

Фокусировка внутренних волн, генерируемых при неравномерном движении области атмосферных давлений

В линейной постановке с использованием длинноволнового приближения исследуется возможность генерации в непрерывно стратифицированной жидкости значительных возмущений при неравномерном движении области атмосферных давлений. Рассмотрен случай, когда возмущения среды, распространяющиеся от части траектории движения генератора, приходят одновременно в выделенную точку пространства – фокус. Для произвольного движения области давлений, при котором может проявляться изучаемый эффект, получена оценка амплитуды возмущений в фокусе.

Перемещающиеся атмосферные образования являются одним из генераторов внутренних волн в морях. Волнообразующее действие циклонов проявляется в создании областей возмущения атмосферного давления, полей касательных напряжений ветра, конвективного перемешивания, источник которого перемещается над поверхностью моря [1]. В работе изучаются волновые поля, возникающие под действием движущихся атмосферных давлений. На возможность интерпретации реакции океана на перемещающийся циклон как кильватерного следа движущегося шторма указывалось в [2]. Изучению волновых процессов, связанных с движущимися барическими образованиями, посвящено большое число работ (см., например, [3]). Движение аномалий атмосферного давления обычно предполагается прямолинейным и равномерным с небольшими периодическими вариациями интенсивности [4]. По-видимому, первое исследование переменного движения представлено в [5], где рассмотрено равномерное движение генератора по круговому пути. Учет значительных изменений параметров движения, характерных для природных явлений, затруднителен, поскольку связан с большими объемами вычислений.

В настоящей работе на основе простой гидродинамической модели рассмотрен один из возможных механизмов генерации значительных локальных волновых возмущений – явление фокусировки. Эффект возможен в случае, когда возмущения среды, распространяющиеся от различных точек части траектории (активного участка) движения генератора, приходят одновременно в некоторую точку пространства – фокус.

Исследование выполнено в рамках линейной теории волн с использованием длинноволнового приближения. Кроме того, с целью получения эффективного алгоритма расчета пространственных характеристик вынужденных волн приняты следующие упрощения: использованы приближения Буссинеска и граничное условие «твердой крышки» на поверхности жидкости, отфильтровывающее поверхностные волны; не учитывается вращение Земли; рассмотрено модельное распределение атмосферных давлений.

В результате для произвольного движения области давлений, при котором может проявляться изучаемый эффект, получена оценка амплитуды возмущений в фокусе. Она имеет величину порядка $\sqrt{r_0/L}$ (r_0 – расстояние от начала активного участка траектории до фокуса; L – горизонтальный масштаб области давлений). Для случая прямолинейного движения генератора с переменной скоростью определена зависимость амплитуды возмущений в фокусе A_f от величин начальной c_1 и конечной c_2 скорости перемещения давлений на активном участке траектории. Установлена существенная зависимость величины A_f от c_1 .

1. Математическая модель. Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях $-\infty < x, y < +\infty$, $-H < z < 0$ слой невязкой, несжимаемой, непрерывно стратифицированной жидкости глубины H . Невозмущенная плотность жидкости $\rho_0(z)$ зависит только от одной вертикальной координаты z . Генератором внутренних волн является область внешних давлений

$$p_a = p_0 f(x - x_0(t), y - y_0(t)),$$

где $(x_0(t), y_0(t))$ – зависящие от времени координаты эпицентра давлений.

В линейной постановке с использованием приближения квазистатики неустановившиеся возмущения жидкости, возбуждаемые движением аномалии давлений, описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 u_t = -p_x, \quad \rho_0 v_t = -p_y, \quad p_z + g\rho = 0, \\ u_x + v_y + w_z = 0, \quad \rho_t = \rho_0 g^{-1} N^2 w \end{aligned} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$p_a = -g\rho_0 \zeta \quad (z = 0), \quad w = 0 \quad (z = -H). \quad (1.2)$$

Здесь $(u, v, w), p, \rho$ – динамические возмущения скорости, давления и плотности жидкости; $N(z) = \sqrt{-g\rho_0^{-1} d\rho_0/dz}$ – частота Вайселя – Брента; ζ – вертикальное смещение частиц жидкости, $\zeta_t = w$; g – ускорение свободного падения. К системе (1.1), (1.2) необходимо добавить еще начальные условия, их выбор описан ниже.

Задача (1.1), (1.2) сводится к определению одной функции ζ :

$$\begin{aligned} \zeta_{zzt} + N^2 (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = 0, \\ \zeta = -p_a (g\rho_0)^{-1} \quad (z = 0), \quad \zeta = 0 \quad (z = -H). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Применяя к (1.3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам с параметрами μ, ν , получаем следующую краевую задачу для $Z(\mu, \nu, z, t)$ – трансформанты функции $\zeta(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} Z_{zzt} - k^2 N^2 Z = 0 \quad (-H < z < 0), \quad Z = Z_0 \quad (z = 0), \quad Z = 0 \quad (z = -H), \\ Z_0 = -p_a (g\rho_0)^{-1} F(\mu, \nu) \exp[-i(\mu x_0 + \nu y_0)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $F(\mu, \nu)$ – трансформанта функции $f(x, y)$; $k^2 = \mu^2 + \nu^2$.

Будем искать решение (1.4) в виде разложения по модам внутренних волн:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\mu, \nu, t) Z_n(z), \quad (1.5)$$

где $Z_n(z)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$d^2 Z_n / dz^2 + \lambda_n^2 N^2 Z_n = 0, \quad Z_n(-H) = Z_n(0) = 0, \quad (1.6)$$

удовлетворяющие условию нормировки

$$\int_{-H}^0 N^2 Z_n Z_m dz = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-H}^0 N^2 Z_n^2 dz = 1.$$

Коэффициенты b_n в разложении (1.5) вычисляются как коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$b_n(\mu, \nu, t) = \int_{-H}^0 N^2(z) Z(\mu, \nu, z, t) Z_n(z) dz. \quad (1.7)$$

Умножая уравнение (1.4) на собственную функцию $Z_n(z)$ и затем интегрируя его по z от $-H$ до 0 , получаем следующую задачу для определения коэффициентов $b_n(\mu, \nu, t)$:

$$\begin{aligned} b_n &= Z_{nz}(0)(b_{n1} - \lambda_n^{-2} Z_0), \\ b_{n1} + \omega_n^2 b_{n1} &= k^2 \lambda_n^{-4} Z_0, \quad \omega_n = k / \lambda_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1.8) можно записать в виде

$$b_{n1} = d_{n1} \cos \omega_n t + d_{n2} \sin \omega_n t + \frac{k^2}{\lambda_n^4 \omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) Z_0(\mu, \nu, \tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Значения констант d_{n1} и d_{n2} определяются начальными условиями. Для упрощения положим $d_{n1} = d_{n2} = 0$.

Подставляя (1.9) в (1.8), а затем получающееся при этом выражение для b_n – в (1.5), находим:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left\{ -Z_0(t) + \omega_n \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) Z_0(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \frac{z+H}{H} Z_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \omega_n \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) Z_0(\tau) d\tau, \\ \varphi_n &= \lambda_n^{-2} Z_n(z) Z_{nz}(0), \quad Z_0(t) \equiv Z_0(\mu, \nu, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Применяя к (1.10) обратное преобразование Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 + \zeta_1, \\ \zeta_0 &= -\frac{p_0}{g\rho_0} \frac{z+H}{H} f(x-x_0, y-y_0), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\zeta_1 = -\frac{p_0}{4\pi^2 g\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k \sin \omega_n(t-\tau) \exp(i\varphi) F(\mu, \nu) d\mu d\nu d\tau,$$

$$\varphi = \mu(x - x_0(\tau)) + \nu(y - y_0(\tau)).$$

2. Модельное распределение давления. Для упрощения полученного выражения, содержащего тройные интегралы, рассмотрим модельное распределение давления вида

$$f(x, y) = [(x^2 + y^2)/L^2 + 1]^{-3/2}, \quad F(\mu, \nu) = 2\pi L^2 \exp(-kL). \quad (2.1)$$

Параметр L , входящий в выражение (2.1), характеризует горизонтальный масштаб области давлений. Подставляя в (1.11) это выражение для $F(\mu, \nu)$ и переходя затем к полярным координатам, выводим следующее выражение для ζ_1 :

$$\zeta_1 = -\frac{p_0}{g\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n c_n J_n, \quad (2.2)$$

$$J_n = \frac{L^2}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 \sin(k(t-\tau)c_n) \exp(k(-L + iR \cos \theta)) dk d\theta d\tau =$$

$$= \frac{L^2}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial L^2} \operatorname{Im} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp[k(-L + iR \cos \theta + i(t-\tau)c_n)] dk d\theta d\tau =$$

$$= \frac{L^2}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial L^2} \operatorname{Im} \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\tau}{L - iR \cos \theta + i(t-\tau)c_n}, \quad (2.3)$$

$$c_n = \lambda_n^{-1}, \quad R^2 = (x - x_0(\tau))^2 + (y - y_0(\tau))^2.$$

Здесь c_n – скорость распространения свободных волн n -й моды.

Внутренний интеграл в (2.3) вычисляется, после чего J_n принимает вид

$$J_n = L^2 \frac{\partial^2}{\partial L^2} \operatorname{Re} \int_0^t D_n^{-1/2} d\tau,$$

$$D_n(x, y, t, \tau) = ((t-\tau)c_n + iL)^2 - R^2. \quad (2.4)$$

Итак, для модельного распределения давлений (2.1) получены выражения (2.2) и (2.4), содержащие однократные интегралы. В случае равномерного и прямолинейного движения области давлений поле вынужденных волн подобно полю подветренных волн, детально изученных в [6].

3. Параметры движения генератора при фокусировке. Обозначим зависимость от времени положения эпицентра давлений вектором $\mathbf{r}(t) = (x_0(t), y_0(t))$. В рамках рассматриваемой модели можно считать, что возмущения, создаваемые движущимися давлениями, распространяются от траектории эпицентра со скоростями c_n . Определим характер движения, при котором волны n -й моды, генерируемые в интервале (t_1, t_2) , будут приходить в точку $(0, 0)$ – фокус одновременно.

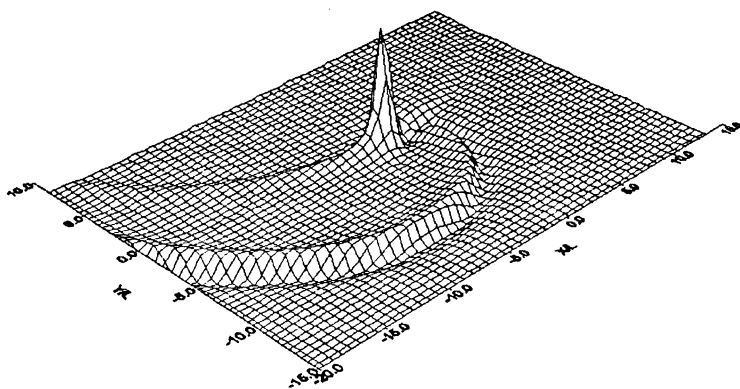
Время, за которое волна, распространяющаяся со скоростью c_n , преодолевает расстояние $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, равно $r(t)/c_n$. Через промежуток времени Δt эпицентр давлений будет находиться в точке, связанной с вектором $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. На прохождение волны от этой точки до начала координат требуется время $r(t+\Delta t)/c_n$, поэтому

$$\frac{r(t+\Delta t)}{c_n} + \Delta t = \frac{r(t)}{c_n}.$$

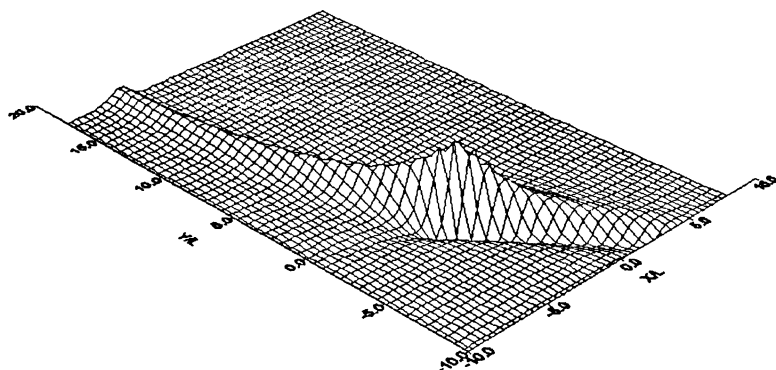
Устремляя Δt к нулю, выводим:

$$\frac{d}{dt}r(t) = -c_n, \quad r(t) = r_0 - c_n(t - t_1), \quad (3.1)$$

где r_0 – расстояние от начала активного участка траектории до фокуса в момент времени t_1 . Так как имеется лишь одно уравнение (3.1) для двухкомпонентного вектора $\mathbf{r}(t)$, то можно, задав траекторию, определить скорость перемещения по ней генератора или, задав скорость, определить траекторию.



а



б

Пространственное распределение амплитудного множителя J_n в момент фокусировки: а – криволинейное движение генератора с постоянной скоростью ($r_0 = 20L$, $\omega_0 = 90^\circ$, $c = 2c_n$); б – прямолинейное движение с переменной скоростью (удаление фокуса (0,0) от траектории $d = 20L$)

В случае прямолинейного движения с переменной скоростью эпицентра области давлений из (3.1) выводятся следующие зависимости:

$$x_0(t) = \sqrt{(r_0 - c_n(t - t_1))^2 - d^2}, \quad y_0(t) = d, \quad (3.2)$$

$$c(t) = -c_n(r_0 - c_n(t - t_1)) / x_0(t).$$

Здесь d – расстояние от фокуса до траектории, $c(t)$ – скорость перемещения давлений.

В случае равномерного движения со скоростью c по криволинейной траектории из (3.1) выводятся зависимости

$$x_0(t) = r \cos \omega, \quad y_0(t) = r \sin \omega, \quad \omega = \omega_0 + \sqrt{c^2/c_n^2 - 1} \ln r_0/r. \quad (3.3)$$

При этом траектория представляет собой логарифмическую спираль с фокусом в начале системы координат.

Представление о характере возмущений в этих двух случаях дает рисунок. В обоих случаях заметно выделяются локальные особенности волнового поля в окрестности фокуса.

4. Оценка величины возмущений жидкости в фокусе. Пусть волны n -й моды, генерируемые в промежутке времени $t_1 \leq t \leq t_2$, приходят в фокус одновременно. Будем называть соответствующий участок траектории активным. Без учета вклада волн, приходящих в фокус от других участков траектории, величина возмущений в момент прихода вынужденных волн в фокус $t_n = t_1 + r_0/c_n$ определяется амплитудным множителем (2.4):

$$J_{n0} = L^2 \frac{\partial^2}{\partial L^2} \operatorname{Re} \int_{t_1}^{t_2} D_n^{-1/2}(0, 0, t_n, \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Подставляя в выражение для функции D_n значения $x = y = 0, t = t_n$, выводим:

$$D_n(0, 0, t_n, \tau) = ((t_n - \tau)c_n + iL)^2 - r^2(\tau) = iL(-2(\tau - t_1)c_n + 2r_0 + iL).$$

В рассматриваемом случае $D_n(0, 0, t_n, \tau)$ является линейной функцией параметра интегрирования τ . Это позволяет сначала вычислить интеграл в (4.1) аналитически и затем получить явное выражение для J_{n0} :

$$\begin{aligned} J_{n0} &= -\frac{L^2}{c_n} \frac{\partial^2}{\partial L^2} \operatorname{Re} \sqrt{(-2(\tau - t_1)c_n + 2r_0)/iL + 1} \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{r_0 \xi}{c_n L} \operatorname{Im} \left[\left(1 - 2i\xi \frac{r_0}{L} \right)^{-3/2} \left(2 - 3i\xi \frac{r_0}{L} \right) \right]_{\xi=1-k}^{\xi=1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь введен параметр $k = (t_2 - t_1)/(t_n - t_1)$, характеризующий относительную продолжительность движения генератора по активному участку траектории.

Для упрощения дальнейшего анализа приведем асимптотическую оценку (4.2) при $r_0 \gg L$:

$$J_{n0} \sim \frac{3}{4c_n} \sqrt{\frac{r_0}{L}} (1 - \sqrt{1-k}). \quad (4.3)$$

Эта оценка показывает, что эффект фокусировки значителен при k , близком к 1, и $r_0 \gg L$, то есть когда время движения генератора по активному участку траектории примерно равно времени распространения волн до фокуса, а расстояние от начала активного участка траектории до фокуса много больше горизонтального масштаба области давлений.

5. Зависимость величины возмущений в фокусе от параметров прямолинейного движения. Рассмотрим подробнее случай прямолинейного движения с переменной скоростью (3.2). Из этой формулы следует, что $c \rightarrow \infty$ при $x_0 \rightarrow 0$, поэтому продолжительность движения генератора по активному участку траектории должна быть ограничена. Введем параметр $\alpha = |c(t_2)|/c_n$, характеризующий относительную величину скорости перемещения давлений в конце активного участка. Из формул (3.2) выводится сначала выражение для параметра k :

$$k = 1 - \frac{\alpha d}{r_0 \sqrt{\alpha^2 - 1}}. \quad (5.1)$$

Так как скорости распространения длинных внутренних волн в морях и океанах не превышают 3 м/с, то можно считать, что для реальных условий $\alpha > 3$. При этом величина α^{-2} мала, поэтому

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = 1 + \frac{1}{2\alpha^2} + \dots \approx 1.$$

Отсюда следует, что в диапазоне $|c(t_2)| > 3c_n$ величина возмущений в фокусе слабо зависит от значения скорости в конце активного участка траектории. Учитывая это и подставляя в (4.3) выражение $k = 1 - d/r_0$, получаем оценку

$$J_{n0} \sim \frac{3}{4c_n} \sqrt{\frac{r_0}{L}} \left(1 - \sqrt{\frac{d}{r_0}} \right). \quad (5.2)$$

Рассмотрим теперь зависимость величины возмущений в фокусе от значения скорости движения давлений в начале активного участка траектории $c(t_1)$. Из формул (3.2) выводим:

$$\beta = \frac{|c(t_1)|}{c_n} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - d^2}}. \quad (5.3)$$

Параметр β характеризует относительную величину $c(t_1)$. Из (5.3) находим, что $d/r_0 = \sqrt{1 - \beta^{-2}}$. Подставляя это выражение в (5.2), получаем

$$J_{n0} \sim \frac{3}{4c_n} \sqrt{\frac{r_0}{L}} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^{-2}} \right). \quad (5.4)$$

Из формулы (5.4) следует, что возмущения в фокусе будут иметь наибольшую величину при $\beta = 1$, когда скорость генератора в начале активного участка траектории является критической, т.е. равной скорости распространения свободных длинных волн n -й моды. Вычисления по формуле (5.4) показывают, что при $\beta = 1,25; 1,5; 2,0$ значения J_{n0} составляют соответственно

23, 14, 7% от наибольшего. Таким образом, величина возмущений в фокусе значительно зависит от начальной скорости перемещения давлений на активном участке траектории.

6. Заключение. В рамках рассматриваемой модели поле возмущений жидкости (2.2) представлено в виде разложения по модам внутренних волн. Вклад отдельной моды разделен по пространственным переменным. Множитель $\varphi_n(z)$ определяется только стратификацией, не зависит от параметров движения генератора и характеризует распределение возмущений среды по вертикали. Амплитудный множитель $J_n(x, y, t)$ определяется видом внешних давлений, параметрами их движения и характеризует зависимость возмущений среды от времени и их распределение по горизонтали. В работе получена простая оценка (4.3) для величины J_n в фокусе при общих параметрах движения (3.1), приводящих к фокусировке, и (5.4) – для частного случая прямолинейного неравномерного движения (3.2). Проведенный анализ показал, что эффект фокусировки значителен, когда время движения генератора по активному участку траектории примерно равно времени распространения волн до фокуса, а расстояние от начала активного участка траектории до фокуса много больше горизонтального масштаба области давлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоркина Р.Т., Фукс В.Р. Воздействие тайфунов на океан. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 243 с.
2. Beckerle J.G. Air and sea temperature during traverse of hurricane Alma (1966) // J. Phys. Oceanogr. – 1974. – 4, №3. – P. 487–492.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 260 с.
4. Доценко С.Ф., Савоськин В.М. Развитие пространственных волн в потоке непрерывно стратифицированной жидкости, генерируемых возмущениями переменной интенсивности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – №6. – С. 71 – 77.
5. Сretenский Л.Н. О волнах, поднимаемых кораблем при движении по круговому пути // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. – 1946. – 1. – С. 13 – 22.
6. Smith R.B. Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain // Tellus. – 1980. – 32, №4. – P. 348 – 364.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 13.04.05

ABSTRACT Possibility of generation of significant disturbances in a stratified fluid under non-uniform motion of the atmospheric pressure region is investigated in the linear treatment and using hydrostatic approximation. Considered is the case when the environment disturbances propagating from distinct points of a part of a moving generator trajectory arrive simultaneously to the chosen point in space – focus. For the arbitrary motion of the pressure domain, when the phenomenon under study can manifest itself, the disturbance amplitude in the focus is estimated.