УДК 551.466.8

А.А. Слепышев

Процессы переноса, обусловленные захваченными топографическими волнами при взаимодействии с турбулентностью

В приближении Буссинеска для захваченных наклонным дном топографических волн определены средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности при учете взаимодействия с турбулентностью придонного слоя. Коэффициенты турбулентного обмена выражаются через плотность турбулентной энергии по соотношениям полуэмпирической теории турбулентности. Уравнение баланса турбулентной энергии и уравнение для погранслойных волновых возмущений решаются совместно, что дало возможность найти вертикальное распределение плотности турбулентной энергии и характерный масштаб турбулентности. Показано, что определяющий вклад в волновой массоперенос вносят средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности.

Введение

Нелинейные эффекты при распространении узкоспектрального пакета как поверхностных, так и внутренних волн проявляются в генерации средних на масштабе волны течений [1 – 3]. Физической причиной этого является отличие от нуля волновых напряжений из-за зависимости огибающей от пространственно-временных координат. Индуцированные средние эйлеровы течения следует отличать от скорости стоксова дрейфа, который присутствует и в слабонелинейной плоской волне [4 – 6]. Учет турбулентной вязкости и диффузии приводит к тому, что индуцированные эйлеровы течения присутствуют и в слабонелинейной плоской волне [6]. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из скорости стоксова дрейфа и эйлеровой скорости индуцированного течения [4, 6]. Исследование волнового переноса актуально в придонном слое, так как волна оказывает активное динамическое воздействие на дно, вызывая взвешивание и перенос донного осадочного материала. Непосредственно в прибрежной области моря активная роль принадлежит поверхностным волнам, там происходит диссипация их энергии, часть которой идет на взвешивание и перенос наносов. На больших глубинах, где влияние поверхностных волн ослабевает, в придонном слое преобладает воздействие внутренних и топографических волн. Особенный интерес представляют захваченные наклонным дном топографические волны [7 – 10]. Энергия этих волн в коротковолновом пределе сконцентрирована у дна. Амплитуда волны затухает при удалении от дна [9], и в придонном пограничном слое сильные сдвиги волновой скорости обусловливают большие тангенциальные напряжения, приводящие к взмучиванию донных осадков, которые переносятся средними течениями, индуцированными за счет нелинейности волны.

В работе [11] определялись средние течения, индуцированные захваченной топографической волной за счет нелинейности при учете турбулентной вязкости и диффузии. Коэффициенты турбулентного обмена в [11] считались заданными. В настоящей работе коэффициенты турбулентного обмена в поле данной волны определяются с использованием гипотезы замыкания полуэмпирической теории турбулентности, которая связывает плотность турбулентной энергии и коэффициенты турбулентного обмена. Плотность турбулентной энергии находится из уравнения баланса турбулентной энергии, в которое входят сдвиги волновых скоростей. Таким образом, целью настоящей работы является исследование взаимодействия захваченных топографических волн и турбулентности придонного слоя. Определяются средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности. Исходные нелинейные уравнения гидродинамики для волновых возмущений при учете турбулентной вязкости и диффузии решаются асимптотическим методом многомасштабных разложений: в первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение. Во втором порядке малости по крутизне волны определяются средние течения, индуцированные волной за счет нелинейности после осреднения исходных уравнений движения по периоду волны. При нахождении решений линейного приближения находятся волновые погранслойные решения у дна с применением асимптотического метода Люстерника – Вишика. Коэффициенты турбулентного обмена выражаются через плотность турбулентной энергии из соотношений полуэмпирической теории турбулентности. Уравнение для погранслойных волновых решений и уравнение баланса турбулентной энергии с учетом сдвигов волновых скоростей решаются совместно, что дает возможность получить вертикальное распределение плотности турбулентной энергии и коэффициентов турбулентного обмена в придонном слое в области данной волны.

Постановка задачи и описание модели

Уравнения гидродинамики для волновых возмущений запишем в системе координат, плоскость XOY которой совпадает с плоским наклонным дном, ось OX параллельна изобатам и составляет с западным направлением угол β, ось OY направлена вверх по склону, ось OZ совпадает с направлением внешней нормали. Положительному значению угла β соответствует поворот параллели к оси OX против часовой стрелки. Вектор угловой скорости вращения Земли имеет проекции на оси OZ, OY и OX соответственно:

$$\Omega_z = \Omega(\sin\varphi\cos\gamma - \cos\varphi\cos\beta\sin\gamma),\quad \Omega_y = \Omega(\cos\varphi\cos\gamma\cos\beta + \sin\varphi\sin\gamma),$$
$$\Omega_x = \Omega\,\cos\varphi\sin\beta,$$

где γ – наклон дна, φ – широта, $\Omega = 7{,}5\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли. Введем безразмерные переменные $x = \tilde{x}/D$, $y = \tilde{y}/D$, $z = \tilde{z}/D$

(D – характерная глубина), $t = \tilde{t}\,\omega_*$ (ω_* – характерная частота волны), размерные величины отмечены волнистой чертой сверху. Безразмерные величины компонент волновых возмущений скорости u, v, w, давления P, плотности ρ, коэффициентов горизонтальной K_1, M_1 и вертикальной K_3, M_3 турбулентной вязкости и диффузии, проекций угловой скорости вращения Земли определяются следующим образом:

$$u = \tilde{u}/(\omega_* D), \quad v = \tilde{v}/(\omega_* D), \quad w = \tilde{w}/(\omega_* D), \quad P = \tilde{P}/(\bar{\rho}_0 (D\omega_*)^2),$$
$$K_3 = \tilde{K}_3/\mu, \; M_3 = \tilde{M}_3/\mu, \; K_1 = \tilde{K}_1/\mu, \; M_1 = \tilde{M}_1/\mu, \; \rho = \tilde{\rho} g / \left(\bar{\rho}_0 D \omega_*^2\right),$$
$$\Omega_x = \tilde{\Omega}_x/\omega_*, \quad \Omega_y = \tilde{\Omega}_y/\omega_*, \quad \Omega_z = \tilde{\Omega}_z/\omega_*,$$

где $\bar{\rho}_0$ – характерная средняя плотность воды, μ – максимальное значение горизонтальной турбулентной вязкости в придонном слое. Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в безразмерных переменных в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\partial u/\partial t + 2(\Omega_y w - \Omega_z v) + (\vec{u}\nabla)u = -\partial P/\partial x + \varepsilon^2 Q u +$$
$$+ \varepsilon^2 \partial K_1/\partial z \cdot \partial w/\partial x + \varepsilon^2 \partial K_3/\partial z \cdot \partial u/\partial z, \qquad (1а)$$

$$\partial v/\partial t + 2(\Omega_z u - \Omega_x w) + (\vec{u}\nabla)v = -\partial P/\partial y - \rho \sin y + \varepsilon^2 Q v +$$
$$+ \varepsilon^2 \partial K_1/\partial z \cdot \partial w/\partial y + \varepsilon^2 \partial K_3/\partial z \cdot \partial v/\partial z, \qquad (1б)$$

$$\partial w/\partial t + 2(\Omega_x v - \Omega_y u) + (\vec{u}\nabla)w = -\partial P/\partial z + \varepsilon^2 Q w +$$
$$+ 2\varepsilon^2 \partial w/\partial z \cdot \partial K_3/\partial z - \rho \cos y, \qquad (1в)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0, \qquad (1г)$$

$$\partial \rho/\partial t + (\vec{u}\nabla)\rho + v\partial\rho_0/\partial y + w\partial\rho_0/\partial z = \varepsilon^2 (M_1 \partial^2\rho/\partial x^2 + M_1 \partial^2\rho/\partial y^2 +$$
$$+ M_3 \partial^2\rho/\partial z^2 + \partial M_3/\partial z \cdot \partial\rho/\partial z), \qquad (1д)$$

где Q – дифференциальный оператор, определяемый по формуле $Q = K_1\partial^2/\partial x^2 + K_1\partial^2/\partial y^2 + K_3\partial^2/\partial z^2$; $\varepsilon^2 = \mu/(\omega_* D^2)$ – малый параметр, пропорциональный максимальному значению горизонтальной турбулентной вязкости.

Граничные условия у дна:

$$u(0) = w(0) = v(0) = 0, \quad \rho(0) = 0. \qquad (2)$$

Следуя гипотезам замыкания полуэмпирической теории турбулентности, выразим коэффициенты турбулентной вязкости через плотность турбулентной энергии b [12]: $K_i = l_i\sqrt{b}$, l_i – масштабы турбулентности (i = 1, 3), $M_i = \chi_p K_i$ – коэффициенты турбулентной диффузии ($\chi_p \sim 0{,}1$), $K_{bi} = \chi_b K_i$ – коэффициенты диффузии турбулентной энергии ($\chi_b \sim 0{,}1$). Уравнение баланса турбулентной энергии, осредненное по периоду волны, имеет вид:

$$\frac{d}{dz}(K_{b3}\frac{db}{dz}) + K_1(\overline{(\frac{\partial u}{\partial z})^2} + \overline{(\frac{\partial v}{\partial z})^2}) - (\frac{2K_1}{l_1^2} + \frac{K_3}{l_3^2})c^4 b -$$
$$- N^2(M_1 \sin\gamma + M_3 \cos\gamma) = 0\,. \qquad (3)$$

Первое слагаемое в (3) описывает диффузию турбулентности, второе – генерацию турбулентности сдвигами волновых скоростей, третье – диссипацию энергии, четвертое – работу турбулентности против сил плавучести, $c^4 = 0{,}5$ [12]. Из (3) следует обыкновенное дифференциальное уравнение для b:

$$\frac{d}{dz}(\chi_b l_3 \sqrt{b}\frac{db}{dz}) + l_1\sqrt{b}(\overline{(\frac{\partial u}{\partial z})^2} + \overline{(\frac{\partial v}{\partial z})^2}) - (\frac{2\sqrt{b}}{l_1} + \frac{\sqrt{b}}{l_3})c^4 b -$$
$$- N^2\chi_p\sqrt{b}(l_1 \sin\gamma + l_3 \cos\gamma) = 0\,. \qquad (4)$$

Граничные условия: $b = 0$ – на дне, $\frac{db}{dz} = 0$ – на верхней границе придонного слоя (минимум b).

В качестве решения в линейном приближении рассмотрим волну типа Кельвина, нормальная ко дну компонента волновой орбитальной скорости у которой равна нулю, т.е. $w = 0$. Введем функцию тока ψ, волновые возмущения компонент скорости выразим через ψ:

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x\,. \qquad (5)$$

Решение системы (1) в линейном приближении будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1(z)A\exp(ikx + ily - i\sigma t) + \text{к. с.},\\ \rho &= \rho_1(z)A\exp(ikx + ily - i\sigma t) + \text{к. с.},\\ P &= P_1(z)A\exp(ikx + ily - i\sigma t) + \text{к. с.},\end{aligned} \qquad (6)$$

где к. с. – комплексно сопряженные слагаемые, $A(x,t)$ – амплитудная функция, медленно меняющаяся на масштабе волны.

Из (1) следуют уравнения для $\rho_1(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$[-i\sigma - \varepsilon^2\partial M_3/\partial z \cdot \partial\psi_1/\partial z + \varepsilon^2(k^2 M_1 + l^2 M_1 -$$
$$- M_3\partial^2/\partial z^2)]\rho_1 = -i N^2 k\psi_1 \sin\gamma\,, \qquad (7)$$

$$[i\sigma+\varepsilon^2\partial M_3/\partial z\cdot\partial/\partial z-\varepsilon^2(k^2M_1+l^2M_1-M_3\partial^2/\partial z^2)][2i\psi_1(k\Omega_x+l\Omega_y)]=$$
$$=[i\sigma+\varepsilon^2\partial M_3/\partial z\cdot\partial/\partial z-\varepsilon^2(k^2M_1+l^2M_1-M_3\partial^2/\partial z^2)]\,d/dz\,\{[il\sigma-$$
$$-2\Omega_z k+\varepsilon^2 l\partial K_3/\partial z\cdot\partial/\partial z-\varepsilon^2 l(k^2K_1+l^2K_1-K_3\partial^2/\partial z^2)]\psi_1/k\}-$$
$$-0{,}5N^2ki\psi_1\sin 2\gamma\,. \tag{8}$$

Граничные условия у дна для функций $\rho_1(z)$ и $\psi_1(z)$ имеют вид:

$$\psi_1(0)=0,\quad \rho_1(0)=0\,. \tag{9}$$

Следуя асимптотическому методу Люстерника – Вишика, функции $\psi_1(z)$ и $\rho_1(z)$ и частоту волны σ будем искать в виде [13, 14]:

$$\begin{gathered}\psi_1(z)=\psi_{10}(z)+\varepsilon^2\psi_{12}(z)+\psi_{11}(z/\varepsilon)\,,\\ \rho_1(z)=\rho_{10}(z)+\varepsilon^2\rho_{12}(z)+\rho_{11}(z/\varepsilon)\,,\\ \sigma=\sigma_0+\varepsilon^2\sigma_2\,,\end{gathered} \tag{10}$$

где $\psi_{10}(z)=\exp(mz)$ и $\rho_{10}(z)=N^2k\sin\gamma\cdot\psi_{10}(z)/\sigma_0$ – «невязкие» решения, т.е. решения при $\varepsilon=0$; $\psi_{11}(z/\varepsilon)$ и $\rho_{11}(z/\varepsilon)$ – «погранслойные» решения, быстро убывающие (по сравнению с $\psi_{10}(z)$)при удалении от дна;

$$m=(2\sigma_0(k\Omega_x+l\Omega_y)+0{,}5iN^2k\sin 2\gamma)/(2i\sigma_0\Omega_z+klN^2(\sin^2\gamma)/k_h^2)\,. \tag{11}$$

Частота волны σ_0 удовлетворяет дисперсионному соотношению при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии: $\sigma_0^2=N^2k^2\sin^2\gamma/(k^2+l^2)$, $\varepsilon^2\sigma_2$ – поправка к частоте, обусловленная турбулентной вязкостью и диффузией, $k_h^2=k^2+l^2$ – квадрат горизонтального волнового вектора.

Условие захвата волны наклонным дном $\mathrm{Re}(m)<0$ имеет вид:

$$\sigma_0\cos(\varphi-\gamma)k[k^2/k_h^2+\mathrm{tg}(\varphi-\gamma)\mathrm{ctg}\gamma]<0. \tag{12}$$

При $|\mathrm{ctg}\gamma\, tg(\varphi-\gamma)|>k^2/k_h^2$ условие (12) сводится к виду:

$$\sigma_0 k\cdot\mathrm{ctg}\gamma\sin(\varphi-\gamma)<0\,.$$

У захваченной наклонным дном волны фаза распространяется, оставляя более мелкую воду справа в Северном полушарии.

Уравнения для ψ_{11}, ρ_{11} имеют вид:

$$\partial/\partial\eta(K_3\partial\psi_{11}/\partial\eta)+i\sigma_0\psi_{11}=0\,,\quad \eta=z/\varepsilon, \tag{13}$$

$$\partial/\partial\eta(M_3\partial\rho_{11}/\partial\eta)+i\sigma_0\rho_{11}=iN^2k\sin\gamma\cdot\psi_{11}\,. \tag{14}$$

Граничные условия для ψ_{11}, ρ_{11}:

$$\psi_{11}(0)+\psi_{10}(0)=0,\;\; \rho_{11}(0)+\rho_{10}(0)=0,$$
$$\psi_{11}\to 0,\;\; \rho_{11}\to 0 \text{ при } \eta\to\infty\,. \tag{15}$$

Выше придонного слоя толщиной h величину коэффициента турбулентного обмена будем считать постоянной, равной M_{30}, внутри придонного слоя при $z<h$ коэффициент турбулентного обмена определяется из решения уравнения (4). При $z>h$ решение имеет вид: $\psi_{11}(\eta)$ = $\exp(\lambda\eta)C$, $\lambda=-\sqrt{\sigma_0/2M_{30}}\,(1-i)$.

Внутри придонного слоя при $z<h$ уравнение (13) решалось численно по неявной схеме Адамса третьего порядка при условии непрерывности функции ψ_{11} и ее производной на верхней границе придонного слоя, т.е. при $z=h$. Постоянная C находилась из граничного условия $\psi_{11}(0)+\psi_{10}(0)=0$. За верхнюю границу придонного слоя принималось положение максимума амплитуды волновой орбитальной скорости. Аналогично неоднородное уравнение (14) для ρ_{11} в области $z\geq h$ решалось аналитически, в области $z<h$ – численно по неявной схеме Адамса третьего порядка при условии непрерывности функции ρ_{11} и ее производной при $z=h$.

Уравнение (4) для плотности турбулентной энергии решалось численно методом Рунге – Кутта, из условия выполнимости граничного условия на верхней границе придонного слоя находился масштаб турбулентности l_1, причем предполагалось, что $l_3=l_1\left|\dfrac{k_h}{m}\right|$. Величина M_{30} равна значению M_3 на верхней границе придонного слоя.

Амплитудная функция $A(x,t)$ удовлетворяет следующему эволюционному уравнению [11]:

$$\partial|A^2|/\partial t+Cg_x\cdot\partial|A^2|/\partial x+Cg_y\cdot\partial|A^2|/\partial y=\alpha|A^2|, \tag{16}$$

где Cg_x, Cg_y – компоненты групповой скорости, α – коэффициент затухания волны,

$$Cg_x=l^2/k[\int_0^D[(\sigma_0+\varepsilon^2k_h^2K_1)\psi_1\psi_1^*-\frac{\varepsilon^2}{2}K_3(\psi_1\frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial z^2}+\psi_1^*\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2})-$$

$$-\frac{i\varepsilon^2}{2}\partial K_3/\partial z(\psi_1\partial\psi_1^*/\partial z-\psi_1^*\partial\psi_1/\partial z)]dz]\left[k_h{}^2\int\limits_0^D\psi_1\psi_1{}^*dz\right]^{-1},$$

$$Cg_y=-Cg_x k/l,$$

$$\alpha=-[\int\limits_0^D[2k_h^4K_1\cdot\psi_1\psi_1^*-k_h^2K_3(\psi_1\frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial z^2}+\psi_1^*\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2})+k^2N^2\frac{\sin^2\gamma}{\sigma_0^2}[2k_h^2M_1\psi_1\psi_1^*-$$
$$-M_3(\psi_1\frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial z^2}+\psi_1^*\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2})]]dz+\int\limits_0^D[-k_h^2\partial K_3/\partial z\cdot\partial/\partial z(\psi_1\psi_1^*)- \qquad (17)$$
$$-k^2N^2\frac{\sin^2\gamma}{\sigma_0^2}\partial M_3/\partial z\cdot\partial(\psi_1\psi_1^*)/\partial z]dz]\left[k_h{}^2\int\limits_0^D\psi_1\psi_1{}^*dz\right]^{-1}.$$

В стационарном случае уравнение (16) преобразуется к виду:

$$Cg\partial\left|A^2\right|/\partial\xi=\alpha\left|A^2\right|, \qquad (18)$$

где ξ – координата вдоль луча, Cg – групповая скорость. Пространственные производные функции $\left|A^2\right|$ следующим образом выражаются через градиент $\partial|A^2|/\partial\xi$:

$$\partial|A^2|/\partial x=Cg_x/Cg\cdot\partial|A^2|/\partial\xi,\ \ \partial|A^2|/\partial y=Cg_y/Cg\cdot\partial|A^2|/\partial\xi. \qquad (19)$$

Волновые потоки $\overline{\rho u}$ и $\overline{\rho v}$ (черта сверху означает осреднение по периоду волны) при учете турбулентной вязкости отличны от 0, они определяются следующим образом:

$$\overline{\rho u}=il(\psi_1\rho_1^*-\psi_1^*\rho_1)\left|A^2\right|,\ \ \overline{\rho v}=-\frac{k}{l}\overline{\rho u}. \qquad (20)$$

Лагранжева скорость стоксова дрейфа частиц жидкости $\vec{u}_s$ определяется по формуле [4]:

$$\vec{u}_s=\overline{(\int\limits_0^t\vec{u}(\vec{x},t')dt'\cdot\nabla)\vec{u}(\vec{x},t)}. \qquad (21)$$

Для волн рассматриваемого класса скорость стоксова дрейфа с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, равна 0.

Волновые напряжения $\overline{\vec{u}\nabla u}$, $\overline{\vec{u}\nabla v}$, $\overline{\vec{u}\nabla \rho}$ в поле волны отличны от 0 из-за учета турбулентной вязкости и диффузии и обусловливают вследствие нелинейности присутствие средних эйлеровых течений.

Для определения указанных средних на масштабе волны течений исходные уравнения движения (1) осредним по периоду волны, получим уравнения для средних полей $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{\rho},\bar{P})$, индуцированных волной в слабонелинейном приближении:

$$\partial\bar{u}/\partial t + \overline{\vec{u}\nabla u} + 2\Omega_y\bar{w} - 2\Omega_z\bar{v} =$$
$$= -\partial\bar{P}/\partial x + \varepsilon^2 Q\bar{u} + \varepsilon^2\partial K_1/\partial z \cdot \partial\bar{w}/\partial x + \varepsilon^2\partial K_3/\partial z \cdot \partial\bar{u}/\partial z, \tag{22а}$$

$$\partial\bar{v}/\partial t + \overline{\vec{u}\nabla v} + 2\Omega_z\bar{u} - 2\Omega_x\bar{w} =$$
$$= -\partial\bar{P}/\partial y + \varepsilon^2 Q\bar{v} + \varepsilon^2\partial K_1/\partial z \cdot \partial\bar{w}/\partial y + \varepsilon^2\partial K_3/\partial z \cdot \partial\bar{v}/\partial z - \bar{\rho}\sin\gamma, \tag{22б}$$

$$\partial\bar{w}/\partial t + \overline{\vec{u}\nabla w} + 2\Omega_x\bar{v} - 2\Omega_y\bar{u} =$$
$$= -\partial\bar{P}/\partial z - \bar{\rho}\cos\gamma + \varepsilon^2 Q\bar{w} + 2\varepsilon^2\partial\bar{w}/\partial z \cdot \partial K_3/\partial z, \tag{22в}$$

$$\partial\bar{\rho}/\partial t + \overline{\vec{u}\nabla\rho} - N^2(\bar{v}\sin y + \bar{w}\cos y) =$$
$$= M_1\varepsilon^2\partial^2\bar{\rho}/\partial x^2 + M_1\varepsilon^2\partial^2\bar{\rho}/\partial y^2 + M_3\varepsilon^2\partial^2\bar{\rho}/\partial z^2 + \varepsilon^2\partial M_3/\partial z \cdot \partial\bar{\rho}/\partial z, \tag{22г}$$

$$\partial\bar{u}/\partial x + \partial\bar{v}/\partial y + \partial\bar{w}/\partial z = 0. \tag{22д}$$

Выразим волновые напряжения $\overline{\vec{u}\nabla u}$, $\overline{\vec{u}\nabla v}$, $\overline{\vec{u}\nabla\rho}$ через решения линейного приближения ψ_1, ρ_1 [11]:

$$\overline{\vec{u}\nabla u} = l^2\psi_1\psi_1^*\partial(AA^*)/\partial x - kl\psi_1\psi_1^*\partial(AA^*)/\partial y, \tag{23а}$$

$$\overline{\vec{u}\nabla v} = -kl\psi_1\psi_1^*\partial(AA^*)/\partial x + k^2\psi_1\psi_1^*\partial(AA^*)/\partial y, \tag{23б}$$

$$\overline{\vec{u}\nabla\rho} = i(\rho_1\psi_1^* - \rho_1^*\psi_1)(k\partial(AA^*)/\partial y - l\partial(AA^*)/\partial x)/2. \tag{23в}$$

Из анализа системы (22) с учетом (18), (19), (23) следует, что индуцируемые волной средние поля плотности $\bar{\rho}$, давления $\bar{P}$ и компонент скорости течения $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ следует искать в виде:

$$\bar{\rho} = \rho_{20}(z)AA^*,\quad \bar{P} = P_{20}(z)AA^*,\quad \bar{u} = u_{20}(z)AA^*,\quad \bar{v} = v_{20}(z)AA^*,$$
$$\bar{w} = w_{20}(z)\partial(AA^*)/\partial\xi. \tag{24}$$

Уравнения для функций $P_{20}(z)$, $u_{20}(z)$, $v_{20}(z)$, $w_{20}(z)$, $\rho_{20}(z)$ следуют из (22) после подстановки (23) и (24) при использовании соотношений (18), (19) и сводятся к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений восьмого порядка:

$$dY/dz = \mathrm{A}Y + F\,. \tag{25}$$

Столбцы Y и F имеют вид: $Y^T = (u_{20}, v_{20}, \rho_{20}, w_{20}, \dfrac{\partial u_{20}}{\partial z}, \dfrac{\partial v_{20}}{\partial z}, \dfrac{\partial \rho_{20}}{\partial z}, P_{20})$, $F^T = (0,0,0,0, f_{10}\psi_1\psi_1^*, f_{20}\psi_1\psi_1^*, f_{30}(\rho_1\psi_1^* - \rho_1^*\psi_1))$,

где

$$f_{10} = \alpha l(lCg_x - kCg_y)/(Cg^2K_3), \quad f_{20} = \alpha k(kCg_y - lCg_x)/(Cg^2K_3),$$
$$f_{30} = \alpha i(kCg_y - lCg_x)/(2Cg^2M_3)\,. \tag{26}$$

Элементы матрицы А (z), имеющей размерность 8×8, определяются по формулам [11]:

$$a_{41} = -Cg_x/Cg,\ a_{42} = -Cg_y/Cg,\ a_{15} = 1,\ a_{26} = 1,\ a_{37} = 1,\ a_{54} = 2\Omega_y\alpha/(CgK_3) -$$
$$-Cg_x\alpha^2/(Cg^3K_3)\partial K_1/\partial z,\ \ a_{55} = a_{66} = -\partial K_3/\partial z/K_3,\ \ a_{77} = -\partial M_3/\partial z/M_3,$$

$$a_{52} = -2\Omega_z/K_3,\ \ a_{58} = \alpha Cg_x/(K_3Cg^2),\ \ a_{51} = a_{62} = -(K_1/K_3)(\alpha/Cg)^2, \tag{27}$$

$$a_{61} = 2\Omega_z/K_3,\ a_{63} = \sin(\gamma)/K_3,\ a_{64} = -2\Omega_x\alpha/(K_3Cg) - Cg_y\alpha^2/(Cg^3K_3)\partial K_1/\partial z,$$

$$a_{68} = \alpha Cg_y/(K_3Cg^2),\ \ a_{73} = -(M_1/M_3)(\alpha/Cg)^2,\ \ a_{84} = K_1(\alpha/Cg)^3,$$

$$a_{72} = -N^2\sin(\gamma)/M_3,\ \ a_{74} = -N^2\cos(\gamma)\alpha/(M_3Cg),$$

$$a_{81} = 2\Omega_y - 2\alpha Cg_x/Cg^2\partial K_3/\partial z,\ \ a_{82} = -2\Omega_x - 2\alpha Cg_y/Cg^2\partial K_3/\partial z\,,$$

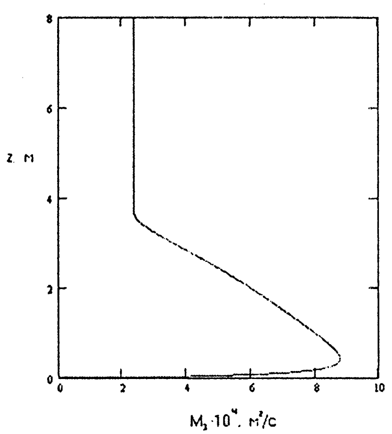
$$a_{85} = -\alpha K_3Cg_x/Cg^2,\ a_{83} = -\cos(\gamma),\ a_{86} = -\alpha K_3Cg_y/Cg^2\,.$$

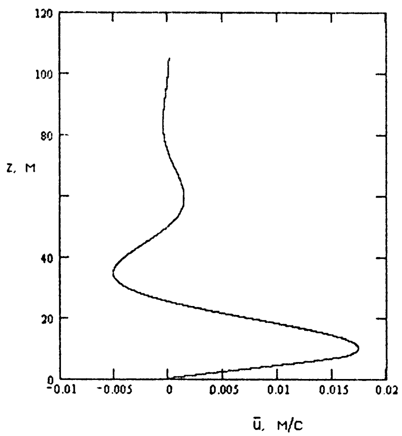
Все остальные элементы матрицы A равны 0.

Система дифференциальных уравнений (25) решается аналитически выше придонного слоя, в области $z \ge h$, при условии u_{20}, v_{20}, w_{20}, $\rho_{20} \to 0$, если $z \to \infty$. Внутри придонного слоя, в области $z < h$, эта система решается численно по неявной схеме Адамса при следующих граничных условиях: $u_{20}(0) = v_{20}(0) = w_{20}(0) = \rho_{20}(0) = 0$ и при непрерывности решения $Y(z)$ на верхней границе придонного слоя (при $z = h$).

Результаты расчетов

Сделаем расчет плотности энергии турбулентности, генерируемой волной, и средних течений, индуцированных волной за счет нелинейности на континентальном склоне Южного берега Крыма между мысами Сарыч и Ай-Тодор, на широте $\varphi = 44°20'$. Средний уклон дна составлял $\gamma = 0{,}1$, величина угла $\beta = 9°30'$, типичное значение частоты Брента – Вяйсяля глубже главного пикноклина ~ 2,5 цикл/ч; при $k = -0{,}005$, $l = 0{,}001$ м$^{-1}$ частота волны $\sigma_0 = 4{,}269 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Амплитудный множитель $|A^2|$ определяется по максимальной амплитуде горизонтальной скорости U_0: $|A^2| = U_0^2 / J$, где $J = 4k_h^2 \max(\psi_1 \psi_1^*)$. На рис. 1 показан рассчитанный профиль коэффициента турбулентного обмена для волны с максимальной амплитудой U_0 ~ 0,16 м/с. Величина горизонтального масштаба турбулентности l_1, полученная при решении краевой задачи (4), составила 3,2 м.





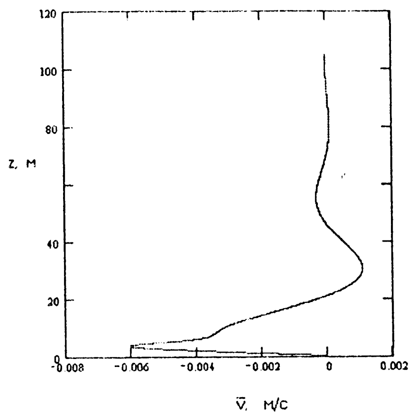
Р и с. 1. Зависимость коэффициента вертикального турбулентного обмена от расстояния до дна

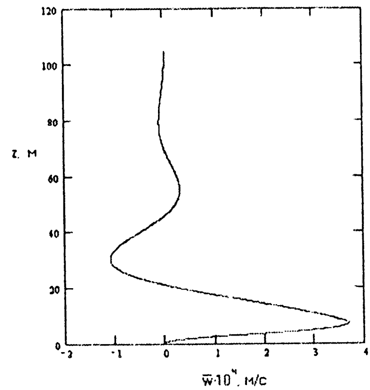
Р и с. 2. Вертикальный профиль индуцированного за счет нелинейности среднего течения $\bar{u}(z)$

На рис. 2 – 4 показаны вертикальные профили компонент скорости индуцированного течения $\bar{u}(z)$, $\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$, на рис. 5 – вертикальный профиль неосциллирующей поправки к средней плотности $\bar{\rho}(z)$. Зависимость волнового потока массы $\overline{\rho u}$ от вертикальной координаты показана на рис 6. Волновой поток массы $\overline{\rho v}$ связан с потоком $\overline{\rho u}$ соотношением (20). Суммарный волновой поток массы J_i $(i = 1, 2)$ складывается из потока $\overline{\rho u}$ (или $\overline{\rho v}$) и потока, обусловленного индуцированным течением $\bar{u}$ (или $\bar{v}$):

$$J_1 = \rho_0 \bar{u} + \overline{\rho u}, \qquad (28а)$$

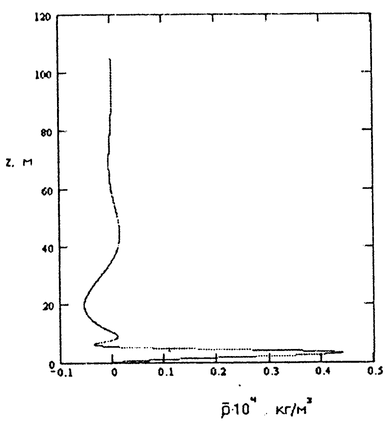
$$J_2 = \rho_0 \bar{v} + \overline{\rho v}. \qquad (28б)$$

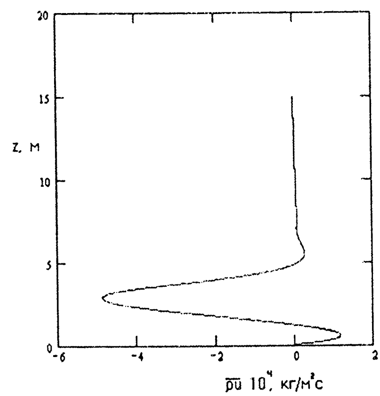




Р и с. 3. Вертикальный профиль индуцированного за счет нелинейности среднего течения $\overline{v}(z)$

Р и с 4. Вертикальный профиль индуцированного за счет нелинейности среднего течения $\overline{w}(z)$





Р и с. 5. Вертикальный профиль индуцированной за счет нелинейности неосциллирующей поправки к средней плотности $\overline{\rho}(z)$

Р и с. 6. Вертикальное распределение волнового потока $\overline{\rho u}$

Из анализа графиков $\overline{u}(z)$ (рис. 2) и $\overline{\rho u}$ (рис. 6) следует, что определяющий вклад в волновой массоперенос (28а) вносит компонента $\overline{u}(z)$ скорости индуцированного течения. Аналогично в поток J_2 (28б) определяющий вклад вносит компонента $\overline{v}(z)$ скорости индуцированного течения. Коэффициент вертикального турбулентного обмена достаточно быстро нарастает при удалении от дна в пределах придонного пограничного слоя, далее с ростом z при уменьшении сдвигов волновых скоростей этот коэффициент уменьшается до минимального значения на верхней границе придонного слоя.

Выводы

1. Захваченные наклонным дном топографические волны в результате трения о дно продуцируют придонный турбулентный слой, толщина и интенсивность турбулентности определяются параметрами захваченной волны. Плотность энергии турбулентности, генерируемой волной, достаточно быстро нарастает при удалении от дна, а затем медленно убывает до верхней границы придонного слоя.

2. Захваченные наклонным дном топографические волны индуцируют средние течения, обусловленные нелинейностью, и неосциллирующую на временном масштабе волны поправку к средней плотности. Указанные средние течения вносят определяющий вклад в волновой массоперенос.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. – 1976. – 12, № 3. – С. 293 – 301.
2. *Grimshow R.* The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. Appl. Math. – 1977. – 56. – P. 241 – 266.
3. *Езерский А.Б., Папко В.В.* Лабораторное исследование потенциальных течений, индуцированных пакетом поверхностных волн // Изв. АН СССР. ФАО. – 22, № 9. – 1986. – С. 979 – 986.
4. *Longuet-Higgins M.S.* On the transport of mass by time varying current // Deep – Sea Res. –1969. – 16, № 5. – P. 431 – 447.
5. *Madsen O.S.* Mass transport in deep-water waves // J. Phys. Oceanogr. – 1978. – 8, № 6. – P. 1009 – 1015.
6. *Дворянинов Г.С.* Эффекты волн в пограничных слоях атмосферы и океана. – Киев: Наук. думка, 1982. – 176 с.
7. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Ч. 1. – М.: Мир, 1981. – 478 с.
8. *Brink K.H.* A comparision of long coastal trapped waves theory with observation off Peru // J. Phys. Oceanogr. – 1982. – 12, № 8. – P. 897 – 913.
9. *Rhines P.* Edge-, bottom-, and Rossby waves in a rotating stratified fluid // Geophys. Fluid Dyn. – 1970. – 1. – P. 273 – 302.
10. *Huthnance J.M.* On trapped waves over a continental shelf // J. Fluid Mech. – 1975. – 69. – P. 689 – 704.
11. *Слепышев А.А.* Транспорт наносов захваченными топографическими волнами // Морской гидрофизический журнал. – 2005. – № 5. – С. 11 – 22.
12. *Островский Л.А., Соустова И.А., Цимринг Л.Ш.* Воздействие внутренних волн на мелкомасштабную турбулентность в океане. – Горький, 1981. – 14 с. – (Препринт / АН СССР. Институт прикладной физики).
13. *Задорожный А.И.* Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море // Морские гидрофизические исследования. – 1975. – № 3. – С. 96 – 110.
14. *Черкесов Л.В.* Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 259 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 04.11.05
После доработки 15.12.05

ABSTRACT Mean currents induced by a wave due to nonlinearity are defined in the Boussinesque approximation for baroclinic topographic waves trapped by plane slope bottom with the allowance for their interaction with the bottom turbulence. The turbulent exchange coefficients are expressed through the turbulent energy density using the relations of the semi-empiric theory of turbulence. The equation of the turbulent exchange balance and the equation for the boundary layer wave solutions are solved jointly that provides a possibility to find vertical density distribution of the turbulent energy and the characteristic turbulence scale. It is shown that the determining contribution to the wave mass transport is done by mean currents induced by a wave due to nonlinearity.