24} (u_{i+1/2,j} \delta_x \delta_y \xi_{i+1/2,j}^x) - \right. \\ &\quad \left. - (v_{i+1,j+1/2} \delta_y \xi_{i+1,j}^x + v_{i,j-1/2} \delta_y \xi_{i,j}^x + v_{i+1,j-1/2} \delta_x \xi_{i+1,j}^y + v_{i,j+1/2} \delta_x \xi_{i,j}^y) \right\}, \\ [\xi, u] &= \overline{u_{i,j+1/2}^x \xi_{i,j+1/2}^{xy^y}} + \frac{1}{12} \left\{ [\delta_y (v_{i,j+1/2} \delta_x \xi_{i,j+1/2}^y)] - \frac{1}{24} (v_{i,j+1/2} \delta_x \delta_y \xi_{i,j+1/2}^y) - \right. \\ &\quad \left. - (u_{i+1/2,j+1} \delta_x \xi_{i,j+1}^y + u_{i-1/2,j} \delta_x \xi_{i,j}^y + u_{i-1/2,j+1} \delta_y \xi_{i,j+1}^x + u_{i+1/2,j} \delta_y \xi_{i,j}^x) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

2. Результаты расчетов. Конечно-разностная модель, включающая постановку задачи, подробно была представлена в работах [7, 9, 13]. Отличие от указанной постановки заключается в задании в устьях рек, пролива Босфор и Керченского пролива нормальных скоростей (условие Дирихле для уравнений движения). На ее основе проведено два имитационных численных прогностических эксперимента на 20 лет модельного времени. Проводились расчеты установления циркуляции в Черном море под воздействием

сезонно меняющихся краевых полей с горизонтальным разрешением $14,8 \times 14,8$ км. В первом варианте расчетов горизонтальная адвекция в уравнениях движения аппроксимировалась в соответствии с (32), во втором — использовались соотношения (31). Таким образом, единственное отличие заключалось в различной аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнениях движения.



Р и с. 1. Поведение со временем на горизонте 500 м средних по поверхности солёности (а) и температуры (б) (нумерация кривых соответствует номерам экспериментов)

Анализ интегральных характеристик показал, что первая схема лучше описывает экстремальные значения в поле температуры. Например, на поверхности моря во втором расчете максимальные значения температуры летом достигают 30 °С, в первом — 27 °С. Ниже 100 м в первом расчете опреснение вод происходит чуть быстрее (рис., а), что свидетельствует о количественных отличиях в поле вертикальной скорости. Ниже 400 м средняя по горизонту температура во втором расчете отличается от климатической больше, чем в первом эксперименте (рис., б).

Качественная структура гидрофизических полей в обоих вариантах совпадает. Количественные отличия наблюдаются в поле вертикальной скорости. Наибольшая разница имеет место в трехметровом верхнем слое и в областях экстремальных градиентов. Как правило, они расположены на свале глубин. Проведен анализ структуры поля, полученного как разность вертикальных скоростей в двух расчетах на один и тот же момент времени. Он показал, что это поле имеет характер двух-, четырехшаговых волн. Их амплитуда выше во втором расчете, поэтому первый вариант аппроксимации нелинейных слагаемых предпочтителен.

3. Заключение. Проведен анализ различных конечно-разностных схем для уравнений движения. Исследованы дискретные аналоги различных форм записи уравнений движения. Показано, что существуют преобразования, которые, не меняя порядок аппроксимации, позволяют переходить из одной формы записи уравнений движения в другую. Выписана система дискретных уравнений (19) – (20), которая в зависимости от задания параметров (коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ и дискретной функции I) позволяет строить разностные схемы, обладающие заданными свойствами. В таблице указана такая зависимость свойств антисимметрии решения, сохранения энергии и/или энтропии. Получено, что для двумерного баротропного движения можно получить бесконечное число схем, обладающих двумя квадратичными инвариантами. Для дискретной системы уравнений мелкой воды показано, что в зависимости от коэффициента γ и разностной функции I можно строить схемы, обладающие квадратичным и линейным инвариантами (сохраняющие энергию и потенциальный вихрь).

Были проанализированы две аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнениях движения. Анализ результатов показал, что отличия малы. Первая схема (32) лучше описывает экстремальные значения в поле температуры. Ниже 400 м средняя по горизонту температура во втором расчете отличается от климатической больше, чем в первом эксперименте. Установлено, что количественные отличия наблюдаются в поле вертикальной скорости. Наибольшая разница имеет место в трехметровом верхнем слое и в областях экстремальных градиентов на свале глубин. Она носит характер двух-, четырехшаговых волн. Их амплитуда выше во втором расчете.

Полученная конечно-разностная аппроксимация уравнений движения обеспечивает наиболее адекватное описание энергетического спектра движений различного масштаба в численной модели. В то же время необходимо отметить, что проверка схем проведена для крупных пространственных мас-

штабов. Возможно, при их проверке на мезомасштабах отличие будет иметь качественный характер.

Работа выполнена при поддержке Научно-технологического центра на Украине (проект № 1725).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. — М., 1959. — С. 27 – 48.
2. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М., 1989. — 637 с.
3. Lorenz E.N. Energy and numerical weather prediction // *Tellus*. — 1960. — 12, № 4. — P. 364 – 373.
4. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow // *J. Comput. Phys.* — 1966. — 1. — P. 119 – 143.
5. Arakawa A., Lamb V.R. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equation // *Month. Weath. Rev.* — 1981. — 109, № 1. — P. 18 – 36.
6. Модели общей циркуляции атмосферы / Под ред. Ю. Чанга. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 350 с.
7. Демьшев С.Г., Коротаев Г.К. Численная энергосбалансированная модель бароклинных течений океана с неровным дном на сетке C // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане. — М.: ИВМ РАН, 1992. — С. 163 – 231.
8. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — 319 с.
9. Демьшев С.Г. Численная энергосбалансированная модель бароклинных течений океана // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Севастополь: МГИ НАН Украины, 1996. — 343 с.
10. Sadourny R. The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations // *J. Atm. Sci.* — 1975. — 32, № 4. — P. 680 – 689.
11. Bengtsson L., Temperton C. Difference approximation to quasi-geostrophic models // *Numer. meth. used in atmos. models*. — 1979. — 11, № 17. — P. 340 – 380.
12. Kreiss H.O., Oliger J. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equation // *Tellus*. — 1972. — 24, № 3. — P. 199 – 215.
13. Демьшев С.Г., Кныш В.В., Коротаев Г.К. Численное моделирование сезонной изменчивости гидрофизических полей Черного моря // *Морской гидрофизический журнал*. — 2002. — № 3. — С. 12 – 26.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 25.03.04
После доработки 12.07.04

ABSTRACT Semi-different schemes (having two invariants) for motion equations in the barotropic assumption are analyzed based on the box-method and the method of indefinite coefficients. Functional dependence permitting to construct different schemes with the property of solution antisymmetry, energy and/or enstrophy conservation is obtained. Two approximations of non-linear summands in the motion equations are analyzed. The first one provides conservation of two quadratic invariants for a barotropic divergent motion, the second one – for a barotropic non-divergent current. Prognostic (20 years of model time) experiments show that the first scheme quantitatively describes the known physical peculiarities of the Black Sea large-scale circulation more accurately.